Razonamiento Matemático

Estrategias en la Resolución de Problemas

FL
FreeLibros

PROYECTO INGENIO

Hernán Hernández

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Estrategias en la resolución de problemas

EDITORIAL INGENIO S. A.

Hernán
Hernández

EDITORIAL
INGENIO S. A.

DERECHOS RESERVADOS

Prohibida la reproducción parcial o total de esta obra, por cualquier sistema o método electrónico o mecánico (incluyendo fotocopiado, la grabación o cualquier sistema de recuperación o almacenamiento de información), sin consentimiento por escrito del autor.

Derechos de Autor reservados
HERNÁN HERNÁNDEZ BAUTISTA
E-mail:hhernandezin@hotmail.com
Edición 2004

Derechos de Edición reservados
EDITORIAL INGENIO S. A.
Jr. Moquegua 294 Of. 413 - Lima 01
Teléf.: 426-4853

Presentación

El desarrollo científico y tecnológico que ha alcanzado la humanidad en estos tiempos, no hubiera sido posible sin el auxilio de la matemática. La solución de los problemas de la actividad productiva, así como el interés por comprender las leyes que rigen la naturaleza, para su óptimo aprovechamiento, siempre han ido de la mano, y desde tiempos muy remotos, con el desarrollo del pensamiento lógico matemático en el hombre.

La necesidad de aprender esta ciencia, en relación con los demás campos del saber y las actividades cotidianas, se hace cada vez más imperiosa en los diferentes niveles de la educación, para que los conocimientos y las capacidades lógico matemáticos desarrollados en el educando, sean parte de su cultura y tenga frutos en su participación económico social futuras.

El libro RAZONAMIENTO MATEMÁTICO, **Estrategias en la resolución de problemas**, *es una versión práctica y simplificada de la matemática, que el profesor* **Hernán Hernández Bautista,** *ha plasmado con la filosofía de que la mejor manera de aprender la matemática es utilizándola, es decir, aplicándola en la resolución de problemas. El autor propone una serie de estrategias, basadas en los conocimientos más elementales con que cuenta cualquier persona en esta área, para resolver problemas de los diferentes temas que componen la asignatura de Razomamiento Matemático en los prospectos de exámenes de admisión de las universidades del país.*

De esta manera, la EDITORIAL INGENIO *S. A., pone en manos de los(as) lectores(as), otro de los frutos de su proyecto educativo* PROYECTO INGENIO, *que esperamos sea acogida con sentido crítico por toda la comunidad interesada en esta maravillosa ciencia, la matemática.*

Los Editores

NOTA DEL AUTOR

La implementación de la asignatura de Razonamiento Matemático, primero en los centros pre-universitarios y luego en los colegios, inclusive en el nivel primario, ha planteado una pregunta tácita: ¿Cuál es la diferencia entre Matemática y Razonamiento matemático? Que, como no puede ser de otra manera, nadie ha podido dar una respuesta satisfactoria, porque no se ha visto que alguien haga matemática sin razonamiento, ni razonamiento matemático sin uso de la matemática.

Sin embargo, hay quienes han "inventado" reglas prácticas, trucos, artificios, fórmulas, atajos, etc., que sólo son aplicables en "razonamiento matemático" y no en matemática; no contento con ello, han diversificado en numerosos capítulos, dedicados a una variedad de elementos como estacas, pastillas, problemas familiares, etc., dotándolos a cada uno de su propia receta y paradójicamente el lector ya no tiene que razonar mucho, sino, memorizar las recetas y con ellas sentirse preparado para resolver cualquier pregunta de esta asignatura.

Lógicamente, para algunos puede ser más sencillo usar las fórmulas y resolver mecánicamente los problemas, con el pequeño inconveniente de que tienen que memorizar de 3 a 4 fórmulas por capítulo, que en unos 30 de ellos alcanzan nada menos que el "reducido" número de 90 a 120 fórmulas y luego tener mucha suerte para que en el examen de admisión le toquen las preguntas cuya receta la tiene memorizada.

Por otro lado, se tiene por costumbre que resolver un problema matemático es llevarlo a una ecuación y luego resolviendo la ecuación llegar a la solución sin mayores esfuerzos de raciocinio. Este camino, exige que el estudiante sea capaz de traducir el texto del problema a una ecuación y dominar las reglas del álgebra para hallar la solución, requisitos que la mayoría de los aspirantes a las carreras universitarias, sobre todo a las de letras y humanidades, no cumplen; cosa que de ninguna manera es un pecado.

Los problemas solubles mediante ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales, se pueden resolver sin uso de los mismos. Este hecho abre grandes posibilidades de éxito en la resolución de problemas a todos aquellos que tienen dificultades en el dominio de las reglas del álgebra, porque con sólo saber las cuatro operaciones fundamentales y contar con las estrategias necesarias pueden contestar con acierto cerca del 80% de las preguntas de razonamiento matemático de los exámenes de admisión.

Amigo(a) lector(a), lo que tienes que aceptar es, que la matemática es una herramienta en la resolución de problemas, como tal, no es imprescindible conocer, las características: peso, medida, dimensiones, partes, etc. de la herramienta, sino, necesitas saber utilizarla óptimamente, aprovechando al máximo sus alcances.

Para estudiar este libro necesitas tener a la mano lápiz y papel. Cada tema se aborda mediante uno a varios problemas, que son resueltos a manera de muestra y se proponen un conjunto de problemas similares a la muestra que tú tienes que resolver.

Debes tener presente que un problema se puede resolver de muchas maneras, de modo que la estrategia que te planteo es sólo una de las maneras y debes tomarla como una sugerencia, mas no como el mejor método ni mucho menos, como el único. En consecuencia, después de resolver un problema debes buscar otros métodos de solución, así incrementarás tus recursos en estrategias, lo óptimo es, con el menor número de recursos obtener el máximo provecho.

Los alcances teóricos que se exponen son lo suficiente para comprender los fundamentos en los que están basadas las estrategias. El texto cuenta, en la mayoría de las veces, con una franja al lado derecho donde se encuentran las definiciones D1*, las aclaraciones* A1*, los ejemplos* E1 *, las observaciones* O1*. y las conclusiones* C1*. Además, en la misma franja, hay, a manera de problemas recreativos, los "Divertijos" y los Retos al Ingenio, así como los comentarios, informaciones sobre temas relacionados a la matemática y algunas Curiosidades. Al final de cada capítulo, encontrarás las claves de respuestas de los problemas propuestos y las soluciones de los "Divertijos" y Retos al Ingenio, así como la biografía de algunos matemáticos de renombre.*

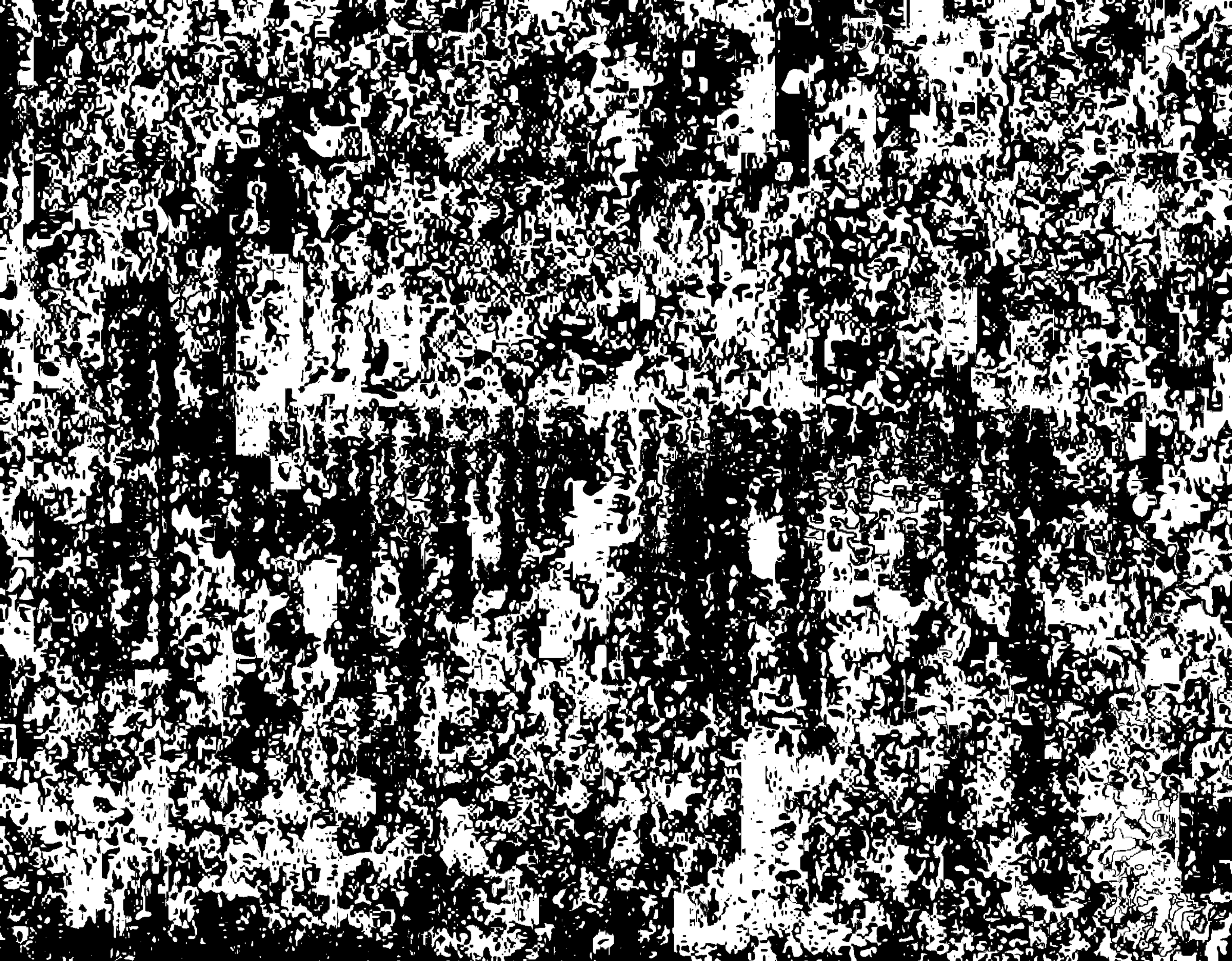
No olvides que la mejor manera de aprender la matemática es resolviendo problemas. Cualquier sugerencia u observación relacionado con el texto te agradeceré me escribas al E-mail de la Editorial que aparece en la página de derechos reservados.

En la elaboración de este libro ha participado el Ing. Javier Hernández, en las correcciones, el Ing. Jorge Flores y el profesor José Pariasca, a quienes debo, por su esfuerzo y dedicación, mi profundo agradecimiento.

HERNÁN HERNÁNDEZ

SIGNOS Y SIMBOLOS

$\in$	Pertenece a
/	Tal que
$\subset$	Está incluido en
ϕ	Conjunto vacío
$\cap$	Intersección
$\cup$	Unión
$>$	Es mayor que
$\geq$	Es mayor o igual que, o no es menor que
$<$	Es menor que
$\leq$	Es menor o igual que, o no es mayor que
$\neq$	Es diferente de
$\Rightarrow$	Si .. entonces; implica
$\Leftrightarrow$	Si, y sólo si
...	Así sucesivamente
$\wedge$	y (conjunción)
$\vee$	o (disyunción)
$\exists$	Existe
a^{o}	Múltiplo de a
$\equiv$	Es aproximadamente igual a
$\|a\|$	Valor absoluto de a
$\mathbb{N}$	Conjunto de números naturales
$\mathbb{Z}$	Conjunto de números enteros
$\mathbb{Q}$	Conjunto de números racionales
$\therefore$	Por lo tanto
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reales
$\mathbb{R}^{+}$	Conjunto de números reales positivos
//	es paralelo a
$\perp$	es perpendicular a
$\angle A$	Angulo A
$m\angle A$	Medida del ángulo A
ΔABC	Triángulo ABC
$\square ABCD$	Cuadrilátero $ABCD$
$\overline{PQ}$	Segmento PQ
PQ	Medida del segmento PQ
$n!$	Factorial de n



CONTENIDO

1. Razonamiento lógico 2
1.1. Razonamiento inductivo 2
1.2. Razonamiento deductivo 12
1.3. Razonamiento transductivo 19
1.4. Razonamiento por analogía 26
1.5. Lógica proposicional 28
1.6. Lógica de clases 39

2. Problemas de opraciones binarias 69
2.1. Operación binaria 70
2.1.2. Propiedades de las operaciones binarias 71
2.1.3. Operadores matemáticos 72
2.1.4. Operaciones de adición y multiplicación 75
2.1.5. ¿En qué cifra termina? 79
2.1.6. Criptoaritmética 83
2.2. Problemas de operaciones combinadas 87
2.2.1. Hallar dos números conociendo la suma y la diferencia 87
2.2.2. Aplicaciones comerciales 90
2.2.3. Problemas de falsa suposición 96
2.2.4. La regla del cangrejo 101
2.2.5. Diferencia unitaria y diferencia total 107

3. Números racionales 135
3.1. Fracciones y decimales 136
3.2. Clasificación y operaciones con fracciones 140
3.3. Mezclas y regla del cangrejo 160
3.4. Reducción a la unidad 166
3.5. Tanto por ciento 170

4.Proporcionalidad 205
4.1. Proporción geométrica 206
4.2. Problemas con edades 212
4.3. Reparto proporcional 216
4.4. Escalas 218
4.5. Regla de tres 221

5. Ecuaciones 245
5.1. Ecuaciones 246
5.2. Ecuaciones cuadráticas 254
5.3. Sistemas de ecuaciones 257
5.4. Planteo de ecuaciones 264
5.5. Problemas sobre edades 272

6. Inecuaciones 293
6.1. La recta numérica 294
6.1.1. Distancia de un punto al origen. Valor absoluto 294
6.2. Intervalos 296
6.3. Desigualdades 297

7. Análisis combinatorio 321
7.1. Factorial de un número 322
7.2. Principios de conteo 323
7.3. Combinaciones y permutaciones 325
7.4. Permutaciones con repetición y permutaciones circulares 328
7.5. Nociones de probabilidad 332

8. Sucesiones y series 347
8.1. Criterios para determinar el término que sigue en una sucesión 349
8.2. Sucesiones polinomiales 351
8.3. Sucesiones o progresiones geométricas 367
8.4. Sucesiones de Fibonacci 370
8.5. Sumatorias 373

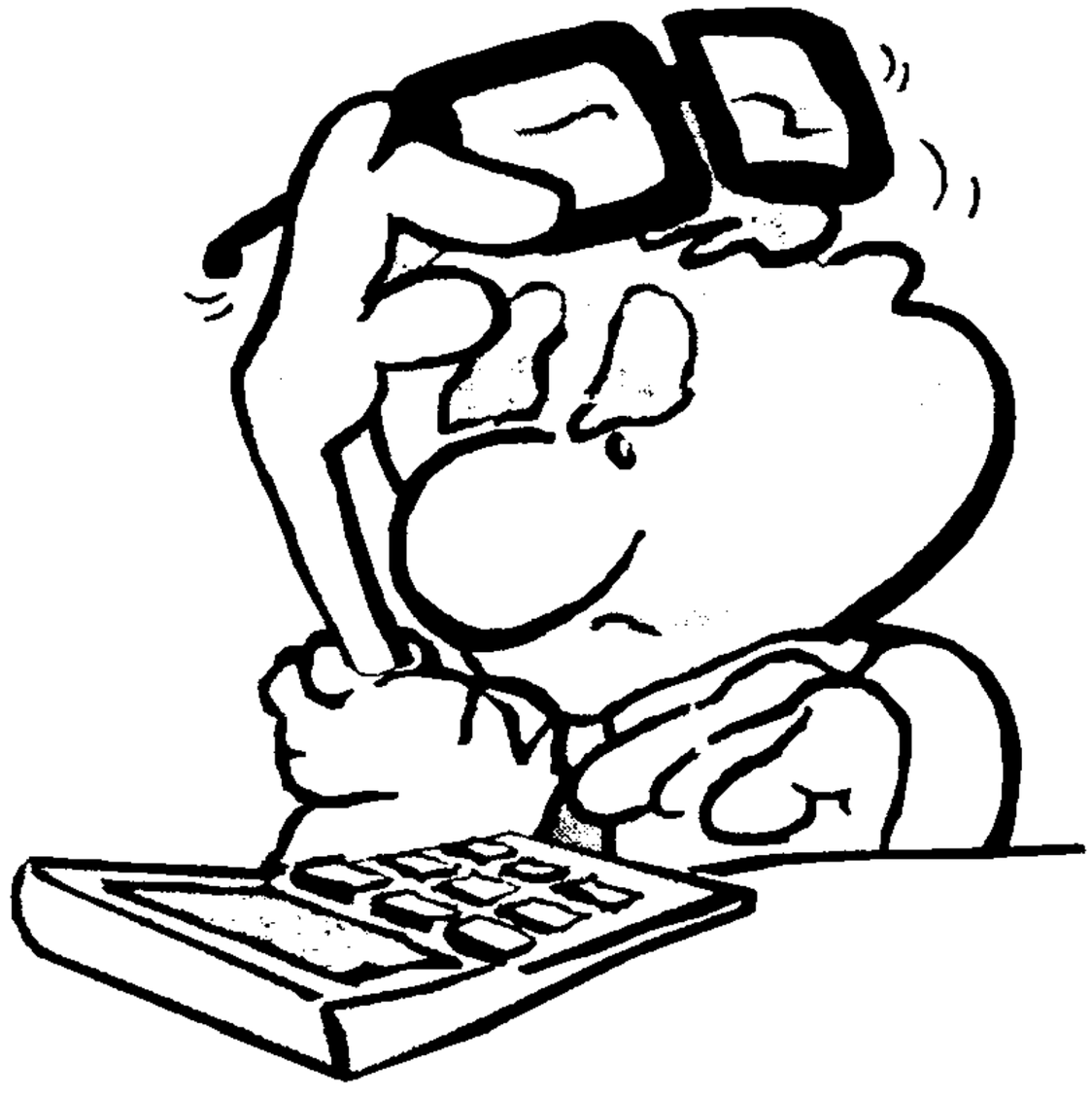
9. Conteo de figuras 393
9.1. El problema de contar 394
9.2. Conteo por enumeración 394
9.3. Por diagrama del árbol 396
9.4. Por inducción 396
9.5. Principio del palomar 398
9.6. Principio de inclusión y exclusión 400
9.7. Aplicaciones de las series en conteo de figuras 401

10. Razonamiento geométrico 411
10.1. Ilusiones ópticas 412
10.2. Visualización en el espacio 415
10.2.1. Isometría 415
10.2.2. Desarrollo de figuras tridimensionales 417
10.3. Simetría 420
10.4. Topología 427
10.5. Rectas, ángulos y triángulos 431
10.6. Perímetros 439
10.7. Areas 440

11.Razonamiento físico geométrico 479
11.1. Movimiento rectilíneo uniforme 480
11.2. Poleas y ruedas 489

12. Elementos de estadística 503
12.1. Conceptos previos 504
12.2. Organización de datos y gráficos estadísticos 505
12.3. Parámetros estadísticos y estadígrafos 510

1 RAZONAMIENTO LOGICO



INTRODUCCION

La lógica estudia el razonamiento.

*El **razonamiento** es un proceso que consiste en obtener una conclusión a partir de ciertas afirmaciones llamadas premisas.*

En este capítulo abordaremos, algunos tipos de razonamiento, de los tantos que hay, y las técnicas que nos permitan obtener conclusiones a partir de las premisas que se tienen al frente y evaluar si es correcta (válida) la conclusión obtenida para las premisas.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para comprender este tema no necesitas más que saber leer y quitarte de la cabeza esas malas ideas de que "la lógica es difícil" o que "la lógica te hace pensar mucho hasta provocarte dolores de cabeza".

1. Razonamiento Lógico

Tres profesionales, un abogado, un físico y un matemático, viajaban por las pampas de Junín. Ya cerca a Carhuamayo vieron a lo lejos una oveja negra pastando de medio lado.

– En Junín todas las ovejas son negras – dijo entusiasmado el abogado levantando la cortina de la ventana del ómnibus.

–En Junín – intervino el físico – al menos existe una oveja negra.

El matemático, que escuchó a los otros con media sonrisa en los labios, decidió intervenir.

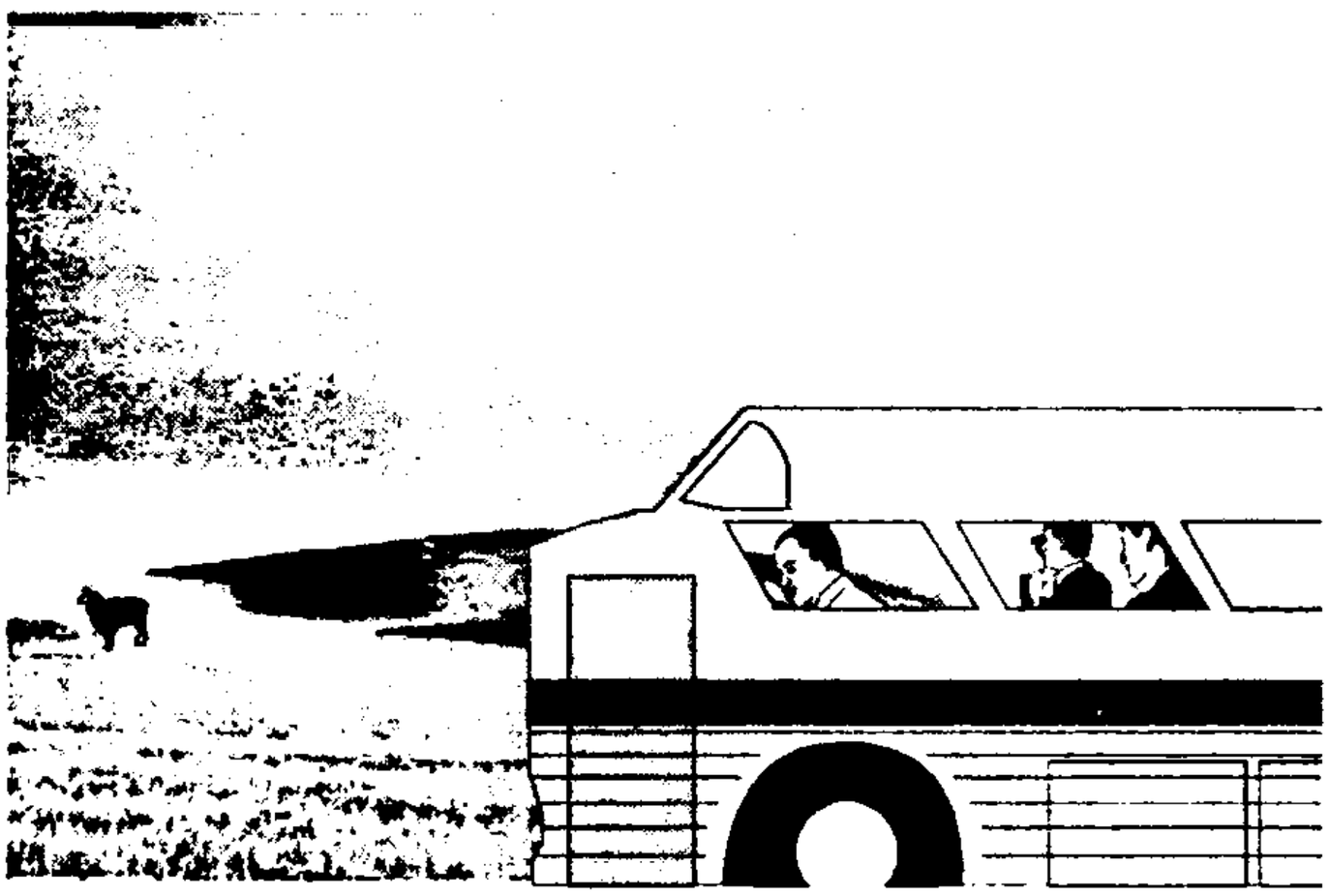
–En Junín al menos existe una oveja que tiene un lado negro.

Al escuchar la afirmación del matemático, los otros dos sólo optaron a mirarse y encogerse de hombros sin pronunciar palabra alguna.

Mi querido lector, según tu opinión, ¿cuál de ellos está en lo correcto?

A partir de la observación de algo o del conocimiento de ciertos hechos llamados *premisas*, podemos elaborar o inferir, mediante un proceso mental llamado *razonamiento*, un nuevo conocimiento llamado *conclusión*.

Este proceso tiene sus propias reglas, de manera que las conclusiones obtenidas no sean antojadizas o trastocadas intencionalmente, sino, una consecuencia natural y **lógica** de sus premisas.



¿Cómo llegar acertadamente de las premisas a la conclusión? ¿Cómo saber si la conclusión obtenida es una consecuencia lógica de sus premisas? Son las preocupaciones fundamentales de la lógica.

Mediante las reglas de la lógica y a partir de un mínimo número suficiente de premisas, se puede construir un nuevo sistema de conocimientos coherentes y sin contradicciones entre sí. Este es el caso de la matemática, o más bien, de los sistemas matemáticos, que a partir de ciertas premisas llamadas *axiomas*, se construyen todo un sistema complejo de conocimientos que luego tienen aplicabilidad en los diversos campos del conocimiento humano.

1.1. Razonamiento Inductivo

Una multiplicación como $(9 + 2)(9 - 2)$ se efectúa empezando por las operaciones entre paréntesis:

$$(9 + 2)(9 - 2) = (11)(7) = 77$$

Sin embargo, bajo ciertas condiciones, el proceso se puede seguir de otro modo.

Por ejemplo:

$$(9 + 2)(9 - 2) = 9^2 - 2^2 = 81 - 4 = 77$$

¿Cómo saber que esto funciona con todas las operaciones que tengan una estructura semejante?. Probemos con otros números, pero manteniendo la forma.

$$(15 + 2)(15 - 2) = 15^2 - 2^2 = 225 - 4 = 221$$

$$(35 + 1)(35 - 1) = 35^2 - 1^2 = 1225 - 1 = 1224$$

$$(101)(99) = (100 + 1)(100 - 1) = 10000 - 1 = 9999$$

Puedes comprobar, por el método común, que los resultados son correctos en todos los casos. ¿Podemos, entonces, asegurar que cualquiera sean dos números a y b, la relación:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

es correcta?

Sí. Cualesquiera sean los números a y b, siempre se cumple la igualdad anunciada. Es posible, además, demostrar mediante las reglas del álgebra, que esta relación es genérica. No es para preocuparte. Lo veremos más adelante.

El proceso que hemos seguido para llegar de los ejemplos particulares a la generalización, se llama INDUCCIÓN. (G1)

Las cuestiones de la teoría de la inducción son bastante amplias(G2). No es el objetivo del presente trabajo abordarlos. Más bien plantearemos un conjunto de problemas cuya solución se puede hallar por la vía de la inducción.

(G1) *Inducción*

(Del latín "inductivo": conducción a o hacia). Como forma de razonamiento, la inducción hace posible el paso de los hechos singulares a los principios generales.

Problema 1

¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$$\sqrt[32]{3 \times (2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) + 1}$$

Resolución

Método (1)

Se observa que el exponente de 2 se va duplicando. El índice del radical (32) es el doble del último exponente de 2. Además, el factor 3 del radicando se puede expresar como $(2^1 + 1)$.

(G2)

Algo más sobre inducción.

Se distinguen tres tipos fundamentales de razonamiento inductivo:
Inducción completa; inducción por simple enumeración (inducción en el sentido ordinario); e inducción científica (los dos últimos tipos constituyen la inducción incompleta).

• Particularicemos para dos factores del radicando.

$$\sqrt[4]{(2^1+1)(2^2+1)+1} = \sqrt[4]{3\cdot 5+1} = \sqrt[4]{16} = 2$$

• Ahora probemos para tres factores del radicando.

$$\sqrt[8]{(2+1)(2^2+1)(2^4+1)+1} = \sqrt[8]{3\cdot 5\cdot 17+1}$$

$$\sqrt[8]{256} = 2$$

• Por consiguiente podemos inducir que:

$$\sqrt[32]{3\cdot(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1} = \boxed{2}$$

Método (2)

Podemos aprovechar la relación $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ que hemos establecido al inicio del tema. El factor 3 es igual a 1×3. Además 1×3 se puede expresar como $(2-1)(2+1)$, cuyo resultado sería $(2-1)(2+1)=2^2-1$.

Expresando el radicando apropiadamente:

$$\sqrt[32]{\underbrace{(2-1)(2+1)}_{(2^2-1)}(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1}$$

$$= \sqrt[32]{\underbrace{(2^2-1)(2^2+1)}_{(2^4-1)}(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1}$$

$$= \sqrt[32]{(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1}$$

Así sucesivamente:

$$= \sqrt[32]{(2^{16}-1)(2^{16}+1)+1}$$

$$= \sqrt[32]{(2^{32}-1)+1} = \sqrt[32]{2^{32}} = 2$$

Rpta.: 2

G2

La inducción completa consiste en inferir un principio general acerca de la clase en su conjunto partiendo del examen de todos sus elementos; proporciona una conclusión fidedigna,pero su esfera de aplicación es limitada, pues sólo es aplicable a clases cuyos miembros, por su número, sean fácilmente observables. Cuando las clases son prácticamente ilimitadas, se aplica la inducción incompleta. En el caso de la inducción en el sentido corriente, la presencia de un carácter cualquiera en parte de los elementos de la clase, sirve de fundamento para llegar a la conclusión de que todos los elementos de la clase dada poseen el carácter de referencia. La inducción en sentido ordinario tiene una esfera de aplicación ilimitada, pero sus conclusiones forman sólo proposiciones probables, necesitadas de una subsiguiente demostración.

La inducción científica también representa una conclusión inferida de una parte de los elementos de la clase dada y aplicada a toda la clase, pero en este caso lo que sirve de fundamento a la conclusión es el descubrimiento –en los elementos de la clase investigados– de conexiones esenciales, que condicionan de manera necesaria la pertenencia del rasgo dado a toda la clase.

Problemas

1. Hallar el resultado de la siguiente operación.

$$\sqrt{8(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)+1}$$

A) 3 **B)** 3^{32} **C)** 3^{16} **D)** $3^{32}+1$ **E)** 2^{32}

2. ¿Cuál el resultado de reducir la siguiente expresión?

$$\sqrt[16]{(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)(a^8+1)(a^{16}+1)+1}$$

A) a **B)** a^2 **C)** a^4 **D)** a^8 **E)** a^{16}

3. Hallar el resultado de efectuar las operaciones en la siguiente expresión:

$$\sqrt[n]{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\ldots(x^{2^n}+1)+1}$$

A) x^{4n} **B)** x **C)** x^n **D)** x^{2n} **E)** x^4

4. Reducir la siguiente expresión:

$$(a+1)(a^2+1)(a^4+1)(a^8+1)+\ldots+(a^{2^k}+1)$$

A) a^{4k} **B)** $a^{4k}-1$ **C)** $\dfrac{a^{4k}-1}{a+1}$ **D)** $\dfrac{a^{4k}-1}{a-1}$ **E)** $\dfrac{a^{2k}-1}{a-1}$

Problema 2

Calcular el resultado de la siguiente operación.

$$\sqrt{999998000001}$$

Resolución

Se puede notar que hay cinco nueves a la izquierda de 8 y cinco ceros a la derecha de 8. Podríamos probar con un nueve a la izquierda de 8 y un cero a la derecha de 8. De obtener un resultado "sospechoso" probaríamos para dos nueves y dos ceros a los costados de 8.

Inducción e Investigación Científica

Martin Gardner, en un comentario algo jocoso se refiere a la inducción como "el curioso procedimiento por el cual los científicos, tras observar que algunas avestruces lucen largos cuellos, concluyen que todas las avestruces tendrán asimismo cuellos largos".

(Continúa en la siguiente página)

Particularizando:

$\sqrt{9801} = 99$ ⇦ Porque $99^2 = 9801$

Para $\sqrt{998001}$ sospechamos que debería resultar *999*. Pero en lugar de probar sacando la raíz cuadrada de *998001*, que es más laborioso, probemos si 999^2 es igual a *998001*. Efectivamente, lo es. Por consiguiente:

$\sqrt{998001} = 999$ ⇦ Porque $999^2 = 998001$

De estos dos casos particulares ya podemos generalizar, aunque sería recomendable cerciorarse con 9999^2, cuyo resultado de la operación es:

$$\sqrt{999998000001} = \sqrt{999999^2} = \boxed{999999}$$

Un científico observa algún fenómeno en busca de indicios y pistas que le permita formarse conjeturas o hipótesis probables acerca de las leyes que rigen su comportamiento. Las conjeturas son comprobadas mediante experimentos. Se van desechando las erróneas y afinando las correctas, hasta descubrir la ley, que luego es aplicada en beneficio del hombre. Una forma de procedimiento como éste es ***inductivo****.*

Problemas

1.- Hallar el resultado de:

$$\sqrt{12345678987654321}$$

Dar como respuesta la suma de cifras del resultado:

A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

2. Hallar es la raíz cuadrada de

$$444444443555555556$$

¿Cuál de las alternativas representa la suma de cifras del resultado?

A) 42 **B)** 48 **C)** 54 **D)** 60 **E)** 36

3. Efectuar y calcular la suma de cifras del resultado de:

$$\sqrt{\underbrace{444\ldots44}_{120\ cfs}\underbrace{222\ldots2225}_{121\ cfs}}$$

A) 725 **B)** 600 **C)** 625
D) 650 **E)** 840

4. Hallar el resultado de la siguiente operación e indicar la suma de cifras del resultado.

$$\sqrt{\underbrace{1111\ldots1}_{n\ cfs}\underbrace{555\ldots56}_{(n-1)\ cfs}}$$

A) $3n+1$ **B)** $3n+4$ **C)** $3n$
D) $3n+5$ **E)** $3n-2$

5. Efectuar la siguiente operación y dar como respuesta la suma de cifras del resultado:

$$(\underbrace{666\ldots666}_{201\ cifras})^2$$

A) 1654 **B)** 2120 **C)** 1500
D) 1803 **E)** 1809

6. Hallar la suma de cifras del resultado de efectuar la siguiente operación:

$$(\underbrace{333\ldots3337}_{300\ cifras})^2$$

A) 1608 **B)** 1807 **C)** 1780
D) 1870 **E)** 1087

Problema 3

Hallar el resultado de efectuar la siguiente operación:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

(Los puntos suspensivos indican "así sucesivamente". Se utiliza para no escribir todos los números que deben ir en ese tramo).

Resolución

METODO (1)

Haciendo uso del método inductivo, hallaremos el resultado para dos sumandos, luego para tres, etc., buscando en cada caso una regularidad en el resultado, que nos permita hacer una generalización. Ah!. Para comprender este problema debes darle una repasada a la suma y resta de fracciones heterogéneas, en caso de que no recuerdes.

Para dos sumandos: $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

Sospechamos que el resultado es una fracción cuyos términos son los factores del denominador del último sumando. Veamos si el vaticinio se cumple para tres sumandos:

Para tres sumandos: $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$

Se comprueba que se cumple. Por consiguiente podemos generalizar:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}\quad\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\boxed{\frac{n}{n+1}}$$

METODO (2)

Otro método de resolución es descomponiendo las fracciones. La fracción $\frac{1}{1\times 2}$ *se puede expresar como:* $\frac{1}{1\times 2}=1-\frac{1}{2}$. *La fracción* $\frac{1}{2\times 3}$ *como* $\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$. *Así sucesivamente.*

Descomponiendo las fracciones:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ \ldots\ +\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Reordenando apropiadamente:

$$1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\ \ldots\ +\left(-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}\right)+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}$$

El resultado de cada paréntesis es igual a cero. Sólo quedan:

$$1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}\ =\ \boxed{\frac{n}{n+1}}$$

Problemas

1.- ¿Cuál es el resultado de efectuar la siguiente adición?

$$\frac{2}{1\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+\frac{2}{5\times 7}+\ldots+\frac{2}{101\times 103}$$

A) $\frac{101}{103}$ **B)** $\frac{202}{103}$ **C)** $\frac{101}{206}$

D) $\frac{103}{101}$ **E)** $\frac{102}{103}$

2. Calcular el resultado de efectuar:

$$\frac{5}{1\times 2}+\frac{5}{2\times 3}+\frac{5}{3\times 4}+\ldots+\frac{5}{n(n+1)}$$

A) $\frac{5n}{n+1}$ **B)** $\frac{5(n+1)}{n}$ **C)** $\frac{5}{n}$

D) $\frac{n+1}{5n}$ **E)** $\frac{5}{n+1}$

3.- ¿Cuál es el resultado de efectuar

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{2}{2\times 4}+\frac{3}{4\times 7}+\ldots+\frac{20}{191\times 211}?$$

A) $\frac{211}{210}$ **B)** $\frac{210}{223}$ **C)** $\frac{191}{211}$

D) $\frac{209}{210}$ **E)** $\frac{210}{211}$

4.- Luego de efectuar la adición.

$$\frac{1}{21\times 23}+\frac{1}{23\times 25}+\frac{1}{25\times 27}+\ldots+\frac{1}{333\times 335}$$

El resultado es:

A) $\frac{157}{335}$ **B)** $\frac{333}{335}$ **C)** $\frac{331}{335}$

D) $\frac{331}{670}$ **E)** $\frac{157}{7035}$

5.- Reducir la siguiente expresión e indicar el resultado

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{8192}$$

A) 2 **B)** $\frac{16383}{8192}$ **C)** $\frac{8193}{8192}$

D) $\frac{8192}{8193}$ **E)** $\frac{16383}{8193}$

6.- Luego de efectuar la siguiente adición se obtiene:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots+\frac{1}{3^n}$$

A) $\frac{3^{n+1}-1}{3^n}$ **B)** $\frac{3^{n+1}-1}{3^n-1}$ **C)** 3^n

D) $\frac{3^{n+1}-1}{2\cdot 3^n}$ **E)** 3^n-1

La inducción en las sucesiones numéricas y el conteo de figuras

Una secuencia ordenada de números se llama SUCESIÓN NUMÉRICA. Cada número de la secuencia se obtiene de acuerdo a una regla. La regla se puede expresar mediante una fórmula, aunque no siempre. Descubriendo la regla se puede calcular el número correspondiente a un lugar cualquiera de la secuencia.

Hay muchas técnicas para descubrir la regla. Una de estas técnicas es la inducción. Veamos sin más preámbulos en qué consiste esto.

Problema 4

En la siguiente secuencia de números, debemos calcular el número correspondiente al vigésimo quinto lugar de la secuencia.

1°	*2°*	*3°*	*4°*		*25°*
↓	↓	↓	↓		↓
7;	*10;*	*13;*	*16;*	.....	*?*

Resolución

> *Se trata de descubrir la regla que rige para obtener cada número (término) de la secuencia. En general, para un número cualquiera n que indica la posición del término.*

- Para obtener 10 se le agrega 3 al 7: **7 + 3 = 10**
- Para obtener 13 se le agrega 2 veces 3 al 7: **7 + 2 · 3 = 13**
- Para obtener 16 se le agrega 3 veces 3 al 7: **7 + 3 · 3 = 16**

A partir de estas observaciones particulares debemos buscar generalizar diciendo: ¿cómo obtendría el quinto término?. Luego, el séptimo, el décimo, así sucesivamente hasta el enésimo.

Lugar del Término	**Término Correspondiente**
1°	**7 + 0 · 3**
2°	**7 + 1 · 3**
3°	**7 + 2 · 3**
4°	**7 + 3 · 3**
⋮	⋮
n°	**7 + (*n* – 1) · 3**

> *Si se quiere obtener el quinto término, hay que agregar al primero cuatro veces tres. Esto es, si el término que se quiere obtener es del lugar n°, entonces hay que sumarle al primer término (n – 1) veces tres.*

En consecuencia, la fórmula que representa la regla bajo la cual se obtiene cada término es: $7+(n-1)\cdot 3 = 7+3n-3 = 3n+4$

Fórmula general : *3n + 4*

Una vez obtenida la fórmula general, para obtener el término del quinto lugar, basta sustituir n por 5:

$$3(5)+4=19$$

Puedes comprobar que para $n = 1$ se obtiene al primer término. Para $n = 2$ el segundo término; para $n = 3$, el tercero, etc.

Para obtener el vigésimo quinto término, será suficiente sustituir n por 25 en la fórmula general:

$$3(25)+4=79$$

Problemas

1.- Para cada una de las siguientes sucesiones determina la fórmula general.

a) 5; 9; 13; 17; ..... ☐

b) 8; 13; 18; 23; ..... ☐

c) 1; 7; 13; 19; ..... ☐

d) 15; 12; 9; 6; ..... ☐

e) 1; 2; 4; 8; 16; ..... ☐

2.- Representemos con t_n el término correspondiente al lugar enésimo de la sucesión. Por ejemplo, t_5 representa el quinto término de la sucesión.

En cada una de las siguientes sucesiones, determina el término del lugar indicado:

a) 10; 12; 14; 16; 18 .....; t_{50}

b) 1; 7; 13; 19; .....; t_{60}

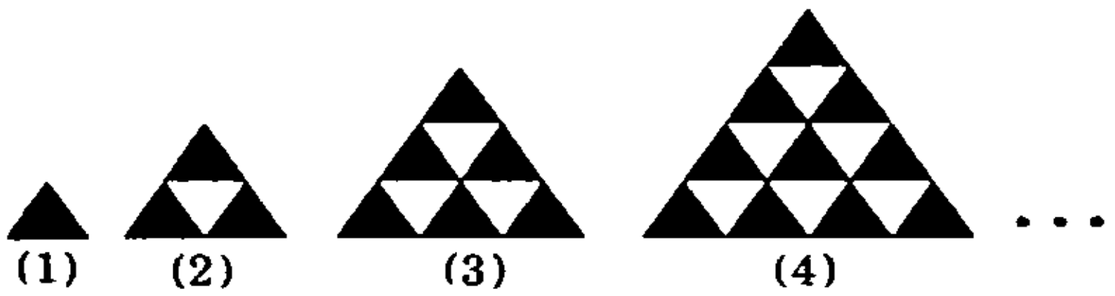
c) 1; –5; 9; –13; 17; –21; .....; t_{36}

d) 1; 3; 9; 27; .....; t_{70}

e) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}$; .....; t_{48}

Problema 5

¿Cuántos triangulitos negros habrá en la posición 100 de la siguiente figura?



Resolución

El problema es similar a calcular la fórmula general de una sucesión numérica. Los números que indican el número de triangulitos negros en cada posición, forman una sucesión numérica cuya fórmula general debemos hallar.

Posición:	(1)	(2)	(3)	(4)	.....
N° Triangulitos negros:	1	3	6	10	.....

En este caso, los números **1; 3; 6; 10; ...**, no se obtienen agregando la misma cantidad al anterior como ha sido en el caso del problema 4.

Tenemos que buscar alguna particularidad que nos permita descubrir la regla general.

Se observa que el número **3** de la segunda posición es igual a **1 + 2** que son los números que indican las dos primeras posiciones.

El número de la tercera posición es la suma de los números que indican las tres primeras posiciones: **1 + 2 + 3 = 6**

Esquemáticamente:

Posición

1° $1 = 1$

2° $3 = 1 + 2$

3° $6 = 1 + 2 + 3$

⋮

100° $t_{100} = \underline{1} + \underline{2} + \underline{3} + 4 + \ldots + \underline{98} + \underline{99} + \underline{100}$

101

101

101

⋮

Divertijo 1

Después de muchos días de ir de mi casa a la oficina, llegué a percatarme que normalmente tardo 80 minutos; pero si voy con corbata me tardo 1 hora 20 minutos

¿Hay alguna razón para ello?

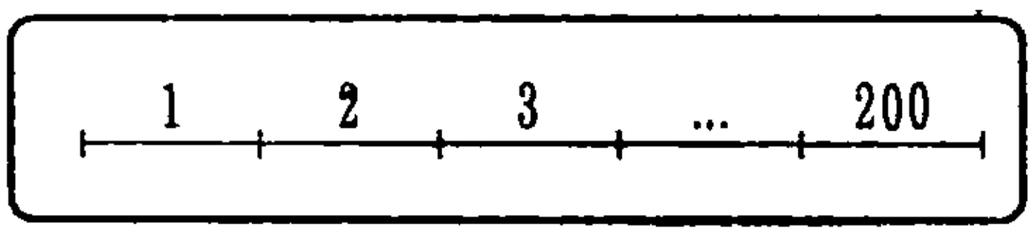
Para sumar hemos emparejado los términos equidistantes del centro. Cada pareja suma 101. Como son 100 números hacen 50 parejas.

Por consiguiente la suma es igual a:

$$t_{100} = 50 \times 101 \Rightarrow \boxed{t_{100} = 5050}$$

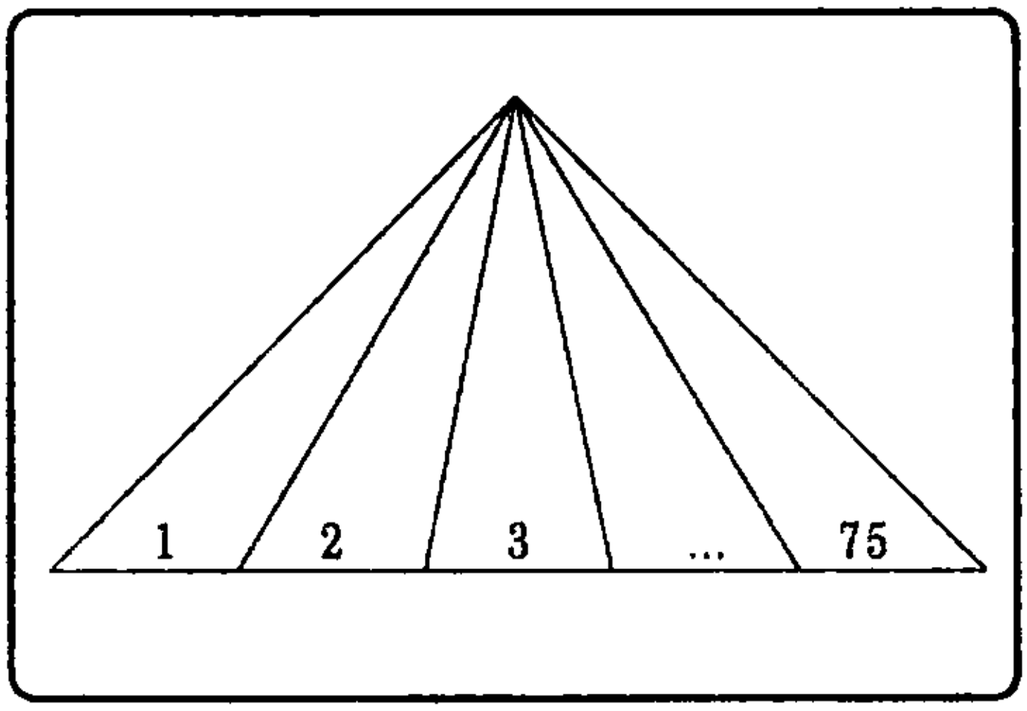
Problemas

1. ***¿Cuál es el máximo número de segmentos que se puede contar en la siguiente figura?***



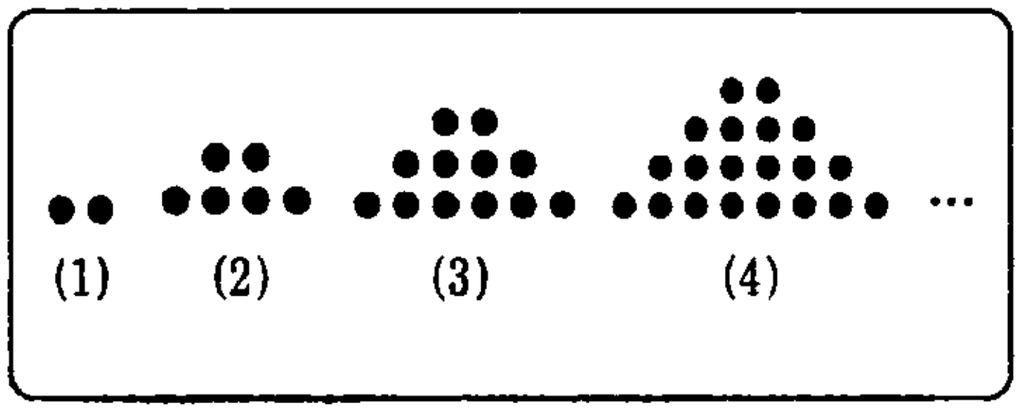
A) 20 000 **B)** 2 100 **C)** 20 100
D) 2050 **E)** 20 200

2. ***¿Cuántos triángulos se pueden contar como máximo en la siguiente figura?***



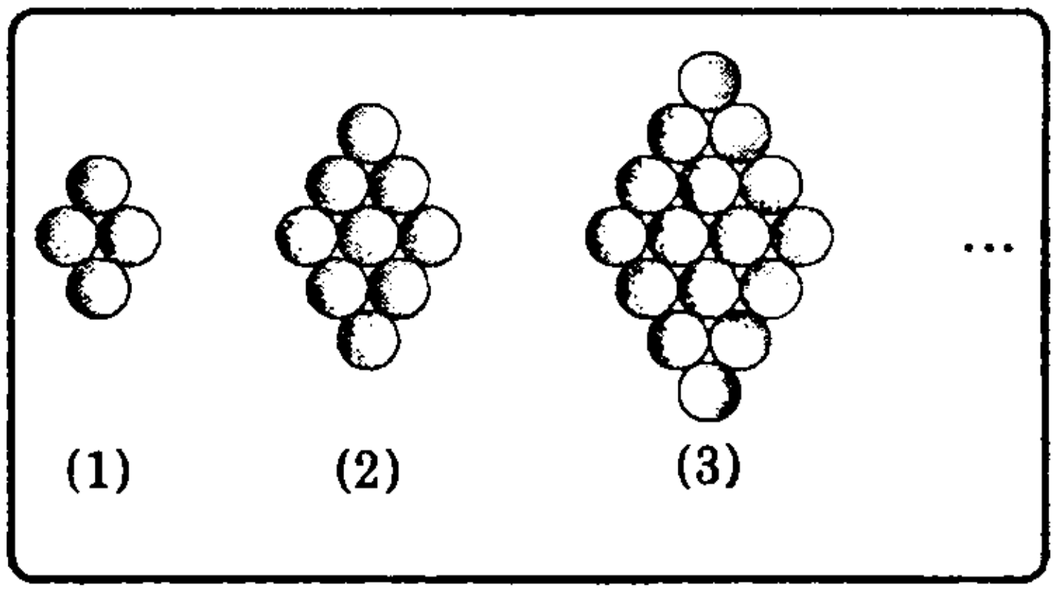
A) 3 825 **B)** 3 280 **C)** 3 425
D) 2 850 **E)** 3 600

3. ¿Cuántos puntos hay en la posición 500 de la siguiente secuencia?



A) 25 450 **B)** 40 050 **C)** 200 500
D) 250 600 **E)** 250 500

4. Carmen ha estudiado el oficio de decoradora con globos. Ella hace una serie de hermosos arreglos con los globos. También es aficionada a los números y se le ha ocurrido hacer arreglos bajo la secuencia mostrada. Ella se pregunta cuántos globos necesitaría para el arreglo de la posición 50 ¿Podrías ayudarle?



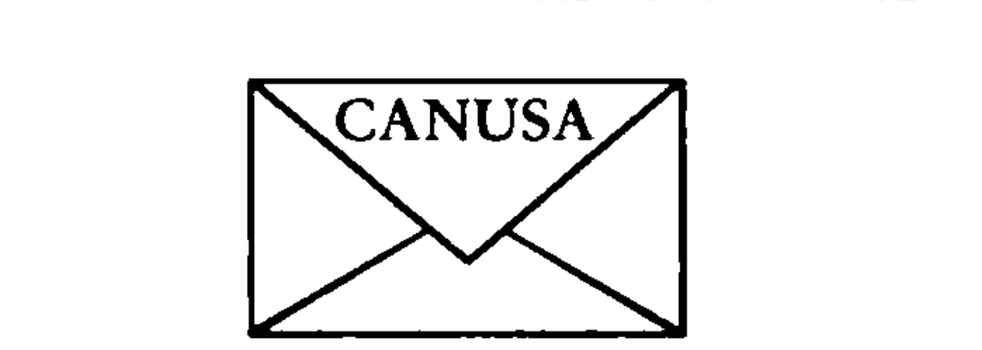
A) 2 500 **B)** 2 601 **C)** 3 600
D) 2 540 **E)** 2 820

1.2. Razonamiento deductivo

El término **deducción** proviene del latín "deductivo", que significa *acción de conducir* ["ducere"] *a partir de*. Consiste en demostrar u obtener una aseveración partiendo de una o varias aseveraciones (premisas) y aplicando las leyes de la lógica.

Problema 1

Tres cartas en sobre cerrado, para las compañías AVISA, BICUSA y CANUSA están a punto de ser enviadas. La secretaria, muy descuidada ella, se percata que ha metido las cartas en sobres que no corresponden al destinatario. El jefe, al verla preocupada, le dijo que no importaba, sólo quería saber qué carta contenía cada sobre. La secretaria por cierto muy inteligente resolvió abriendo el menor número de sobres. ¿Cuántos abrió?.



Resolución

El sobre con el nombre de una empresa no contiene la carta de esa empresa, sino, la de una de las otras dos.

Tenemos las siguientes posibilidades.

Sobres:

	1	2	3
Contiene :	*BICUSA* o *CANUSA*	*AVISA* o *CANUSA*	*AVISA* o *BICUSA*

Supongamos que abre el sobre (1) y halla la carta para BICUSA. ¿Qué carta contiene el sobre 3? La carta para AVISA, porque la de BICUSA la tiene el sobre (1). El sobre (2) contiene la carta para CANUSA porque la de AVISA la tiene el sobre (3).

Así hemos obtenido el contenido de cada sobre abriendo uno solo. **Rpta.: 1**

Problemas

1.- Tres cajas contienen: una dos bolas blancas, otra dos bolas negras y la tercera una bola blanca y una bola negra. Los contenidos están indicados en etiquetas BB, NN, BN que han sido equivocadamente pegadas, de suerte que ninguna de las cajas lleva la etiqueta que le conviene.

Para restituir a cada caja la etiqueta que le corresponde se le permite a uno entreabrir una caja, sólo el tiempo necesario para ver una bola. ¿Cómo procede?

2. Los señores Pardo, Verde y Rojo estaban almorzando juntos. Uno de ellos llevaba una corbata parda, otro una verde y otro, una corbata roja.

"Se han dado cuenta" dijo el señor de la corbata verde, "de que aunque nuestras corbatas son de colores iguales a nuestros nombres, ninguno de nosotros lleva la corbata que correspondería a su nombre".

"¡Por dios que tienes razón!", exclamó el señor Pardo. ¿De qué color era la corbata de cada uno?

M. Gardner

Problema 2

Estaban reunidas, Ana, Betty y Carla

Ana le decía a la profesora que la otra amiga es obstetriz. Betty le decía a la obstetriz, que estaba de vacaciones. Si entre ellas, una es profesora, la otra obstetriz y la última abogada, aunque no necesariamente en este orden; ¿Cuál es la profesión de cada una?

Resolución

- **"Ana le decía a la profesora que la otra amiga es obstetriz"**

De esta frase se deduce que Ana no es profesora ni obstetriz.

	Profesora	Abogada	Obstetriz
Ana	X		X
Betty			
Carla			

⇨

	Profesora	Abogada	Obstetriz
Ana	X	✓	X
Betty		X	
Carla		X	

*** "Betty le decía a la obstetriz..."**

De esta frase se deduce que Betty no es obstetriz.

	Profesora	Abogada	Obstetriz
Ana	X	✓	X
Betty		X	X
Carla		X	

⇨

	Profesora	Abogada	Obstetriz
Ana	X	✓	X
Betty	✓	X	X
Carla	X	X	✓

Rpta.: Ana es Abogada; Betty Profesora y Carla, Obstetriz

Problema 3

Cuando asistía a una reunión, me presentaron los señores Barbón, Lampio, Cano y Rubio. Entre ellos hay un fotógrafo, un médico, un taxista y un contador. De ellos recuerdo los siguientes datos:

1. *El señor Barbón y el taxista son viejos amigos.*
2. *El médico y el contador conocieron en esta reunión al señor Rubio.*
3. *El señor Lampio ni el señor Cano saben conducir.*
4. *El médico y el señor Cano son compadres.*

¿Quién es médico?

Resolución

Según 1,2,3 y 4 obtenemos

	Fotóg.	Méd.	Tax.	Cont.
Barbón			X	
Lampio			X	
Cano		X	X	
Rubio		X		X

⇨

	Fotóg.	Méd.	Tax.	Cont.
Barbón			●	
Lampio			●	
Cano		●	●	
Rubio	X	●	✓	X

De (1): Barbón y taxista (Rubio) son viejos amigos

De (2): El médico y el contador recién conocen a Rubio

¿Puede Barbón ser médico o contador? No. Porque como amigos, ya se conocían con Rubio.

Luego:

	Fotóg.	Méd.	Tax.	Cont.
Barbón		●	X	●
Lampio			X	
Cano		X	X	
Rubio	X	X	V	X

	Fotóg.	Méd.	Tax.	Cont.
Barbón	V	X	X	X
Lampio	X	V	X	X
Cano	X	X	X	V
Rubio	X	X	V	X

Rpta.: El señor Lampio.

Problemas

1. Valentín y otros cuatro clientes de un banco se enteraron consternados de que, por no haber leído la letra pequeña de los folletos en que se describían sus cuentas respectivas, habían dejado que su saldo descendiese demasiado, dando así motivos para que les cargasen mensualmente una cantidad, distinta para cada uno de ellos, pero expresadas todos en números enteros. A partir de las pistas siguientes, intente averiguar el nombre completo de esas cinco personas (una de ellas se apellida Carreras), su tipo de cuenta y los cargos mensuales.

1. El apellido de Rosa no es Belmonte.

2. A Enrique le cargan doscientos soles menos que al que tiene la supercuenta y cuatrocientos soles más que al de la cuenta corriente.

3. La señora Codina no es la que tiene la libreta de ahorros.

4. Torrente no tiene la supercuenta.

5. A Humberto le cargan mil seiscientos soles, a Marín ochocientos. De los otros tres, a Engracia le cargan menos que al de la cuenta de crédito y más que a Belmonte.

6. El cargo del que tiene la cuenta de crédito no es el más alto, y el de Belmonte no es el más bajo.

¿Cuál es la cuenta y el apellido de la señora Rosa?

A) Belmonte, libreta de ahorros
B) Codina, cuenta corriente
C) Marín, libreta de ahorros
D) Marín, cuenta de crédito
E) Marín, cuenta corriente

2. Cuatro hermanas pasaron una tarde preparando conservas para el invierno. Cada una enlató cuatro alimentos distintos, y ninguno de éstos fue puesto en conserva por más de dos mujeres. Basándose en la información siguiente, ¿podrías determinar lo que enlató cada una de las hermanas?

1. Andrea enlató peras.

2. Tere enlató judías, pero no guisantes.

3. Martha preparó compota de fresas, su dulce preferido para el desayuno.

4. Ninguna de las que enlataron maíz en-

lataron también zanahorias.

5. *Leonor no fue una de las hermanas que preparó pepinillos en vinagre.*
6. *Sólo una de las hermanas que enlató maíz enlató también guisantes. Andrea no hizo ni lo uno ni lo otro.*
7. *Tanto Martha como Leonor prepararon melocotones.*
8. *Ninguna se decidió a la vez por los pepinillos en vinagre y la compota de fresas.*
9. *Martha no enlató zanahorias.*

¿Señalar a la hermana que enlató maíz y peras. Además las otras dos conservas?

A) Andrea: maíz, judías

B) Tere: judías pepinillos

C) Leonor: judías y apellidos

D) Tere: judías y fresas

E) Tere: fresas y pepinillos

3. ***Muchos sellos de Correos rinden homenajes a nuestros hombres y mujeres célebres. Por ejemplo, los pintores han visto sus obras reproducidas en los sellos. Apoyándose en las pistas siguientes, ¿podrías determinar el valor de los sellos que mencionamos y los nombres de las personas a los que están dedicados? (Nota: Los sellos que describimos no corresponden a los emitidos realmente por el servicio de Correos. Han sido inventados exclusivamente para este problema.)***

1. *El sello de Salvador Dalí cuesta dos soles menos que el de Concha Espina y siete soles menos que el de Rosalía de Castro.*
2. *El sello de Pablo Picasso cuesta dos soles más que el de Miguel Fleta y siete soles menos que el de Emilio Castelar.*
3. *El sello de Jacinto Benanavente cuesta dos soles más que el de Manuel de Falla y siete soles más que el de Concha Espina.*
4. *El sello de Agustina de Aragón cuesta siete soles más que el de Pablo Picasso.*
5. *Tres de los sellos son de quince soles y hay por lo menos dos de cada uno de los otros valores.*

¿Quienes tienen sellos de 8 soles?

A) Concha Espina y Pablo Picasso

B) Concha Espina, Pablo Picasso y Salvador Dalí

C) Agustina de Aragón y Pablo Picasso

D) Miguel Fleta y Pablo Picasso

E) Miguel Fleta y Salvador Dalí

4. ***Un sábado, Chema y cuatro de sus amigos fueron a las atracciones instaladas en la plaza de su pueblo. Cada uno disponía de una cantidad distinta de dinero, mil soles como mínimo, pero no más de dos mil. Basándose en las pistas siguientes, trate de descubrir la cantidad que tenía cada chico y la cantidad que gastó. (Todas las cantidades son múltiplos de cien.)***

1. *El chico que gastó mil cien soles gastó doscientos más de las que le quedaron.*
2. *Dani gastó dos veces más de lo que le quedó.*
3. *Tito, Paco y Santi gastaron exactamente la mitad de lo que tenían.*
4. *Uno de los chicos empezó con un número impar de cientos de soles.*
5. *Dani gastó la misma cantidad que tenía al principio Santi.*
6. *Tito gastó cien soles más que Santi.*
7. *Paco empezó con ochocientos soles más de lo que le quedó a otro de los chicos.*

¿Señala cuánto tenía Tito y cuánto gastó?

A) 1 000 y 500
B) 2 000 y 1 100
C) 1 200 y 700
D) 1 400 y 700
E) 1 200 y 600

5. La princesa de Groenlandia y otras tres princesas han sido raptadas por cuatro feroces dragones. Afortunadamente, cuatro príncipes valientes, incluido el príncipe Natanael, acuden a rescatarlas. Uno de ellos es el príncipe de Eslavonia. Partiendo de las pistas siguientes, ¿podrías emparejar cada princesa (y su reino) con el dragón escupidor de fuego que la capturó y el príncipe y su reino que la rescato?.

1. La princesa Eleonora, que fue rescatada por el príncipe de Laponia, no fue capturada por el dragón llamado Brujo.
2. El príncipe de Estonia luchó contra el dragón llamado Shrayik.
3. El Príncipe Godofredo rescató a la princesa de Curlandia.
4. La princesa Floramunda fue la cautiva del dragón llamado Trollkarl.
5. Winifreda es la princesa de Islandia.
6. El príncipe Leonardo rescató a la princesa Rosalinda.
7. El príncipe Adalberto vive en Polonia.
8. El dragón llamado Gespent capturó a la princesa de Brucelandia.

¿Quien rescató a la princesa Floramunda y qué dragón la capturó?

A) Leonardo, Brujo
B) Natanael, Gespend
C) Godofredo, Trollkarl
D) Godofredo, brujo
E) Godofredo, Shrayik

6. La semana pasada, la compañía Elko ofreció una cena-homenaje a Máximo, Cecilia y a otros tres de sus empleados que abandonaban sus puestos por diversos motivos. Basándose en las pistas siguientes, averigüe el nombre completo de los homenajeados (uno se apellida Posada), el número de años que llevan trabajando para la compañía (esos números son todos diferentes) y el motivo por el que abandonan su puesto actual.

1. El empleado que lleva menos tiempo en Elko, diez años, ha recibido una propuesta de otra empresa.
2. Fernando lleva en Elko cinco años más que Carol, que ha trabajado para la compañía el doble de tiempo que el señor Nieto.
3. Ramona y Manuela han ascendido dentro de la misma empresa.
4. Verdaguer lleva en la compañía el doble de años que Ursula, la cual ha pasado en Elko cinco años más que uno de los otros empleados.
5. Los que llevan más tiempo en Elko, ninguno más de cincuenta años se jubila .

¿Señale el tiempo que trabajó Cecilia y la razón de abandono de Elko?

A) 30 años, Ascenso
B) 30 años, Traslado
C) 20 años, Jubilación
D) 15 años, Traslado
E) 30 años, Jubilación

Problema 4

Los habitantes de la ciudad VM están divididos en dos barrios: los "arribeños" y los "abajiños".

Ellos hablan un extraño dialecto, sin embargo, algunos hablan el español. Los arribeños contestan siempre con una mentira cualquier pregunta que se las formule, en cambio, los abajiños siempre dicen la verdad. Pero todos ellos son muy amables.

Cuando llegó un turista a VM, fueron a recibirlo tres ciudadanos: Aldo, Beto y Casto.

El turista preguntó a Aldo "¿De qué barrio eres?" a lo que Aldo respondió en su dialecto. Entonces el turista preguntó a Beto "¿qué dijo tú amigo?" "dijo que es abajiño. Pero no le crea porque es un mentiroso "contestó Beto. "No, el mentiroso es Beto. Aldo dijo la verdad" intervino Casto. El turista sonrió, dando a entender que había deducido el barrio al que pertenecía cada uno. ¿Tú también puedes hacerlo?

Resolución

Preguntado sobre el barrio de procedencia, ¿qué contesta un arribeño y qué un abajiño?

Arribeño: como siempre miente, dice: "yo soy abajiño"

Abajiño: como es veraz, dice: "yo soy abajiño"

Por tanto la respuesta de Aldo ha tenido que ser "soy abajiño". Beto la confirma, entonces él es abajiño, además, Beto dice que Aldo es mentiroso, lo cual debe ser cierto, o sea Aldo es arribeño.

Casto tilda de mentiroso a Beto cuando él es veraz, por tanto Casto es arribeño.

Rpta.: Aldo y Casto, arribeños. Beto, abajiño.

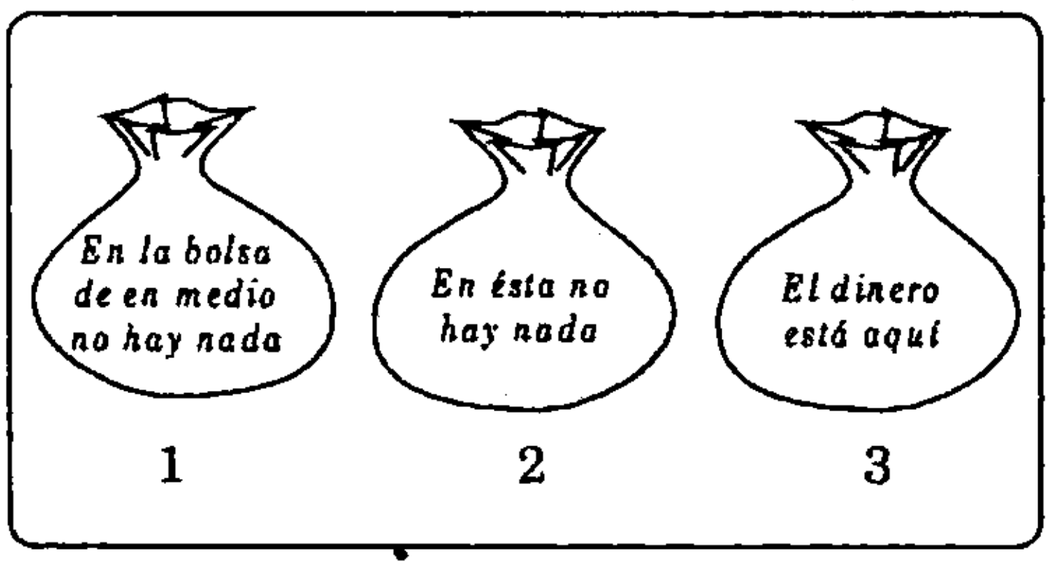
Problemas

1. ***El divertido Carlillo siempre está buscando cómo sorprender a su inseparable amigo Perico. Carlillo preparó tres bolsas, una de ellas conteniendo monedas***

   - Adivina en cuál de las bolsas está el dinero – l e dijo a Perico.

   Cuando Perico le solicita una pista, Carlillo le presenta los letreros diciendo:

   - Al menos una de las etiquetas dice la verdad, y al menos una de ellas dice mentira.



¿Cuál de las bolsas contiene el dinero?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** Ninguna **E)** Falta más datos

1.3. Razonamiento Transductivo

Este razonamiento está basado en la ley de la transitividad. Por ejemplo, si A = B y B = C entonces A = C. La relación planteada es transferida a través de las premisas y se concluye relacionando los conceptos extremos de las premisas.

Las transfrencias pueden ser de diversos tipos:

1.3.1. Transferencias por Comparación

(Términos relacionadores: Mayor (>), menor (<), igual (=), no mayor (≤) y no menor (≥)).

Problema 1

Si A y C tienen el mismo sueldo y B gana menos que A, pero más que D, entonces:

A) A gana igual que D

B) D gana igual que A

C) C gana más que D

D) D gana más que A

E) B gana igual que C

Resolución

Las relaciones de igualdad y de orden se pueden representar mediante los signos =, > (mayor que), < (menor que), ≥ y ≤, luego aplicando las propiedades aritméticas, deducir la conclusión.
Otro modo de resolver es, ordenando los elementos en el espacio, los mayores hacia arriba, los menores hacia abajo y los iguales a la misma altura.

METODO (1)

A = C (1)

B < A (2)

B > D (3)

De (2) y (3): D < B < A (4)

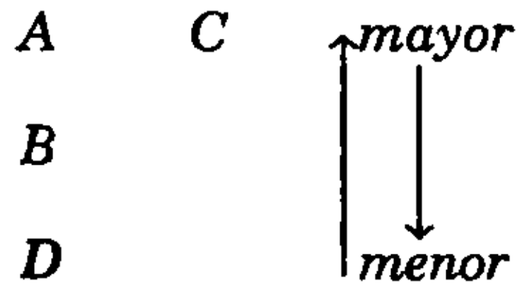
De (1) y (4): **D < B < A = C**

∴ *C gana más que D*

Rpta.: (C)

METODO (2)

Ubicando los elementos según los datos:



∴ *C gana más que D*

Rpta.: (C)

Problema 2

En una casa distribuidora de carros nos informan que: Un NISSAN es más cara que la DATSUN. Una FORD es más cara que la TOYOTA. La NISSAN es más barata que la TOYOTA. ¿Qué marca es la más cara?

Resolución

* Nissan más cara que Datsun	* Ford más cara que Toyota	* Nissan más barata que Toyota
N	**F**	**T**
D	**T**	**N**

⇨ **F T N D**

Rpta.: Ford

Problemas

1. Las familias Alvín, Bancio, Carpio y Durán viven en un edificio de 4 pisos, ocupando cada familia un piso. La familia Alvín habita más arriba que la familia Carpio. La familia Bancio no son vecinos con Carpio. El señor Durán no utiliza ascensor ni escalera para ingresar a su casa.

¿Quién vive en el cuarto piso?

A) La familia Carpio
B) La familia Bancio
C) La familia Alvin
D) La familia Durán
E) Falta información

2. Cuatro amigos tienen edades diferentes. Arnold es mayor que José y éste menor que Kike. Paco nació antes que nacieran Kike y Arnold. Kike no es menor que Arnold. Menciónalos en el orden de mayor a menor

A) Paco, Kike, Arnold, José
B) Paco, Kike, José, Arnold
C) Paco, Arnold, Kike, José
D) Arnold, Paco, Kike, José
E) Paco, José, Kike, Arnold

3. Cinco soldados son llamados por el capitán y se presentan formando una columna de mayor a menor , obviamente, en estatura.

El soldado A es más bajo que B. C es más alto que D. El soldado C se ubica delante de A. Si E está detrás de A, ¿cuál es el orden en que están ubicados?

A) BCADE **B)** BCDEA **C)** BACED
D) BACDE **E)** BEACD

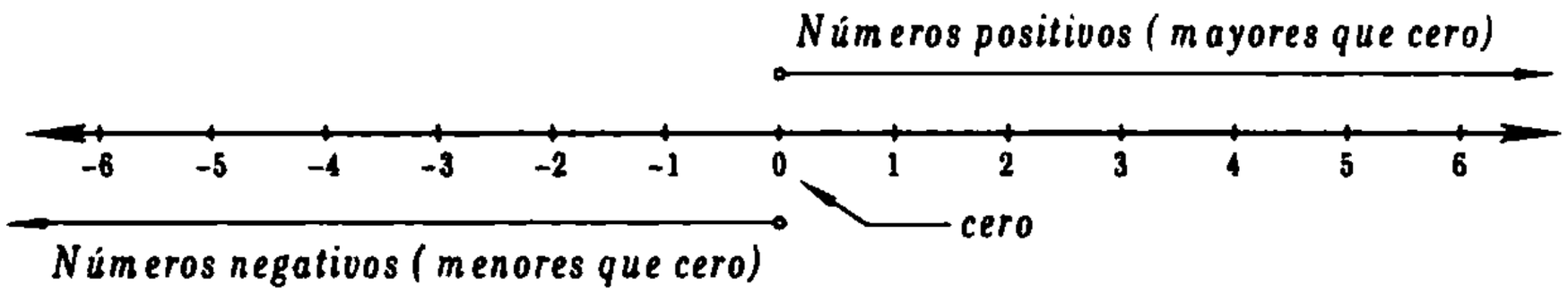
Problema 3

Supongamos que x, y, son números reales, tales que: $x > 0 > y$ ¿Cuál de las siguientes relaciones no es correcta? (SM '80)

A) $(y - x)(x - y) < 0$
B) $(y - x)/y > 0$
C) $x^2 - xy < 0$
D) $yx < 0$
E) $y^2 + x^2 \geq 0$

Resolución

• Representando los números reales en la recta numérica tenemos:



De aquí, si:

$x > 0$, se lee : x es positivo

$y < 0$, se lee : y es negativo

$z \geq 0$, se lee : z no es negativo

$w \leq 0$, se lee : w no es positivo

• Si y es negativo, $-y$ es positivo. Por ejemplo si $y = -8$, entonces $-y = -(-8) \Rightarrow -y = 8$. Lógicamente, si x es positivo, $-x$ es negativo.

• El cuadrado de un número real, sea positivo o negativo, nunca es negativo, es positivo o cero.

• La suma de dos positivos es positivo y la suma de dos negativos es negativo.

Con las pautas previas, vamos a analizar cada una de las alternativas, teniendo en cuenta que x es positivo e y es negativo.

A) $\underbrace{(y-x)}_{negativo}\ \underbrace{(x-y)}_{positivo} < 0$: El producto de un negativo por un positivo es negativo (verdadero)

B) $\underbrace{(y-x)}_{negativo} / \underbrace{-y}_{negativo} > 0$: El cociente de un negativo entre otro negativo, es positivo (verdadero)

C) $\underbrace{x^2}_{positivo} \underbrace{- \overbrace{xy}^{negativo}}_{positivo} < 0$: La suma de dos números positivos es positivo (falso)

D) $\underbrace{x}_{positivo} \overbrace{y}^{negativo}$ → El producto de dos números, uno positivo y otro negativo siempre es negativo (verdadero)

E) $\underbrace{x^2 + y^2}_{no\ negativo} \geq 0$ → La suma de dos números no negativos es otro no negativo (verdadero)

Rpta.: C

Problemas

1. Sean x e y dos números reales tales que x > y > 0.

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $(x-y)(y-x) < 0$

b) $(x-y)\,y \geq 0$

c) $(y-x)/(x-y) < 0$

d) $(x^2-y^2)(x+y) > 0$

A) VVVV B) VVVF C) VVFV
D) VFVV E) FVVV

2. Dados los números reales x, y, z, tales que:

I. $x < y$ *II.* $z < 0$ *III.* $x \geq 0$

¿Cuántas de las siguientes proposiciones son falsas?

a) $(z-x)(z-y) > 0$

b) $(x-z)(y-z) < 0$

c) $(x^2+z^2) \geq 0$

d) $xz/(z-x) < 0$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3. Dados los números reales x, y, z, se sabe que:

$x > 0$, $y < z$ y $z < 0$

¿Cuál de las siguientes relaciones es falsa?

A) $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<0$ B) $\frac{y}{x}+\frac{x}{z}<0$

C) $(y-z)/(z-x) < 0$

D) $zx - yz < 0$ E) $yx + zx < 0$

4. Si $0 < x < 1$ *entonces son verdaderas*

I. $x^2 > 1$ *II.* $x^2 > x$ *III.* $x^2 < x$

A) Sólo I B) I y III C) Sólo III
D) I y II E) Sólo II

1.3.2. Transferencia de relación espacial

(Términos relacionadores: Arriba, abajo, derecha, izquierda, delante, atrás, encima, debajo, afuera, adentro, superior, inferior, Norte (N), Sur (S). Este (E), Oeste (W), Noreste, etc).

Problema 1

Praga está al Este de París y al Sur de Berlín. Bruselas está al Noreste de París y al Suroeste de Berlín; entonces Praga está:

A) Al Este de Bruselas

B) Al Sur de Bruselas

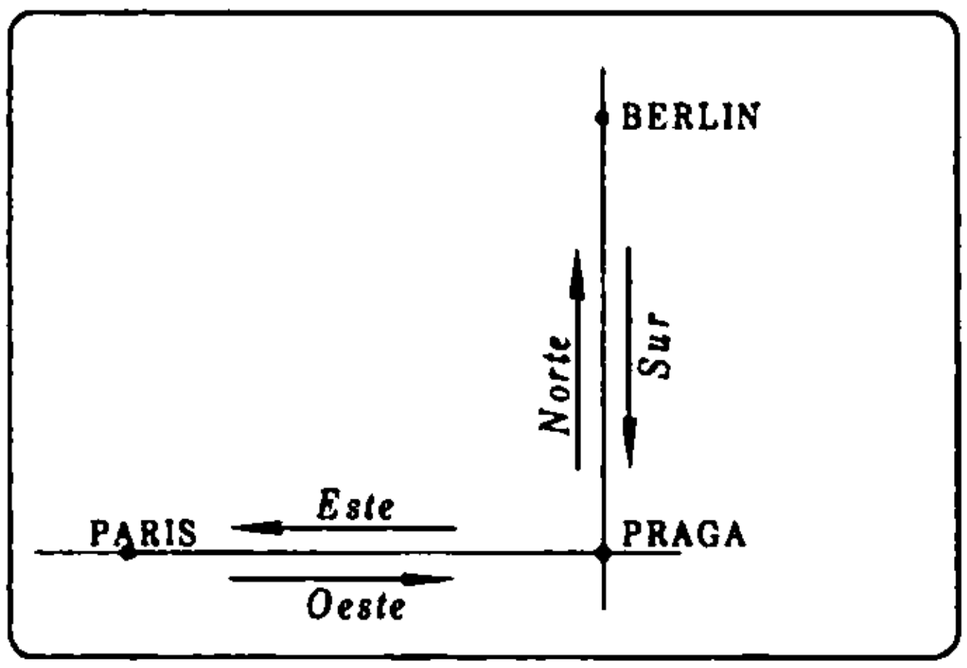
C) Al Suroeste de Bruselas

D) Al Noreste de Bruselas

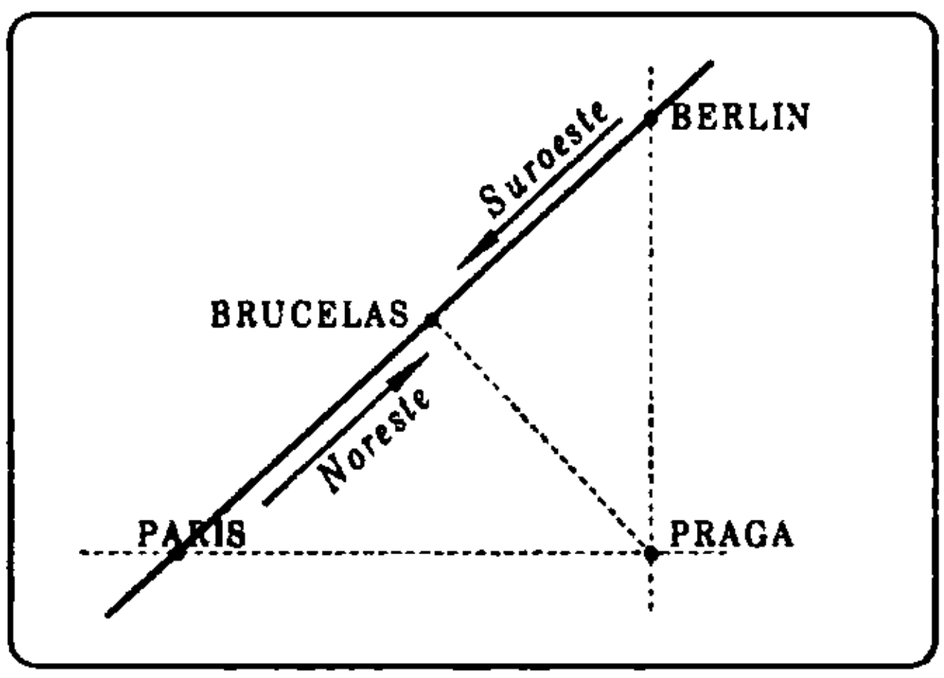
E) Al Sureste de Bruselas

Resolución

"Praga está al Este de París y al Sur de Berlín"



"Bruselas está al Noreste de París y al Sureste de Berlín".



La única alternativa que indica la posible ubicación es la E.

Rpta.: E

Problemas

1. Andrés, Beto y Carlín se encuentran charlando sentados al rededor de una mesa circular. Beto no está a la derecha de Carlín.

¿Quién está a la derecha de Andrés?

A) Beto **B)** Carlín **C)** No se sabe
D) A y B **E)** N. A..

2. En la escuela los chicos se sientan en los pupitres numerados del 1 al 5 y las chicas se sientan frente a ellos en los numerados del 6 al 10.

1. La chica sentada junto a la chica frente al n° 1 es Fiorela.

2. Fiorela se sienta tres pupitres más allá que Grace.

3. Hilary está frente a Colin.

4. Eddy se sienta frente a la chica sentada junto a Hilary.

5. Si Colin no está en el centro, Alan sí.

6. David está junto a Billy.

7. Billy se sienta tres pupitres más allá de Colin.

8. Si Fiorela no está en el centro, Indira sí.

9. Hilary está tres pupitres más allá de Jane.

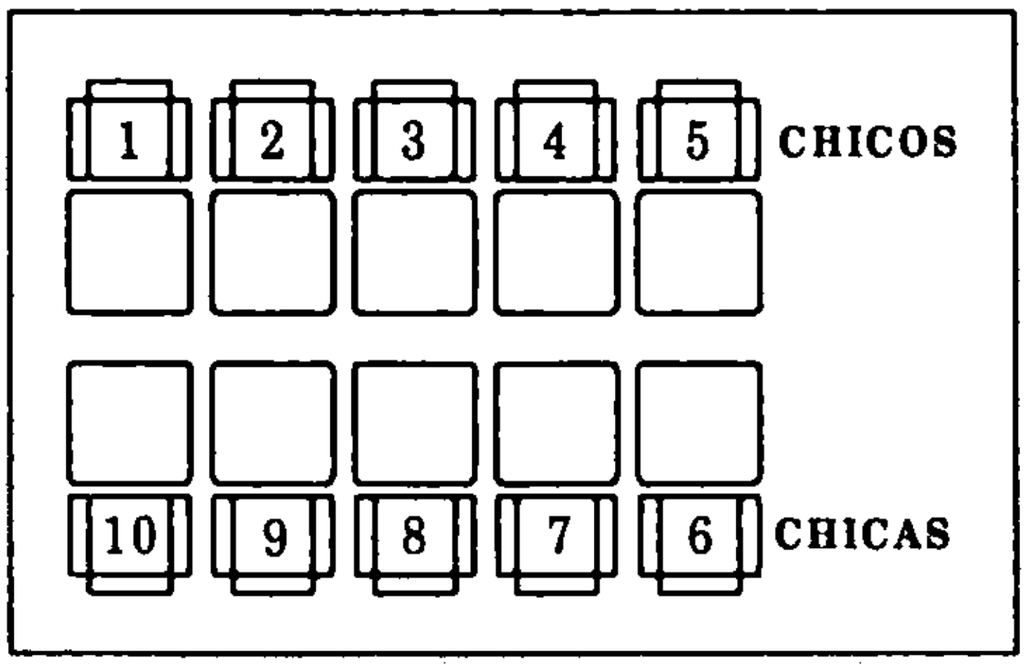
10. David se sienta frente a Grace.

11. La chica que se sienta junto a la que está frente a Alan es Jane.

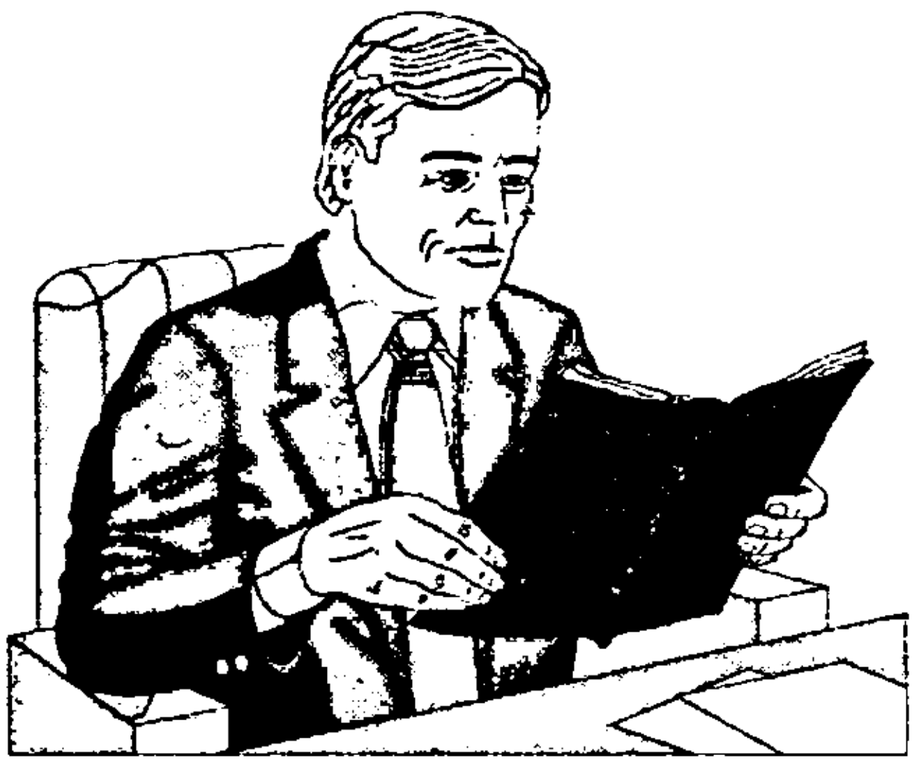
12. Colin no se sienta en el pupitre n° 5.

13. Jane no se sienta en el pupitre n° 10.

¿Quién está sentado a la derecha y contiguo a Indira?



A) Colin **B)** Jane **C)** Billy
D) Fiorela **E)** Eddie



Reto al Ingenio

El abuelo Tacañón ha comprado a muy buen precio una partida de jerez añejo que consta de 32 barriles. Temiendo que le roben alguno, manda bajarlos a su bodega y colocarlos alrededor de un pilar cuadrado, de tal manera que desde cualquier lado se vean doce barriles. Con lo que no tendrá más que darse una vuelta por la bodega para hacer fácilmente el recuento.

Por una indiscreción, los hermanos Garrucha se enteran de esta sabia disposición del avaro y deciden llevarse su parte del sabroso líquido. De manera que entran de noche en el sótano y cambian el orden de lo barriles de modo que se llevan cuatro, y el viejo no podrá darse cuenta de que le han robado, porque seguirá contando doce barriles de cada lado.

¿Cómo funciona la treta de los Garrucha?

1.3.3. Transferencia de Relación Temporal

(Términos relacionadores: Antes, después, anterior, posterior, precede, antecede).

Problema 1

¿Cuál es el número que antecede al que precede a 5?

A) 4 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 2

Resolución

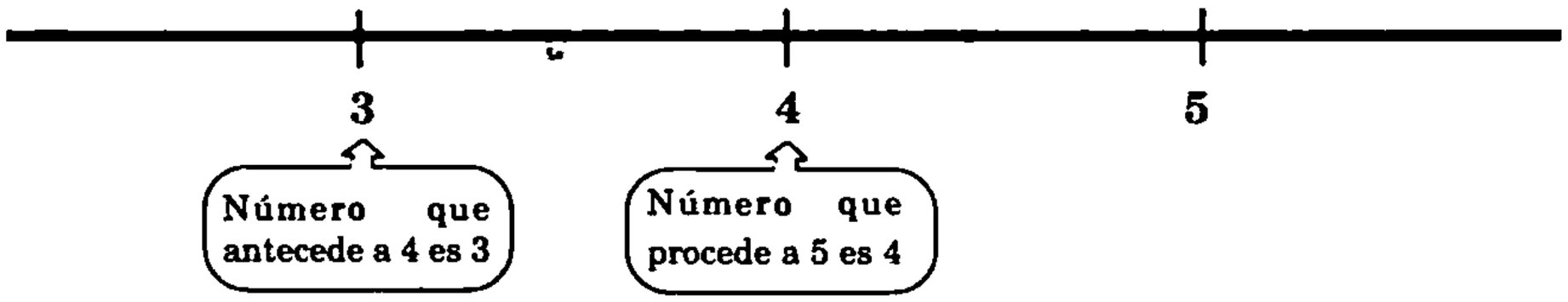
* El término **anteceder** es lo mismo que **preceder**, que significa **"anterior a"**

* *Número que antecede al* $\underbrace{\text{que precede a 5}}_{4}$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{3 \leftarrow \text{Número buscado}}$

Son tantas las estrategias para resolver un mismo problema. No pretendemos de ninguna manera que el lector considere la estrategia propuesta como la mejor, ni mucho menos la única.

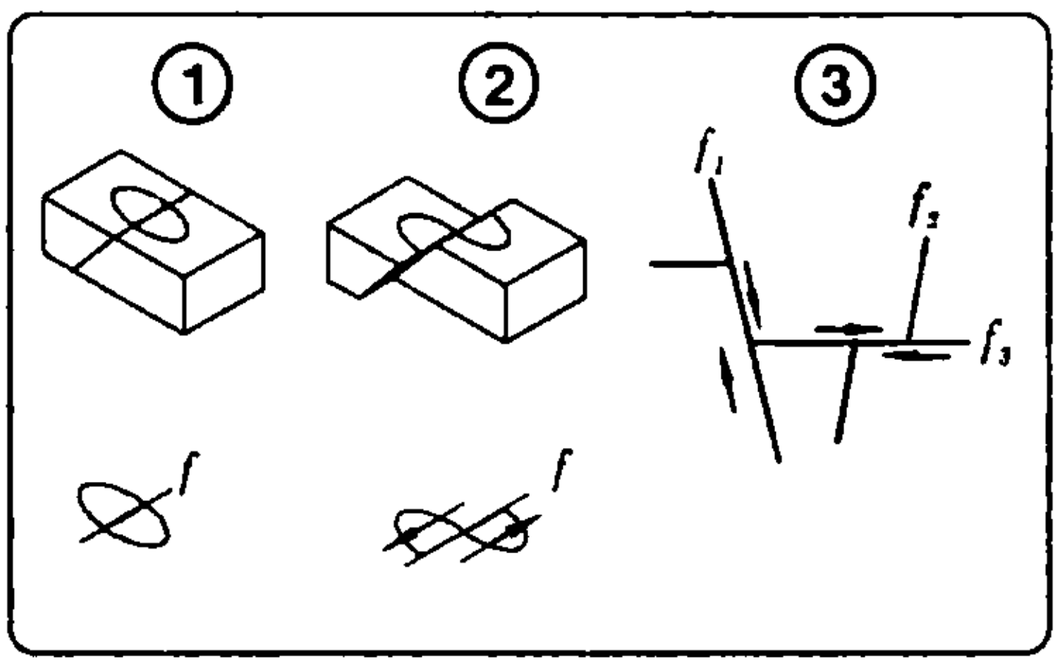
Gráficamente:



Rpta.: 3

Problemas

1. Observa las figuras.

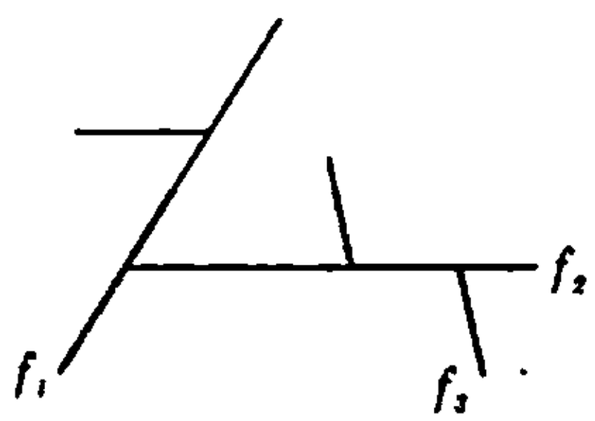


Del gráfico 3, deduce la secuencia en el tiempo del más antiguo al más reciente.

A) $f_1 f_2 f_3$ **B)** $f_2 f_1 f_3$ **C)** $f_2 f_3 f_1$
D) $f_3 f_1 f_2$ **E)** $f_3 f_2 f_1$

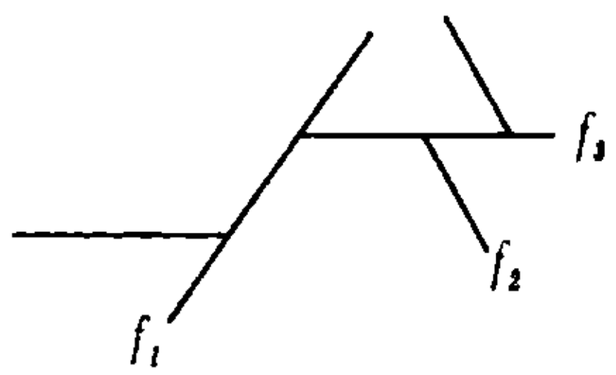
2. Ordenar los desplazamientos del más antiguo al más reciente.

A) $f_1 f_2 f_3$
B) $f_1 f_3 f_2$
C) $f_2 f_3 f_1$
D) $f_2 f_1 f_3$
E) $f_3 f_2 f_1$

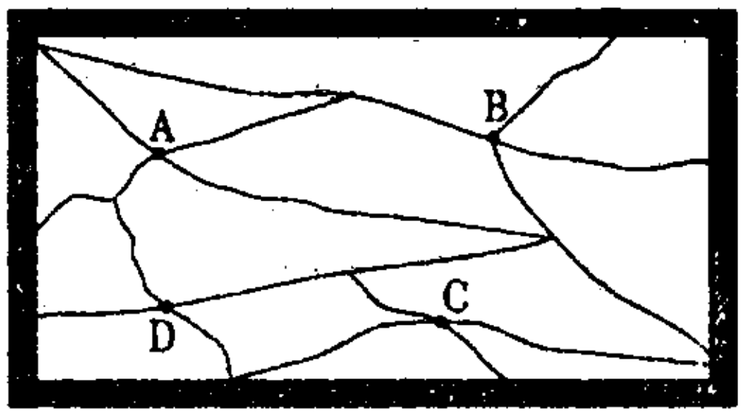


3. Ordenar los desplazamientos del más antiguo al más reciente.

A) $f_1 f_2 f_3$
B) $f_1 f_3 f_2$
C) $f_2 f_3 f_1$
D) $f_2 f_1 f_3$
E) $f_3 f_2 f_1$



4. En momentos en que la banda de Pilluelo ya había reducido al personal del banco y Pilluelo se disponía abrir la caja, los asaltantes fueron sorprendidos por la policía, generán-dose una balacera de Padre y señor mío. El cuadro que adornaba la oficina del administrador quedó como muestra la figura. ¿En qué orden cayeron los impactos de bala?



A) ABCD **B)** ABDC **C)** BDAC
D) BCDA **E)** BADC

1.3.4. Transferencia por relación de afinidad

Problema 1

Los hijos de Andrés son Rosa y Toño. Rosa se casó con Tino y tuvieron un hijo de nombre Celso. Toño es padre de Sara quien es madre de Leonor. Por lo tanto:

1. Leonor es nieta de Toño y Bisnieta de Andrés

2. Celso es primo de Sara y tío de Leonor

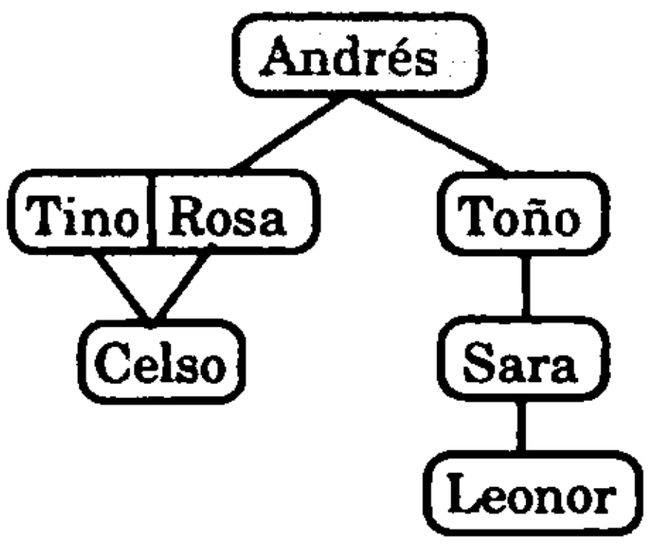
3. Toño es tío de Celso e hijo de Andrés

4. Sara es sobrina de Tino y bisnieta de Andrés.

Son ciertas:

A) 1; 2 y 3 **B)** 1 y 3 **C)** 1; 3 y 4 **D)** 1; 2 y 4 **E)** Todas

Resolución



1ra generación : Bisabuelo

2da generación : abuelo

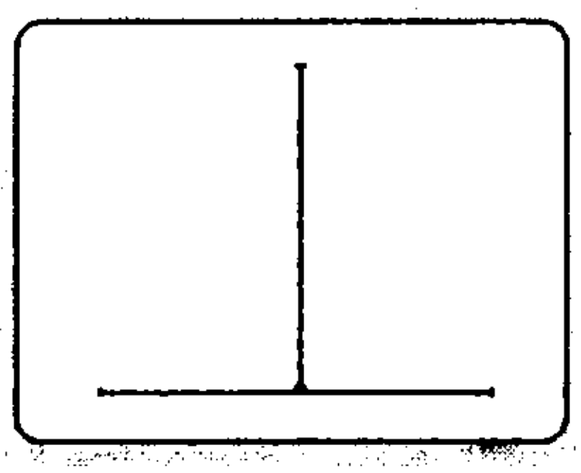
3ra generación : padres

4ta generación : nietos

Rpta.: A

Desafío a tu sentido

¿Cuál de los segmentos es más largo, el vertical o el horizontal?



Problemas

1. ***Carmen es hermana de Rino y Joaquín es hermano de Carmen, pero Rino y Joaquín no tienen ninguna afinidad familiar.***

   Luego:

   A) El papá de Rino es hermano con la mamá de Joaquín

   B) La mamá de Joaquín es tía de Carmen

   C) El papá de Carmen es tío de Joaquín

   D) La mamá de Joaquín es esposa del Papá de Rino.

   E) La mamá de Rino es esposa del tío de Rosa.

2. ***¿Cuál es el menor número de personas que se requiere para que en una familia haya: un abuelo, una abuela, tres hijos, 3 hijas, 2 madres, 2 padres, una suegra, un suegro y una nuera?***

A) 10 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 13 **E)** 15

1.4. Razonamiento por Analogía

Es un razonamiento que va de lo particular a lo particular mediante la comparación. Su conclusión es débil y no siempre es definitiva.

Problema 1

¿Cuál de las siguientes igualdades es siempre verdadera?

A) $x^{m+n} = x^m + x^n$

B) $x^{m+n} = (x^m)^n$

C) $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$

D) $x^{m+n} = (x^m) + n$

E) N.A.

Reto al ingenio

¿Qué número va en lugar del signo de interrogación?

482	*5*	*621*
654	*9*	*321*
972	*?*	*725*

Resolución

El razonamiento por analogía, es un recurso muy útil para resolver este tipo de dudas. Cuando hayamos olvidado las leyes del álgebra, podemos optar por dilucidar la duda mediante un ejemplo numérico.

Tomemos por ejemplo 3^{2+1}. Es evidente que debemos sumar el exponente de 3, 2 + 1 = 3, entonces resulta $3^{2+1} = 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ por tanto el resultado de 3^{2+1} es 27.

Enseguida analizamos las alternativas:

A) $x^{m+n} = x^m + x^n \Rightarrow 3^{2+1} = \underbrace{3^2}_{9} + \underbrace{3^1}_{3} = 12$ = (es falso)

B) $x^{m+n} = (x^m)^n \Rightarrow 3^{2+1} = \left(3^2\right)^1 + 9^1 = 9$ (es falso)

C) $x^{m+n} = x^m \cdot x^n \Rightarrow 3^{2+1} = \underbrace{3^2}_{9} \cdot \underbrace{3^1}_{3} = 9 \cdot 3 = 27$ (correcto)

D) $x^{m+n} = (x^m) + n \Rightarrow 3^{2+1} = \left(3^2\right) + 1 = 9 + 1 = 10$ (falso)

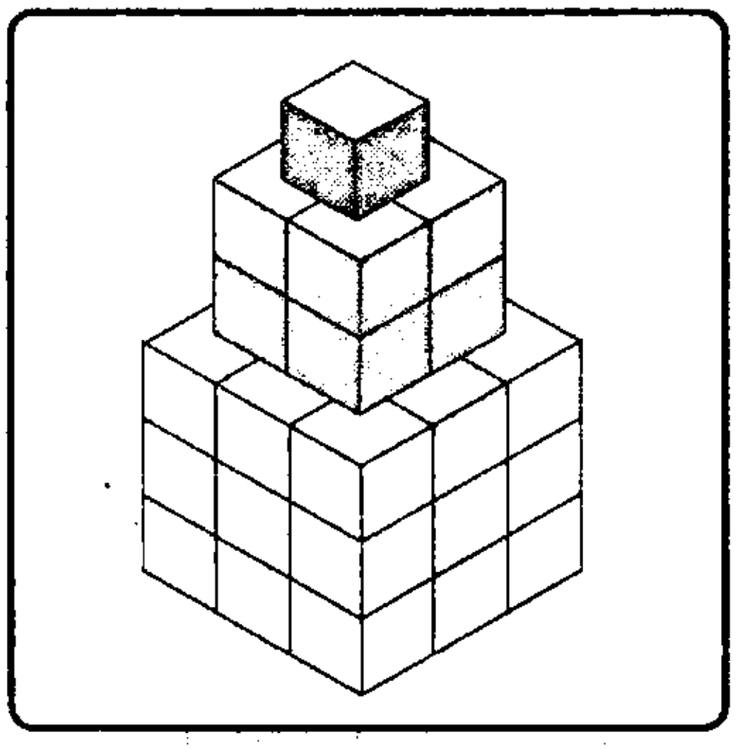
Por lo tanto la igualdad siempre verdadera es:

$$x^{m+n} = (x^m) \cdot (x^n)$$

Rpta.: C

Torre de cubos

Para esta torre de 3 pisos se ha utilizado 36 cubos. ¿Cuántos cubos serán necesarios para construir una torre similar pero de 20 pisos?



Sugerencia: *utilizar la relación:*

$(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

A) *4 400* ***B)*** *6 400* ***C)*** *8 100*
D) *44 100* ***E)*** *25 600*

Problema 2

Si $x^x = 2^2$ ***entonces*** $x = 2$. ***Según esto podemos concluir que si*** $x^x = a^a$ ***entonces*** $x = a$.

¿Es siempre verdadera esta conclusión? Es decir ¿Podría darse el caso que siendo x^x ***y*** a^a ***iguales, y sin embargo*** x ***sea diferente de*** a***?***

Resolución

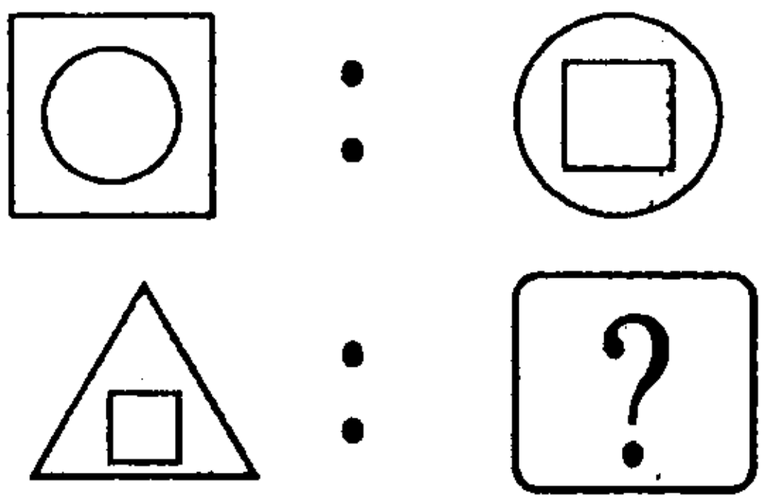
• Sí. Es posible que se dé ese caso. Por ejemplo la igualdad $\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)}$ es correcta, pero

$\frac{1}{2}$ es diferente de $\frac{1}{4}$. Por tanto si $x^x = a^a$, **no siempre** $x = a$.

Si bien el razonamiento por analogía es de suma utilidad para salir de situaciones dudosas, sin embargo por su carácter particular nos puede conducir a conclusiones aparentemente o particularmente correctas, pero que no sea del todo verdadero o que no sea cierto en forma general.

Problemas

1. *¿Cuál de las figuras signadas con letras corresponde al signo de interrogación?*



A) B) C) D) E)

2. *Se define una operación en la forma mostrada y simbolizada por *.*

$$a * b = a^2 - b^2$$

Los resultados de:

a) 0 * 1 **b)** 1 * 1 **c)** (-1) * 1 **d)** 3 * (-2)

son

A) –1; 0; –1; 5

B) –1; 0; 1; 5

C) –1; 0; 0; 5

D) –1; 0; 1; 9

E) –1; 0; 0; 9

1.5. Lógica Proposicional

El interés de la lógica es la **inferencia** (razonamiento, argumento). ¿Donde se ha visto? visto. La inferencia consta de una o varias afirmaciones (proposiciones) llamadas **premisas**, a partir de las cuales se deriva una afirmación llamada **conclusión**. He aquí un ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Premisas} \begin{cases} \textit{El tigre es un animal carnívoro} \\ \textit{Todos los animales carnívoros son cazadores} \end{cases} \\ \hline \text{Conclusión} \{\textit{Por lo tanto, el tigre es un animal cazador} \end{array}\right\} \textit{Inferencia}$$

La lógica proposicional estudia las inferencias utilizando las proposiciones.

1.5.1. Proposición

El lenguaje tiene una función **expresiva** (para comunicar sentimientos, emociones: ¡ay! ¡Qué hermosa mujer!), una función **directiva** o **apelativa** (una orden, un pedido, una pregunta: no saques la mano, dame un beso) y una función **informativa** (Comunica mensajes, informa: la Tierra es redonda, descubrieron el remedio para el SIDA). La función informativa se efectúa mediante una oración **aseverativa**.

La lógica estudia las **leyes del razonamiento.** El razonamiento es un proceso que ocurre a nivel cerebral pero se expresa mediante el lenguaje, de modo que la lógica, para estudiar el razonamiento, requiere un lenguaje. Precisamente, el lenguaje que utiliza la lógica proposicional tiene como elemento principal la **proposición**.

La **proposición** es el **significado** de una oración aseverativa, la cual puede ser calificada como verdadera o falsa. E1

Hay oraciones aseverativas que no son proposiciones. La oración "Juan es estudioso", ¿es verdadera o falsa? No es posible calificarla de verdadera o falsa mientras no se sabe quién es ese Juan a quien se refiere.

Las oraciones de esta naturaleza se denominan **enunciados abiertos**. E2

La proposición tiene la propiedad esencial y exclusiva de ser falsa (F) o verdadera (V), esta calificación se llama **valor de verdad** o **valor veritativo**.

E1

Es proposición	*No es proposición*
El número 2 es par	*Los números impares*
3 es mayor que 8	*¿Cuál es tu nombre?*
El Perú no es libre	*Tus hermosos ojos verdes.*

E2

Enunciados abiertos

$$x > 10$$

$$2x + 5 = 10$$

El es un médico peruano.

1.5.2. Variable proposicional

Las proposiciones, "si el plástico se quema despide humo" y " si el papel se moja se destruye" tienen la misma **estructura** a pesar de tener significados distintos. Cuando se trata de analizar estructuras idénticas es conveniente representarlos por **símbolos** o **letras**, las cuales se llaman **variables proposicionales**. E3

Para representar las proposiciones se utilizan las letras: $p, q, r, s, t, ...$

E3

El iqueño es peruano: $\boldsymbol{p}$

El peruano es americano : $\boldsymbol{q}$

Si es peruano entonces es americano: $\boldsymbol{p \rightarrow q}$

1.5.3. Proposición simple y compuesta

Una proposición es **simple** o atómica cuando expresa una sola idea y se representa por una sola variable. Uniendo dos o más proposiciones se puede formar otras proposiciones, entonces se llama **proposición compuesta**. E4

Para unir las proposiciones se utilizan ciertos términos llamados **términos de enlace**, los cuales también se representan por símbolos llamados **conectivos lógicos**. Según los términos de enlace con los que están unidas dos proposiciones tienen significados distintos y reciben nombres diferentes.

E4

Proposición simple	**Proposición compuesta**
• *12 es par : p*	• *12 es par y múltiplo de 3*
• *12 es múltiplo de 3: q*	$(p \wedge q)$

A. PROPOSICION CONJUNTIVA

Es la proposición compuesta unida por el término de enlace **"y"** cuyo símbolo es $\wedge$.

Charito es casada: p
Charito tiene un hijo: q
} *Charito es casada y tiene un hijo:* $p \wedge q$

Proposición conjuntiva

¿Cuál es el valor de verdad de una proposición compuesta? El valor de verdad de una proposición compuesta depende de los valores veritativos de las proposiciones simples de las que se compone y el tipo de conectivo involucrado.

Imagínate que llegas a conocer a "Charito". Ella te dice que es casada y tiene un hijo. Pero tú no estás convencido de lo que dice, entonces decides averiguar sobre ella para saber si es falso o verdadero lo dicho por ella.

¿Cuáles son las posibles respuestas que puedes obtener? Que efectivamente *sea casada con un hijo*, en cuyo caso dirás que lo que ha dicho es **verdadero**. Tal vez *no sea casada ni tiene hijo*, entonces dirás que mintió y lo que ha afirmado es **falso**.

¿Pero si es casada sin hijo, o es una madre soltera?, ¿Cómo calificas su afirmación? ¿como verdadera o como falsa? No hay verdad a medias ni falso a medias.

El conectivo "*y*" indica que se deben cumplir las dos proposiciones. Por lo tanto, es suficiente que una de las proposiciones sea falsa para que la proposición compuesta sea falsa. Es verdadera sólo en el caso en que ambas proposiciones son verdaderas.

Este análisis que acabamos de realizar para determinar el valor de verdad de la proposición conjuntiva se representa esquemáticamente como se muestra a la derecha.

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla de verdad de la proposición conjuntiva.

Este esquema se llama **tabla de verdad** de la proposición conjuntiva.

B. PROPOSICION DISYUNTIVA

Es la proposición compuesta unida por el término de enlace **"o"**.

B1. Inclusiva o débil.- Esta vinculada con el término de enlace "o" cuyo símbolo es ∨.

Charito es casada: p
Charito tiene un hijo: q
} *Charito es casada o tiene un hijo:* $p \vee q$

Proposición disyuntiva débil

La "o" inclusiva asevera la ocurrencia de al menos una de las proposiciones vinculadas. Para que sea verdadera la proposición disyuntiva, es suficiente que una de ellas sea verdadera. Obviamente sera verdadera cuando ambas son verdaderas. A la derecha se muestra la tabla de verdad de la proposición disyuntiva:

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla de verdad de la proposición disyuntiva débil.

B2. Exclusiva o fuerte.- Está vinculada con el término de enlace **"o ... o ..."** cuyo símbolo es ↮.

Carlos es Peruano : p
Carlos es Chileno : q } *O Carlos es peruano o chileno : p ↮ q*
Proposición disyuntiva fuerte

La disyunción fuerte excluye la ocurrencia de las dos proposiciones vinculadas

En el ejemplo, Carlos, de nacimiento no puede ser peruano y Chileno a la vez, o bien es uno o lo otro, pero no ambos. Observa en tabla de verdad.

p	q	p ↮ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla de verdad de la proposición disyuntiva fuerte.

C. PROPOSICION CONDICIONAL

Es la proposición compuesta vinculada por el término de enlace **"si, ... entonces ...,"** afirma que la ocurrencia de la primera proposición, llamada **antecedente**, da lugar a la ocurrencia de la segunda proposición llamada **consecuente**. El símbolo de este conectivo es →.

Carmín es limeña : p
Carmín es peruana : q } *Si Carmín es limeña, estonces es peruana : p → q*
Proposición condicional

¿Es posible que siendo limeña no sea peruana? Sólo en el caso en que el antecedente es falso y el consecuente verdadero , la proposición condicional es falsa, en todo los demás casos es verdadera. Una proposición verdadera jamás implica una proposición falsa.

Una proposición falsa si puede implicar una proposición verdadera. Carmín sin ser limeña puede ser peruana.

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla de verdad de la proposición condicional.

D. PROPOSICION BICONDICIONAL

Es aquella vinculada por el término de enlace **"si, sólo si ..."** cuyo símbolo es ↔ la proposición "p si, y sólo si q" significa que para que se cumpla q tiene que cumplirse p y para que se cumpla p, tiene que cumplirse q.

Irma es madre de Julio : p
Julio es hijo de Irma : q } *Irma es madre de Julio si, y sólo si Julio es hijo de Irma : p ↔ q*
Proposición bicondicional

La proposición bicondicional es verdadera cuando la dos proposiciones vinculadas tienen el mismo valor de verdad.
La proposición bicondicional, es una condicional en un sentido y en el sentido contrario

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla de verdad de la proposición bicondicional.

E. PROPOSICION NEGATIVA

Es una proposición que lleva el adverbio **"no"** o sus equivalentes, lo cual hace cambiar el valor de la proposición. El símbolo de la negación es ~ . Una proposición simple con una negación se hace compuesta.

p	~p
V	F
F	V

Tabla de verdad de la proposición negativa.

Problema 1

Se dan las proposiciones p y q. También se da el valor de verdad de p y q. Determina el valor de verdad de las proposiciones compuestas.

p q	~p	~q	p → q	q → p	p ∨ q	p ∧ q	p ↔ q
V F	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦

Resolución

① Como p es (V) entonces ~p es (F).

② Como q es (F) entonces ~q es (V).

③ Un antecedente verdadero no puede implicar un consecuente falso. p → q es (F)

④ El antecedente q es (F) y el consecuente p es (F). Luego: q → p es (V)

⑤ Es suficiente que p ó q **sea verdadero** para que p ∨ q sea verdadero. Es (V)

⑥ Es verdadero sólo si p y q son verdaderos. Es (F)

⑦ Es verdadero cuando p y q tienen distintos valores de verdad. Es (V)

p q	~p	~q	p → q	q → p	p ∨ q	p ∧ q	p ↔ q
V F	(F)	(V)	(F)	(V)	(V)	(F)	(V)

Problemas

1. Si p es (V), q es (F), r es (V) y s es (F); determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

a) ~q (...) **d)** q → r (...) **g)** r ∨ p (...)

b) ~s (...) **e)** r ↔ p (...) **h)** ~p ∧ s (...)

c) p ∧ s (...) **f)** s ↔ q (...) **i)** ~p → ~r (...)

2. Dado el valor de verdad de la proposición compuesta, determina el valor de verdad de las proposiciones simples.

a) p ∧ q (V) ⇒ p (...) q (...)

b) p ∨ q (F) ⇒ p (...) q (...)

c) r → s (F) ⇒ r (...) s (...)

d) p ↔ t (V) ⇒ p (F) t (...)

e) r ↔ q (F) ⇒ r (V) q (...)

f) (~p ∧ s) (V) ⇒ p (...) s (...)

1.5.4. Esquemas Moleculares

La representación simbólica (formalizacíón) de las proposiciones compuestas mediante variables proposicionales y conectivos lógicos se llama ESQUEMA MOLECULAR. El proceso de representar una proposición compuesta mediante un esquema molecular se llama **formalización**.

Dado un esquema molecular representa una proposición compuesta, y como tal ésta tiene un valor de verdad. Este valor de verdad depende de los valores de verdad de las proposiciones atómicas vinculadas y los conectivos lógicos involucrados. E1

Lógicamente, si no se supiera el valor de verdad de las proposicioines atómicas involucradas, no siempre será posible determinar el valor veritativo del esquema molecular.

Sin embargo, es posible analizar los posibles valores de verdad del esquema molecular para todas las posibles combinaciones de valores de verdad de las variables involucradas. Esto es posible mediante una **tabla de verdad**. E2

Cuando no hay presencia de signos colectores la jerarquía de los conectivos para hallar el valor de verdad es el siguiente:

$$\sim,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ \not\leftrightarrow$$

Cuando hay signos colectores se determina primero el valor de verdad de los esquemas ubicados dentro de los signos colectores. E3

Hecha la tabla de verdad de un esquema molecular, caben tres posibilidades respecto a los valores de verdad obtenidos para el esquema, como se puede ver en las siguientes tablas:

E1

Si p es (V) y q es (F). ¿Cuál es el valor de verdad de $(\sim p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$?

Resolución

$1°\ (\sim p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$\quad\ \ V \quad F \quad\quad F \quad V$

$2°\ (\sim p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$\quad FV \quad F \quad\quad F \quad V$

$3°\ (\sim p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$\quad FV\ V\ F \quad\quad F\ V\ V$

$4°\ (\sim p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$\quad FV\ V\ F\ V \quad F\ V\ V$

El esquema es (V)

E2

Hallar la tabla de verdad del esquema: $(p \vee q) \rightarrow (q \wedge p)$

p	q	(p ∨ q) → (q ∧ p)
V	V	V V V
V	F	V F F
F	V	V F F
F	F	F V F

Hallar la tabla de verdad de los siguientes esquemas moleculares. E3

a) $p \rightarrow q \not\leftrightarrow \sim p \vee q$

p	q	p → q	↮	~p	∨	q
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	F

(a)

b) $(p \rightarrow q) \wedge p \leftrightarrow q$

p	q	(p → q)	∧	p	↔	q
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F

(b)

c) $p \rightarrow q \leftrightarrow p \vee q$

p	q	p → q	↔	p ∨ q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

(c)

TAUTOLOGICO.- Un esquema molecular es tautológico si en el resultado final de la tabla de verdad, todos los valores son **verdaderos** E3.b

CONTRADICTORIO.- Un esquema molecular es contradictorio, **incontingente** o **inconsistente**, si en el resultado final de la tabla de verdad todos los valores son falsos. E3.a

CONSISTENTE.- Un esquema molecular es **consistente** o **contingente**, si en el resultado final de la tabla de verdad hay valores falsos y verdaderos. E3.c

NOTA **Esquemas equivalentes**

Dos esquemas son equivalentes si tienen el mismo resultado en su tabla de verdad.

Por ejemplo, los esquemas **$\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \vee \sim q$** son equivalentes. Compruébelo haciendo las tablas de verdad para cada uno.

Problema 2

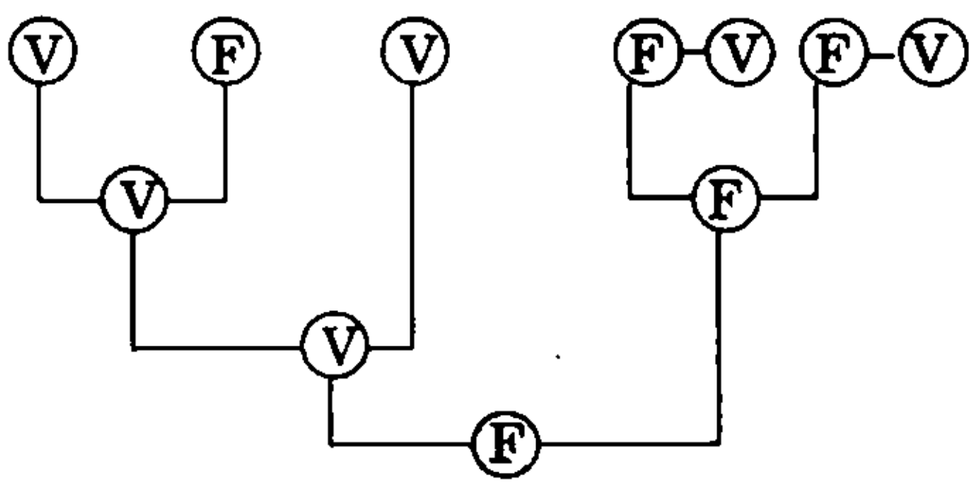
Determina el valor veritativo de los siguientes esquemas molecular, si p = V, q = F y r = V.

a) $(p \vee q) \wedge r \rightarrow \sim p \wedge \sim r$

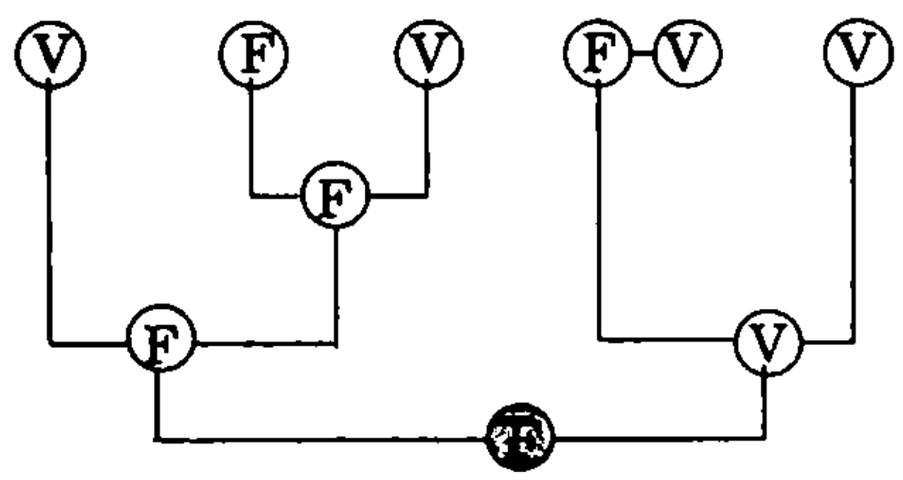
b) $p \rightarrow q \wedge r \leftrightarrow \sim p \vee r$

Resolución

a) $(p \vee q) \wedge r \rightarrow \sim p \wedge \sim r$



b) $p \rightarrow q \wedge r \leftrightarrow \sim p \vee r$



Problemas

1. ***Dadas los variables proposicionales con sus respectivos valores de verdad determinar el valor de verdad de los subsiguientes esquemas moleculares:***

   Si p = V, q = V, r = F y s = F

   a) $p \wedge r \leftrightarrow q \vee s$

   b) $((p \rightarrow q) \rightarrow r \wedge p) \vee q \rightarrow s$

   c) $(p \nleftrightarrow s) \leftrightarrow (q \vee r) \wedge (s \vee r)$

   d) $(p \vee q \rightarrow r) \leftrightarrow s \vee (p \wedge r \rightarrow s)$

   e) $p \vee (q \wedge r) \rightarrow (q \wedge s) \vee r$

   A) FFVVF **B)** FFVFF **C)** FFVVV
   D) FFVFV **E)** FFFFF

2. ***Sabiendo que el esquema $p \wedge q \rightarrow r$ es falso y el esquema $\sim(r \vee s \rightarrow t)$ es verdadero, determina el valor de verdad de los siguientes esquemas moleculares.***

   a) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \rightarrow t$

   b) $(p \wedge \sim q \rightarrow q \vee \sim t) \wedge s \leftrightarrow q \vee r$

   c) $[(r \vee q) \rightarrow (q \rightarrow t) \wedge s] \leftrightarrow r \vee q$

   d) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow t) \rightarrow r \vee t$

   e) $(r \wedge s \rightarrow q \vee t) \wedge p \nleftrightarrow p \vee q$

   A) VVVVV **B)** VVFFV **C)** VVVVF
   D) VVFFF **E)** VVFVF

3. ***Hallar la tabla de verdad de los siguientes esquemas moleculares y clasificarlos.***

a) $(p \vee q) \wedge \sim p \leftrightarrow q \wedge \sim p$

b) $\sim[(p \wedge q) \vee \sim p \leftrightarrow q \vee \sim p]$

c) $(p \rightarrow q) \wedge p \nleftrightarrow (q \rightarrow p) \wedge q$

d) $(p \vee \sim p \rightarrow q) \leftrightarrow q$

e) $(p \vee q \rightarrow p) \wedge \sim p \rightarrow p \vee q$

A) Tautológico, contradictorio, contingente, consistente, tautológico, contradictorio

B) Tautológico, contradictorio, contradictorio, tautológico, consistente

C) Tautológico, consistente, contradictorio, contingente, consistente.

D) Todos son contingentes.

E) Hay un solo esquema contradictorio

1.5.5 Inferencias

Habíamos dicho que el interés de la lógica es el estudio de las inferencias y que la lógica proposicional estudia las inferencias mediante las proposiciones, en consecuencia terminaremos esta parte analizando las inferencias. Recordemos que una inferencia (razonamiento, argumento) consta de proposiciones llamadas premisas a partir de las cuales se deduce una proposición llamada conclusión que se deriva de las premisas siguiendo las reglas de la lógica. **E1**

E1 ***Inferencia o razonamiento.***

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si Milton estudia, triunfará} \\ \text{Milton ha estudiado} \end{array}\right\} \begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \end{array} \quad \therefore \text{Milton ha triunfado} \quad q$$

Premisas, Conclusión } inferencia

Validez y valor de verdad

Lo primero que nos preguntamos es, ¿cómo podemos saber que la conclusión de una inferencia está correctamente derivada de las premisas? Por ejemplo, de las premisas, *"todos los huancaínos son peruanos"* y *"Mario Vargas Llosa es peruano"*, alguien podría concluir diciendo, por lo tanto *"Mario Vargas Llosa es huancaíno"*. A pesar de que las dos premisas son verdaderas, la conclusión es falsa, no se ha derivado correctamente de las premisas. En este caso se dice que la inferencia **no** es **válida**.

Los términos **verdadero y falso** se utilizan para calificar una proposición, mientras que un razonamiento es o bien **válido**, o bien **no válido**. No se debe decir *"tu razonamiento es falso"*, sino, *"tu razonamiento no es válido"*. Tampoco se debe decir *"tu afirmación es válida"*, sino, *"tu afirmación es verdadera"*. Mucho se escucha decir *"tu argumento es falso"*. El argumento es un razonamiento, por lo tanto no puede ser falso, sino, no válido. Se acepta, "tu conclusión es falsa", porque la conclusión es una proposición.

En fin, ¿cómo saber que un razonamiento es válido? Hay varias técnicas para determinar la validez de un razonamiento. Veremos tres de ellas: **Mediante tablas de verdad, por reducción al absurdo y mediante esquemas tautológicos**.

A. Mediante la tabla de verdad

Se formaliza el razonamiento. Enseguida se halla la tabla de verdad del esquema. Si el esquema es tautológico, el razonamiento es válido, en caso contrario no es válido. E1

E1

Juan es abogado o ingeniero
Juan no es abogado
Por lo tanto es ingeniero

Formalizando:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim p} \\ \therefore q \end{array}$$

Para hallar la tabla de verdad escribimos en forma horizontal.

$(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$

Hallando la tabla de verdad

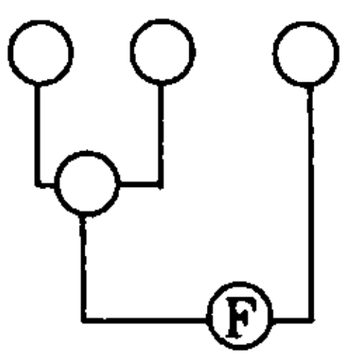
p	q	(p ∨ q)	∧	~p	→	q
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F

*El esquema es **tautológico** por lo tanto la inferencia es **válida**.*

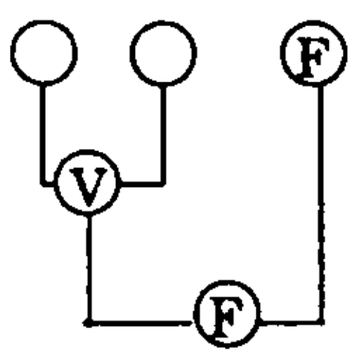
B. Por reducción al absurdo

El esquema molecular de un razonamiento válido no admite en su tabla de verdad un resultado falso. Para determinar la validez basta comprobar si admite o no un resultado falso en la tabla de verdad. Por ejemplo: ¿Es válida la inferencia $p \wedge q \rightarrow q$? Veamos si puede admitir un resultado falso:

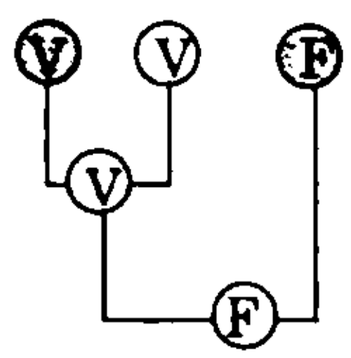
1° p ∧ q → p



2° p ∧ q → q



3° p ∧ q → q

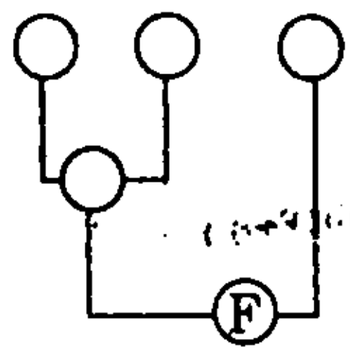


Para que el esquema sea falso, la variable q tendría que tener dos valores de verdad opuestos, esto es imposible. Por lo tanto, el esquema no admite un valor falso y en consecuencia la inferencia es **válida**.

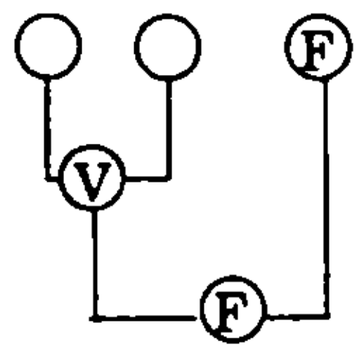
Veamos otro ejemplo: ¿Es válida la inferencia $p \vee q \rightarrow q$?

Veamos si puede admitir un resultado falso:

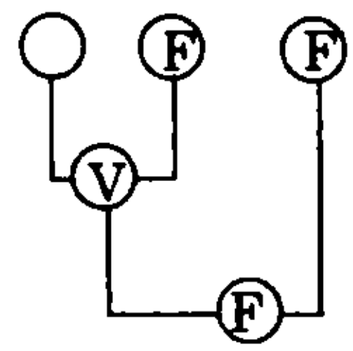
1° p ∨ q → p



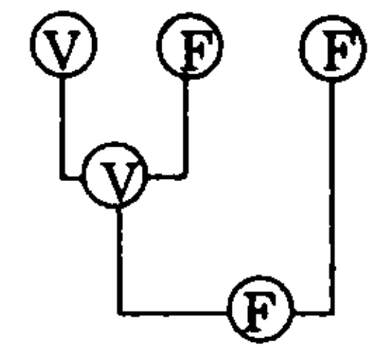
2° p ∨ q → q



3° p ∨ q → q



4° p ∨ q → q



Se observa que para p = V y q = F el esquema admite un valor falso, por consiguiente jamás será tautológico. La inferencia **no es válida.**

C. Mediante esquemas tautológicos

Hay inferencias cuyos esquemas moleculares han sido estudiados desde los tiempos de Aristóteles, inclusive llevan nombres específicos, de modo que si uno las reconoce, o demuestra que el esquema de una inferencia es equivalente a una de ellas, entonces se podrá determinar su validez. Estudiemos algunas de estas inferencias. Para ello vamos a valernos de la siguiente premisa:

"Si tomo veneno entonces muero" : $p \rightarrow q$

Consideremos que esto es cierto. Cualquiera sea el veneno la muerte es segura y no hay opción a salvar.

La premisa propuesta se compone de dos proposiciones: "*tomo veneno*" y "*muero*". Vamos a suponer que se cumple una de las proposiciones o no se cumple alguna de ellas. Según esto tenemos cuatro juegos de premisas:

① *Si tomo veneno entonces muero* : $p \rightarrow q$ *Tomé veneno* : p	② *Si tomo veneno entonces muero* : $p \rightarrow q$ *He muerto* : q
③ *Si tomo veneno entonces muero* : $p \rightarrow q$ *No tomé veneno* : ~p	④ *Si tomo veneno entonces muero* : $p \rightarrow q$ *No he muerto* : ~q

¿Qué pareja de premisas permite deducir una conclusión de modo que la inferencia sea válida? Veamos las conclusiones que mejor se adecúan a las premisas planteadas, lo cual no asegura que la inferencia sea válida:

① *Si tomo veneno entonces muero* : $p \rightarrow q$ *Tomé veneno* : p ∴ *Muero* ∴ q	② *Si tomo veneno entonces muero* : $p \rightarrow q$ *He muerto* : q ∴ *Tomé veneno* p
③ *Si tomo veneno entonces muero* : $p \rightarrow q$ *No tomé veneno* : ~p ∴ *No muero* ∴ ~q	④ *Si tomo veneno entonces muero* : $p \rightarrow q$ *No he muerto* : ~q ∴ *No tomé veneno* ∴ ~p

Las inferencias (1) y (4) son indiscutiblemente válidas. La inferencia (2) no es válida, porque si bien he muerto, no necesariamente por efecto del veneno. La inferencia (3) tampoco es válida porque el hecho de no tomar veneno no garantiza que no muera, se puede morir por otra causa.

La primera inferencia se denomina **modus ponendo ponens** (afirmando afirmo) y la inferencia (4) se llama **modus tollendo tollens** (negando niego). La afirmación del antecedente afirma el consecuente y la negación del consecuente niega el antecedente.

Las inferencias (2) y (3) se llaman **falacias**, que veremos más adelante.

Inferencias Notables

A. Modus Ponendo Ponens

$$\frac{p \to q \quad p}{\therefore q} \qquad (p \to q) \wedge p \to q$$

B. Modus Tollendo Tollens

$$\frac{p \to q \quad \sim q}{\therefore \sim p} \qquad (p \to q) \wedge \sim q \to \sim p$$

C. Silogismo Disyuntivo

$$\frac{p \vee q \quad \sim p}{\therefore q} \qquad (p \vee q) \wedge \sim p \to q$$

D. Silogismo Hipotético

$$\frac{p \to q \quad q \to r}{\therefore p \to r} \qquad (p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$$

Comprueba mediante la tabla de verdad y mediante la reducción al absurdo que estas inferencias son válidas.

FALACIAS

El razonamiento: *"Lunes es un día de la semana. Los días de la semana son 7. Por lo tanto, lunes es 7"*, es una falacia.

Las **falacias o sofismas**, son razonamientos aparentemente válidos, sin embargo, al ser sometidos a las reglas de la lógica no lo son:

Mencionaremos algunas falacias.

A. FALACIA DE ATINGENCIA

Las premisas carecen de conección lógica con la conclusión.

"Dios existe porque nadie ha demostrado lo contrario"

"Según la teoría de la relatividad, todo es relativo"

B. FALACIA DE AFIRMACION DEL CONSECUENTE

La inferencia (2) de la página 37: $(p \to q) \wedge q \to p$

C. FALACIA DE NEGACION DEL ANTECEDENTE

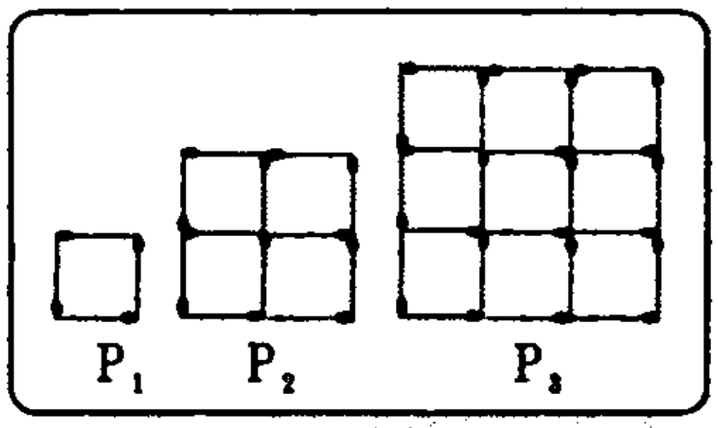
La inferencia (3) de la página 37 : $(p \to q) \wedge \sim p \to \sim q$

D. FALACIA DEL ESQUEMA DE CADENA FALSA

"Si estoy apurado paso por debajo de la escalera"
"Si estoy apurado puedo sufrir accidentes"
"Si sufro accidentes entonces tengo mala suerte"
"Por lo tanto, pasar por debajo de la escalera trae mala suerte".

Con palitos de fósforo

¿Cuántos palitos de fósforo son necesarios para formar la figura de la posición 10 siguiendo la secuencia mostrada?



A) 200 *B) 220* *C) 240*
D) 300 *E) 320*

$$\frac{p \to r \quad p \to q \quad r \to s}{\therefore q \to s}$$

1.6. Lógica de Clases

La lógica proposicional no se interesa por el significado de las proposiciones, solamente exige que tenga un valor de verdad.

La lógica de clases o lógica predicativa, intenta hacer un análisis interno de las proposiciones para determinar la validez de los razonamientos. Para ello vamos a dar el concepto de clase.

1.6.1. Clase y proposición categórica

La clase es una agrupación de elementos con alguna característica común. Por ejemplo: La clase de los mamíferos, la clase de los estudiantes, etc.

Dado dos clases, los elementos de una de ellas pueden estar o no, parcial o totalmente en la otra clase. Para expresar tales situaciones se utilizan proposiciones llamadas categóricas.

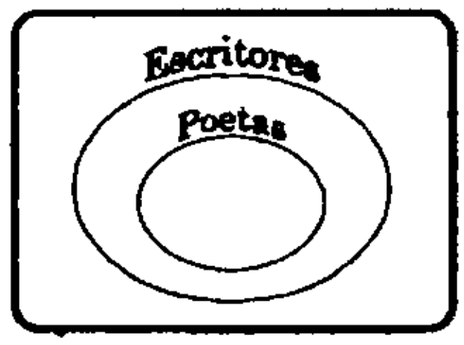
1.6.2. Clasificación de las proposiciones categóricas y representación gráfica

A. Según su cantidad

1. Universales: Todos los elementos de la clase sujeto son elemento de la clase predicado. E1

2. Particulares: Algunos elementos de la clase sujeto son elementos de la clase predicado. E2

Todo poeta es escritor E1

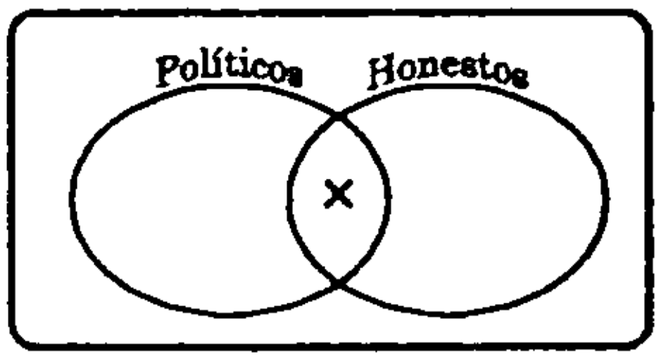


B. Según su cantidad

1. Afirmativos: Son aquellos en las que se afirma una relación

2. Negativas: Son aquellas en las que se niega una relación.

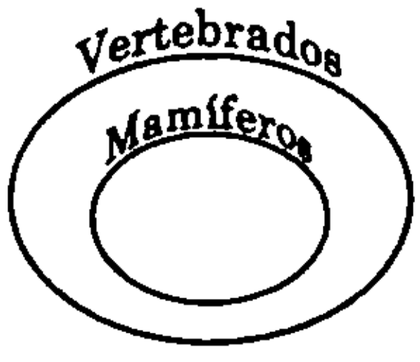
Algún político es honesto E2



Combinando la clasificación hecha arriba resultan los siguientes tipos de proposiciones categóricas.

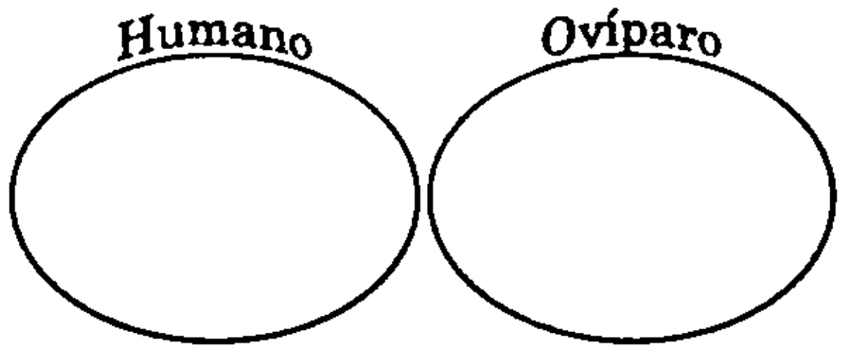
A. Universal afirmativa:

Todo mamífero es vertebrado



B. Universal negativa

Ningún humano es ovíparo

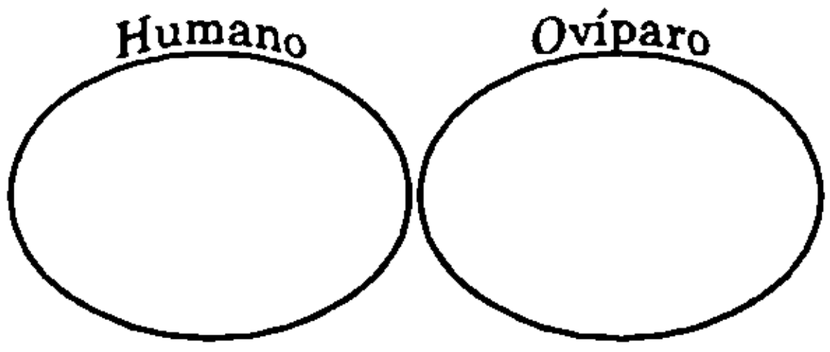


C. Particular afirmativa

Algún matemático es profesor

D. Particular Negativa

Algún científico no es religioso



1.6.3. Negación de las proposiciones categóricas

¿Cuál es la negación de la proposición "*Todas las aves vuelan*?

Recuerda que negar una proposición es cambiar su valor de verdad, si es verdadera su negación es falsa, y si es falsa su negación es verdadera.

Si la proposición "*Todas las aves vuelan*" fuera verdadera, ¿Cuándo se convertiría en falsa? ¿Sería necesario que ningún ave vuele? ¿No sería suficiente hallar un ave que no vuele?

En efecto, bastaría encontrar un ave que no vuele para que aquella proposición sea falsa. Por lo tanto su negación es "*algún ave no vuela*".

Proposición categórica	**Negación de la proposición categórica**
Todo humano es racional	Algún humano no es racional
Ningún humano es racional	Algún humano es racional
Algún humano es racional	Todo humano no es racional
Algún humano no es racional	Todo humano es racional

La negación de una proposición universal afirmativa es una proposición particular negativa. La negación de una proposición universal negativa es una proposición particular afirmativa y viceversa

Problema 1

La formalización correcta de la proposición: "Los niños son inocentes e inteligentes. No es cierto que, ellos no tengan padres o vayan a la escuela" es:

A) $(p \wedge q) \wedge (\sim r \vee s)$

B) $(p \vee q) \wedge \sim(r \vee s)$

C) $(p \wedge q) \wedge \sim(r \vee s)$

D) $(p \wedge q) \vee \sim(\sim r \vee s)$

E) $(p \wedge q) \wedge \sim(\sim r \vee s)$

Resolución

Para formalizar el enunciado verbal de una proposición, podríamos seguir los siguientes pasos.

1° Detectar conectores

e : $\wedge$ Punto : $\wedge$ No es cierto que : $\sim$

no : $\sim$: $\vee$

2° Sustituir por una variable cada proposición simple

p : los niños son inocentes

q : los niños son intelegentes

r : los niños tienen padres

s : los niños van a la escuela

3° Enlazar ordenadamente las proposiciones mediante los conectores, según la estructura del enunciado

$$(p \wedge q) \wedge \sim(\sim r \vee s)$$

Rpta.: E

Problema 2

Determinar la validez de la siguiente inferencia:

"Si llueve la carga llegará mojada y si la carga llega mojada es que ha llovido. Por lo tanto la carga llegará mojada si, y solo si ha llovido.

Resolución

Formalizando la inferencia.

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$$

Evaluando la validez:

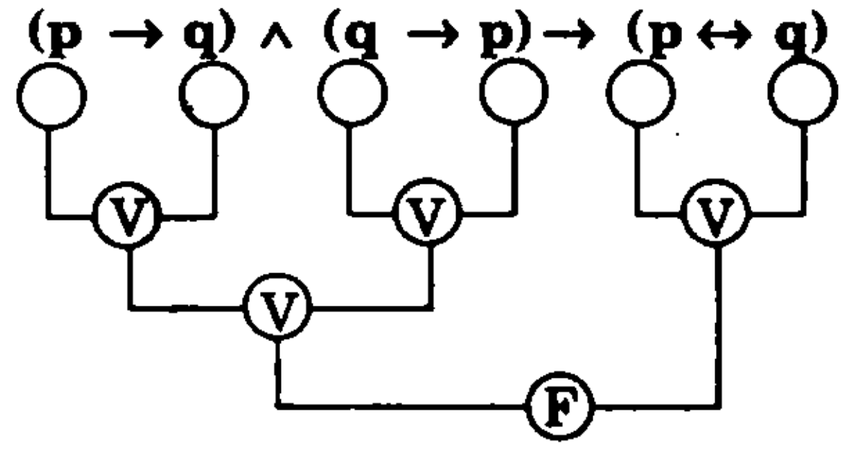
A. Por tabla de verdad

p	q	(p → q)	∧	(q → p)	→	(p ↔ q)
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V

El esquema de la inferencia es tautólogico, por consiguiente, es **válida**.

B. Por reducción al absurdo

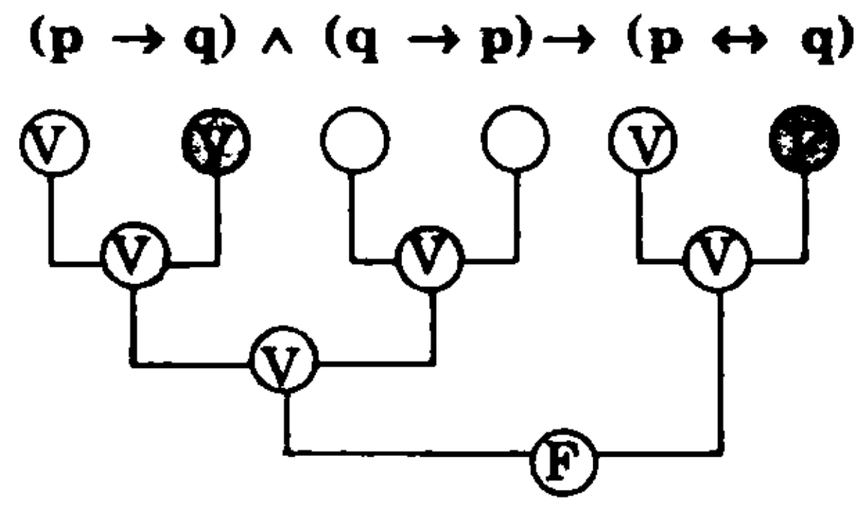
Suponiendo que el esquema es falso:



Una vez llegado aquí no hay forma de determinar el valor de verdad de p, ni de q, entonces en (p ↔ q) vamos a suponer que p es (V), entonces q es (F).

Trasladamos el valor de p = V a p → q, entonces q = V para que (p → q) sea V.

Entonces, el esquema resultaría:



En el mismo esquema, q no puede tener valores de verdad opuestos. Por lo tanto el esquema jamás tendrá un valor falso en su tabla de verdad. Todos los valores serán verdaderos, en consecuencia, es un esquema tautológico y la inferencia es válida.

C. Por inferencia notables

(p ↔ q) es una bicondicional que equivale a (p → q) ∧ (q → p), por lo tanto es una inferencia válida.

Problema 3

Evaluar cada una de las siguientes inferencias e indicar cuáles son válidas.

1) Si un alumno es estudioso, llega a ser profesional. Por lo tanto todos los profesionales han sido alumnos estudiosos.

2) Si solea en la mañana, en la tarde hace

viento. Hoy día en la tarde no ha hecho viento, por lo tanto no ha soleado en la mañana.

3) Si una persona es amable entonces es caritativa y las que son caritativas, tienen muchos amigos. Carmen tiene muchos amigos, entonces ella es amable.

4) Si Susana no contesta la llamada, entonces ha salido de casa o se quedó dormida. Pero ella no sale de casa a esta hora, entonces se ha quedado dormida.

Resolución

1) $(p \to q) \to (q \to p)$ (No válido)

2) $(p \to q) \wedge \sim q \to \sim p$ Válido (MTT)

3) $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge r \to p$ (No válido)

4) $[\sim p \to (q \vee r)] \wedge \sim q \to r$ (No válido)

Problema 4

Evaluar la siguiente inferencia:

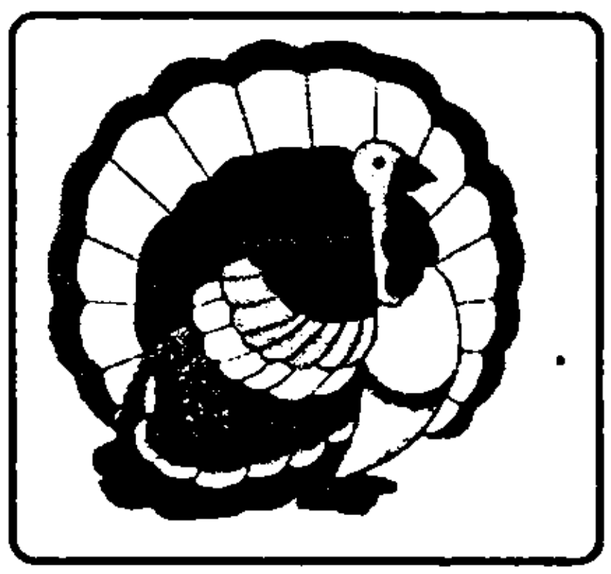
Ningún pájaro, excepto los pavos reales, se pavonea de su cola. Algunos pájaros que se pavonean de sus colas no saben cantar. Por lo tanto, algunos pavos reales no saben cantar.

Resolución

"Ningún pájaro, excepto los pavos reales" indica que los pavos reales son pájaros.

"Los pavos reales se pavonean de sus colas"

"Algunos pájaros que se pavonean de sus colas" se refieren a los pavos reales.



Por lo tanto, algunos pavos reales no saben cantar.

La inferencia es válida.

Problemas

1. ¿Cuáles de las siguientes inferencias son válidas

1) $p \wedge q \to q \vee p$

2) $(p \to q) \wedge (q \to p) \to p \vee q$

3) $(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$

4) $(p \vee \sim q) \wedge q \to p$

A) (1) y (2) **B)** Sólo (4) **C)** (1) y (4)
D) Todas **E)** Ninguna

2. Los chanchos son animales que vuelan. Ningún animal que vuela tiene cola.

La conclusión es:

A) Porky tiene cola entonces es un chancho.

B) Los pájaros no son chanchos, entonces vuelan.

C) Los animales que no tienen cola vuelan

D) Ningún chancho tiene cola.

E) Es posible que los chanchos vuelen.

3. Algunos arequipeños son profesores. Todos los profesores son inteligentes. ¿Cuál es la conclusión?

A) Todos los arequipeños son inteligentes.

B) Algunos arequipeños son inteligentes.

C) Algunos arequipeños no son inteligentes.

D) Mariano es arequipeño, entonces es inteligente.

E) Ramiro es profesor entonces es arequipeño.

4. ***La conclusión de las premisas: Ninguno de los que van a la playa estudia. Todos los que estudian ingresan.***

Algunos de los que ingresan corren tabla; es:

A) Todos los que ingresan estudian.

B) Algunos de los que ingresan van a la playa.

C) Algunos de los que estudian corren tabla.

D) Algunos de los que ingresan no estudian.

E) Los que corren tabla van a la playa.

5. ***Ningún mortal vive mil años. Todos los hombres son mortales.***

La conclusión de estas premisas es:

A) Si Sócrates es mortal, Sócrates es hombre.

B) Si Sócrates vivió mil años, no fue hombre.

C) Si Sócrates no fue hombre, vivió mil años.

D) Si Sócrates es inmortal, vivirá mil años.

E) Todas son correctas.

6. ***Si sale el Sol, voy a la playa. Esta premisa se hace una afirmación válida con:***

A) Si voy a la playa, salió Sol.

B) Si no sale el Sol, no voy a la playa.

C) Si no voy a la playa, no salió el Sol.

D) Si sale el Sol, no voy a la playa.

E) Más de una es correcta.

7. ***Hallar la negación de las siguientes afirmaciones:***

"Todos los patos vuelan"

A) Algunos patos vuelan.

B) Ningún pato vuela.

C) Algunos patos no vuelan.

D) Ningún pato no vuelan.

E) Por lo menos un pato vuela.

8. ***La negación de la proposición categórica "Ningún economista es contador" es:***

A) Algún economista es contador.

B) Algún economista no es contador.

C) Todos los economistas son contadores.

D) Ningún contador es economista.

E) Todos los economistas no son contadores.

9. ***"Ningún perro no odia a los gatos"***

A) Todos los perros odian a los gatos.

B) Algunos perros odian a los gatos.

C) Ningún gato odia a los perros.

D) Todos los perros no odian a los gatos.

E) Algunos perros no odian a los gatos

PARADOJAS

En la lógica proposicional, una oración es considerada una proposición, si es posible calificarla de falsa o verdadera. Además, si una proposición es verdadera, su negación es falsa y viceversa. Sin embargo hay ciertas proposiciones que no obedecen la última regla; por ejemplo, ***"esta proposición tiene seis palabras"***, la cual es **falsa**. Su negación sería, ***"esta proposición no tiene seis palabras"*** la cual también es **falsa**. De manera que hemos descubierto una proposición falsa cuya negación también es falsa. Esto es una **contradicción** a las reglas estudiadas.

En el transcurso del desarrollo de la ciencia, en particular de la matemática, el hombre siempre ha sido de la tendencia de construir "reglas" o "leyes" perfectas, que pudieran ser aplicables infaliblemente a todo cuanto sea de su alcance, pero toda regla o sistemas de reglas han llegado a un punto en el cual aparecen "contradicciones" como la citada. Estas contradicciones se llaman **paradojas**.

Las paradojas han marcado etapas importantes en la historia de la matemática. Al presentarse como situaciones "inesperadas" en la aplicación de ciertos sistemas matemáticos, han permitido que éstas se "esfuercen" por resolver las contradicciones, ya sea mejorando el sistema en cuestión o dando lugar a nuevos sistemas matemáticos.

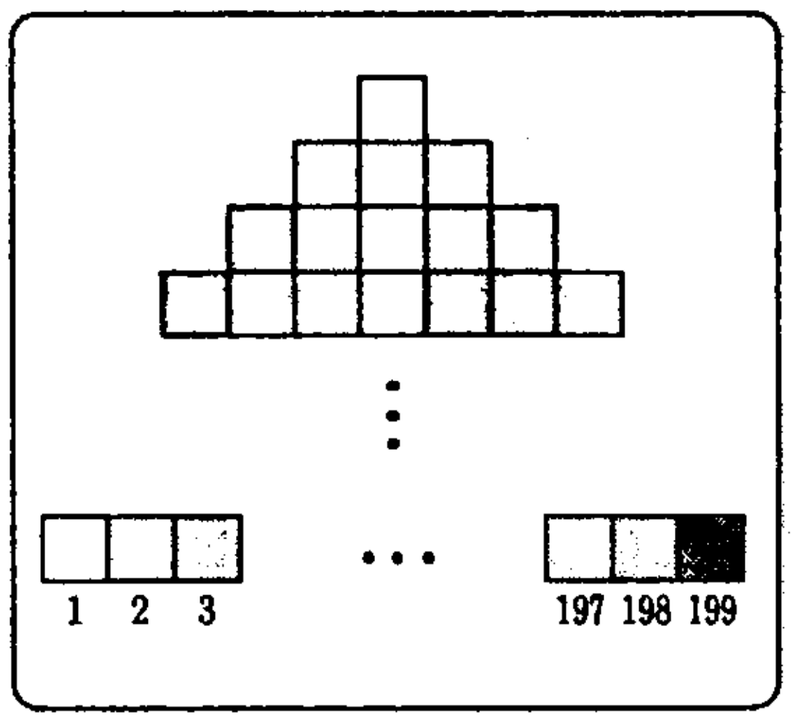
Otro ejemplo de una paradoja es la proposición **"todo lo que digo es mentira". Total, ¿es verdad o mentira?**. Aceptemos que es verdad "todo lo que digo es mentira", en consecuencia lo que acabo de decir, también debe ser mentira, es decir, "Todo lo que digo es mentira" debe ser mentira, o sea falso. Esta conclusión contradice a la premisa de la cual partimos. Podemos continuar analizando esta paradoja en la forma como lo estamos haciendo, pero entraremos a un círculo en el que en una vuelta la misma proposición resulta verdadera y en la otra, falsa.

Otras paradojas dignas de mencionar, son: **la paradoja del puente**, que trata de un diablo adueñado de un puente que deja pasar sólo todo aquel que sea capaz de responderle correctamente a la pregunta que él hiciera y era ahorcado si la respuesta fuera equivocada. Un día se presentó un hombre queriendo pasar por el puente, el diablo le preguntó - ¿Adónde vas? – el hombre respon-

Torre de cajas

Con el fin de figurar en el libro de Gines, los jóvenes del colegio "Tío Tom" han formado una torre de cajas, como la de la ilustración.

En el momento de la inscripción, el representante del colegio no recuerda cuántas cajas habían utilizado; sólo recuerda que en la base habían 200 cajas. Por favor ayúdale, sino, no podrán inscribirse en el libro de Gines



Carrera de caballo

Dos jinetes deben competir, pero con la condición de que el ganador será el dueño del caballo que llegue en segundo lugar. ¿Qué deben hacer para que exista un ganador?

dió– voy a sér ahorcado. ¿Qué debe hacer el diablo?.

La Paradoja de Russell: "el conjunto de los conjuntos que no están incluidos en sí mismos, ¿está incluido en sí mismo?".

Aquí hay algunas otras "Toda regla tiene su excepción". "Un político afirma que todos los políticos son mentirosos", ¿se le puede creer lo que dice?

"Nunca digo la verdad".

Una paradoja matemática bastante conocida es:

$$x = 2 - 2 + 2 - 2 + 2 - \ldots \infty$$

¿Qué valor tiene x?

- Si la cantidad de sumandos 2 fuera par:

$$x = (2-2)+(2-2)+(2-2)+\ldots$$

$$x = 0 + 0 + 0 + \ldots$$

$$x = 0$$

El valor de x resulta cero. Luego $\boldsymbol{x = 0}$

- Si la cantidad de sumandos fuera impar, tras eliminarse las parejas tal como en el caso anterior, quedaría un 2, el cual sería el valor de x. Luego : $\boldsymbol{x = 2}$

- Puesto que son infinitos términos, no podemos hablar de un número par o impar de sumandos, en consecuencia busquemos una solución general:

$$x = 2 - 2 + 2 - 2 + \ldots \infty$$

$$x = 2 - (\underbrace{2 - 2 + 2 - 2 + \ldots \infty}_{x})$$

$$x = 2 - x$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

¿Cuál de las soluciones es la correcta? Tal vez la solución matemáticamente coherente sea la última, pero cómo es que al operar

$$2 - 2 + 2 - 2 + 2 - \ldots$$

indefinidamente obtenga 1?

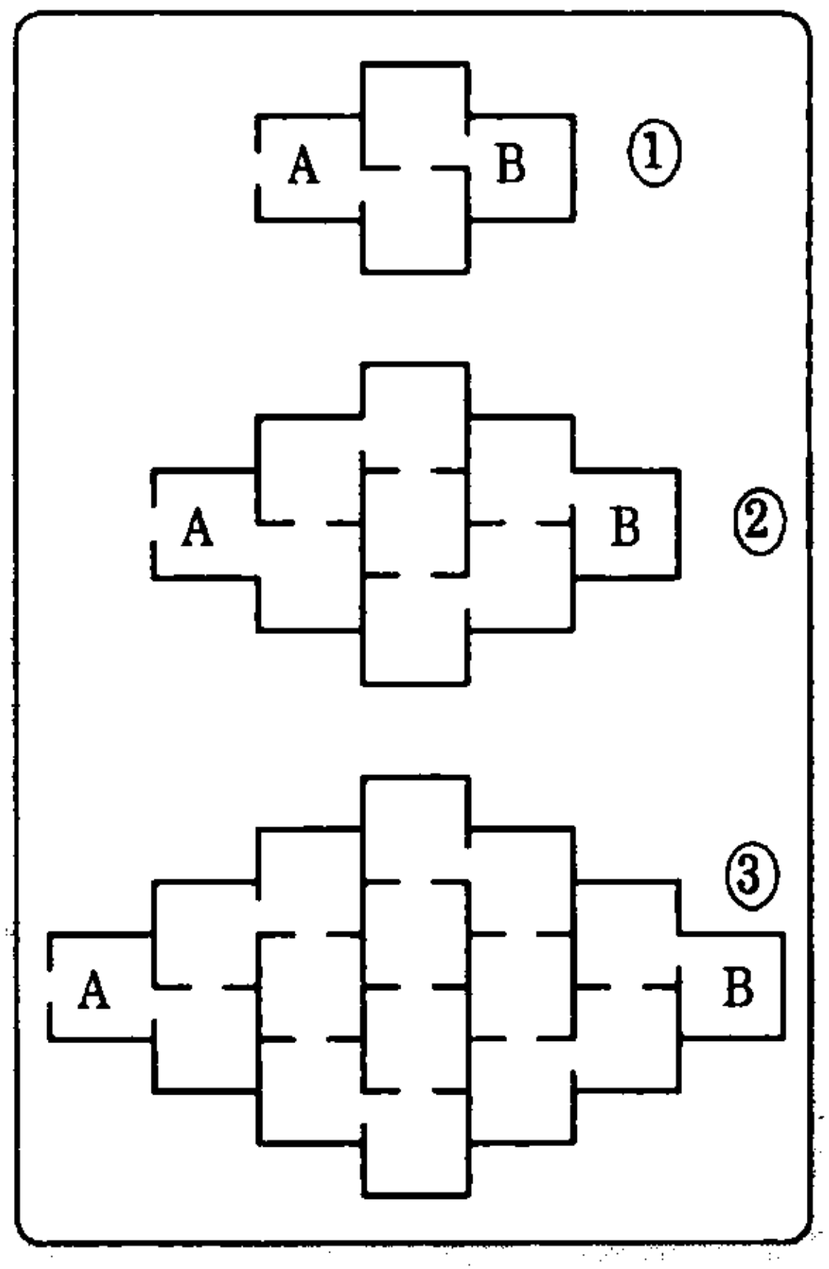
Muchas de las paradojas, aún no se han resuelto satisfactoriamente. La búsqueda de la solución o explicación a las paradojas, ha dado lugar al descubrimiento de nuevos sistemas matemáticos.

El rescate de la princesa

En el extremo de un gran laberinto, en una habitación signada con la letra B, se encuentra la princesa K-Tita. Si el laberinto fuera como ***1*** *estando el príncipe en la habitación A, bastaría atravesar* ***3*** *puertas para llegar hasta la princesa. Si fuera como* ***2****, tendría que cruzar 8 puertas; etc.*

Dibujando los laberintos, siguiendo la secuencia mostrada, el que alberga a la prisionera estaría en la posición 50.

Estando en la habitación A ¿cuántas puertas tendrá que atravesar el príncipe para llegar a la princesa K-Tita y rescatarla antes de que las ratas den cuenta de ella?



Problemas Resueltos

Problema 1

¿Quién pesa más?

Hugo : *Yo peso más que Nole*
Tito : *Yo peso menos que Chito*
Coco : *Yo peso 1 kg más que Chito*
Nole : *Tito pesa más que Hugo*

Resolución

① ② ③ ④

H > N; CH > T; C > CH; T > H

Ordenando: C > CH > T > H > N

③ ② ④ ①

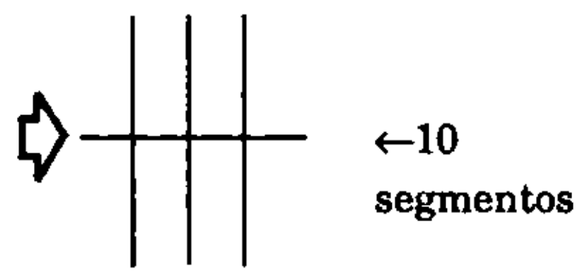
Rpta.: Coco

Problema 2

Aparte de los tres segmentos que se muestran, ¿cuántos segmentos adicionales debemos trazar mínimamente para obtener 19 segmentos en total?

Resolución

Figura	# de segmentos
1	1
1,2	3
1,2,3	6
1,2,3,4	10

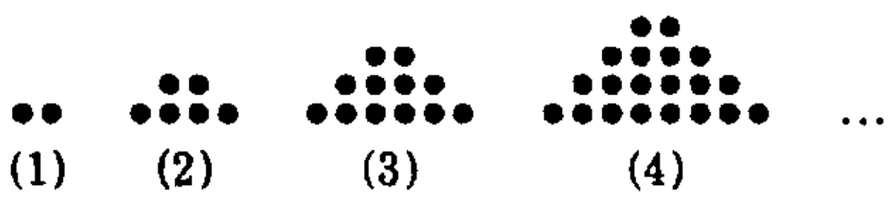


Trazando un solo segmento adicional hemos conseguido un total de 19 segmentos.

Rpta.: 1

Problema 3

¿Cuántos puntos hay en la posición 500 de la siguiente secuencia?



Resolución

Posición	# Puntos
1	2
2	6
3	12
4	20
⋮	⋮

¿Qué relación hay entre los números de la primera columna y los de la segunda? ¿Qué relación hay entre 2 y 1; 6 y 2; 12 y 3, etc.? Vemos que 2 es doble de 1, pero 6 no lo es de 2. Seis es triple de 2.

Entonces, sospechamos que la secuencia, podría ser: 2 es **doble** de 1; 6 es **triple** de 2; por consiguiente 12 debe ser **cuádruplo** de 3. Y lo es.

Descubierta la regla que vincula los números de ambas columnas, estamos en la capacidad de enunciar una "ley": "*Conociendo el número que indica la posición, el número de puntos que hay en ella, se obtiene multiplicando el número por su consecutivo.*

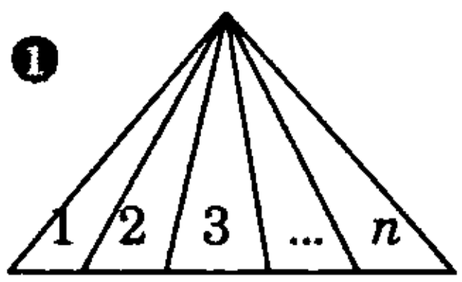
Posición	# Puntos
1	2 = 1×2
2	6 = 2×3
3	12 = 3×4
⋮	⋮
500	500×501
	= 250500

Rpta.: 250 500

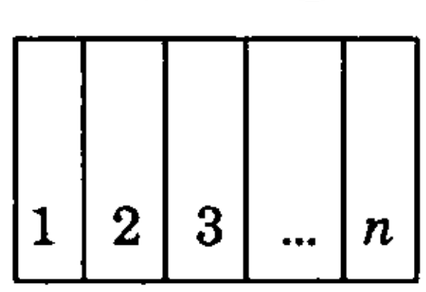
Problema 4

En la figura ① hay 210 triángulos ¿Cuántos cuadriláteros hay en la figura ② ?

❶



❷



Resolución

Figura 1	#Triángulos
	1
	3
	6
	⋮

Figura i	# Rectángulos
1	1
1 2	3
1 2 3	6
⋮	⋮

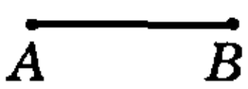
La obtención del número de cuadriláteros, es equivalente al de los triángulos. Por tanto, en la figura ② hay también 210 cuadriláteros.

Rpta: 210

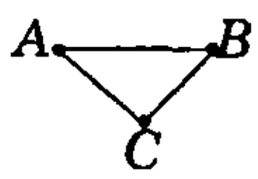
Problema 5

Dos amigos se saludan con un apretón de manos. Tres amigos se saludan con 3 apretones de mano, 4 amigos con 6 apretones de mano ¿Con cuántos apretones de mano se saludan 201 amigos?

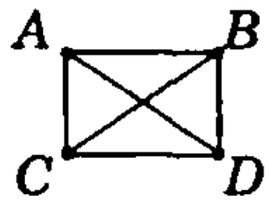
Saludo de 2 amigos



Saludo de 3 amigos



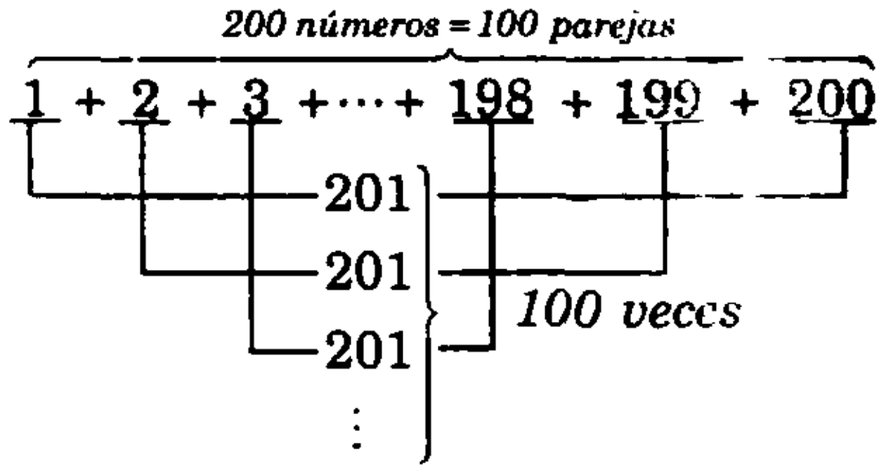
Saludo de 4 amigos



Resolución

Las figuras describen cualitativamente algunos eventos, pero tienen sus limitaciones. Para trascender estas limitaciones, entran a tallar los números. De las observaciones **cualitativas**, debemos ser capaces de sacar conclusiones **cuantitativas**.

# Personas	# de saludos
1	0
2	1 = 1
3	3 = 1 + 2
4	6 = 1 + 2 + 3
5	10 = 1 + 2 + 3 + 4
⋮	⋮
201	$S = 1 + 2 + 3 + ... + 200$



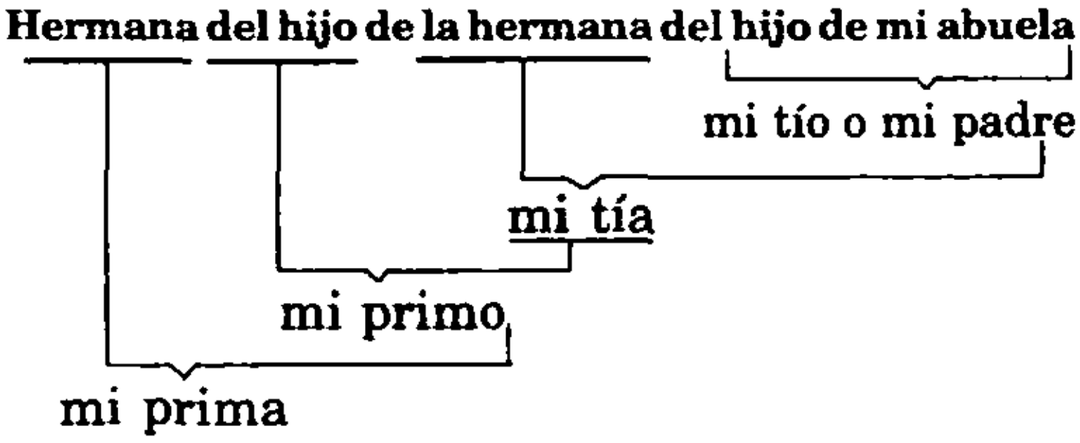
$\therefore \quad S = 100 \times 201 = 20100$

Rpta.: 20 100

Problema 6

¿Qué parentesco tiene conmigo, la hermana del hijo de la hermana del hijo de mi abuela?

Resolución



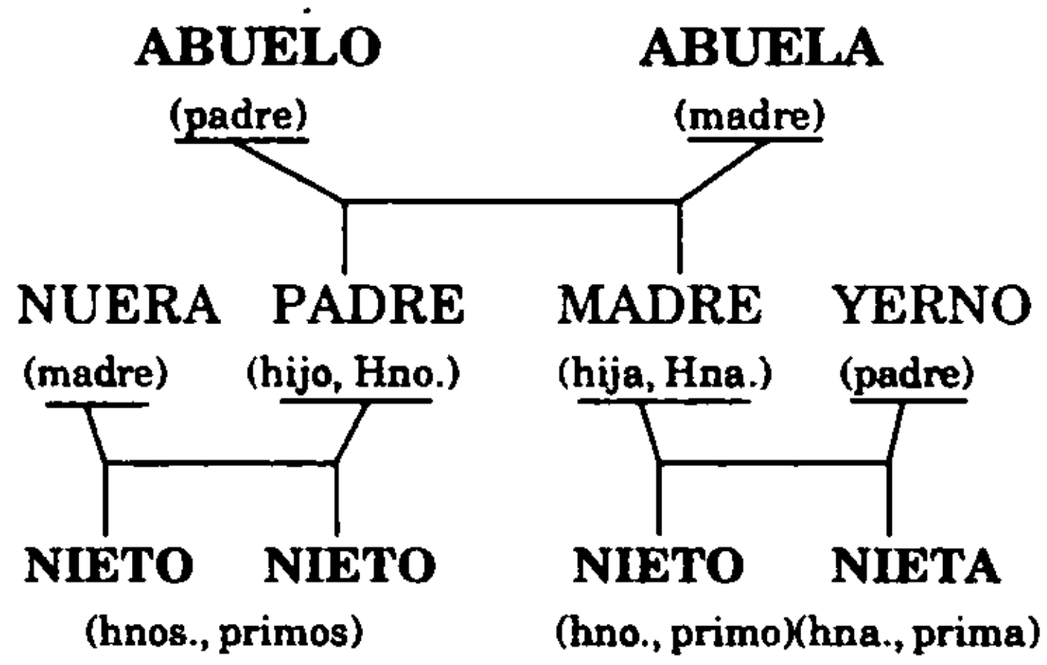
Rpta.: Mi prima

Problema 7

En una reunión familiar, están presentes: 1 abuelo, 1 abuela, 3 padres, 3 madres, una nuera, 1 yerno, 4 hermanos, 2 hermanas, 3 nietos, 1 nieta, 3 primos y 1 prima. Mínimamente, ¿cuántas personas están reunidas?

Resolución

Para resolver este tipo de problemas, es preciso tener en cuenta, que un mismo miembro de la familia tiene distintos tipos de parentesco con los miembros restantes.



Rpta.: 10 personas

Problema 8

En cierta asociación cada miembro era aliancista o de la U. Un día uno de la U se hizo aliancista, y después de que esto hubiera sucedido, había el mismo número de miembros aliancistas que los de la U. Semanas más tarde el nuevo aliancista decidió volverse hincha de la U otra vez, y así las cosas volvieron a la normalidad. Entonces otro aliancista decidió hacerse de la U, punto en el cual había el doble de la U que de aliancistas.

¿Cuántos miembros tenía la asociación?

Resolución

• De dos grupos, uno con más miembros que el otro, cuando un miembro se pasa del grupo mayor al menor, la diferencia entre el número de miembros disminuye en 2, cuando el pase es inverso, la diferencia aumenta en 2.

• Tras el primer cambio, la diferencia se reduce a cero. Se deduce entonces que los de la U tienen 2 miembros más que los aliancistas.

Tras el pase del aliancista al grupo de la U, la diferencia debió incrementarse a 4. Ahora los miembros de la U para satisfacer la última condición son dos veces esta diferencia, o sea ocho y los aliancistas que quedan, cuatro.

Rpta.: 12

Problema 9

Una de las chicas: Ana, Karen o Ivón tiene ojos negros, las otras dos tienen ojos verdes. Las chicas de ojos verdes siempre mienten, en cambio la de los ojos negros siempre dicen la verdad.

Estando las chicas con los ojos vendados; Marcos debe determinar el color de ojos de cada una, haciendo tres preguntas.

Marcos: *¿De qué color son tus ojos Ana? – Ana le contesta en Alemán, idioma que no conoce Marcos.*

Marcos: *Karen ¿qué dijo Ana?*

Karen: *dijo que tiene los ojos verdes*

Marcos: *Ivón, ¿es cierto lo que dijo Karen?*

Ivón: *Karen ha dicho la verdad*

¿Puedes ayudar a Marcos?

Resolución

• **Ante la pregunta:** *¿De qué color son tus ojos?*

Respuesta {
Si tiene ojos negros (dice la verdad): ***Negros***
Si tiene ojos verdes (siempre miente): ***Negros***

• Se deduce que Ana dijo "negros", entonces Karen miente (tiene ojos verdes). Ivón respalda la mentira de Karen, en consecuencia tiene ojos verdes. La única de ojos negros, entonces es Ana.

Problema 10

Un periodista, no con buenas intenciones ha publicado los siguientes datos, intercambiando los datos fidedignos

	MARZO	ABRIL	MAYO
Inflación (%)	2,5	1,1	1,0
Dólar (S/.)	6,2	5,2	1,0
Pasaje Urbano	2,5	2,6	3,0

Menos mal que hemos podido obtener algunas informaciones reales, con los cuales te pedimos "arreglar" el cuadro anterior:

1. *La inflación nunca bajó a menos del 3% y fue siempre ascendente*
2. *El pasaje en Abril fue mayor que en Marzo*
3. *El dólar descendió en Mayo respecto a Abril.*
4. *El dólar siempre se mantuvo por encima de 2 soles.*

Resolución

- Según (1), inflación: 3,0; 5,2 y 6,2 (en este orden)
- Según (4) y (3), dólar: 2,5; 2,6 y 2,5 en este orden)
- Por consiguiente y (2), pasaje urbano: 1,0; 1,1 y 1,0 (en este orden)

Resumen:

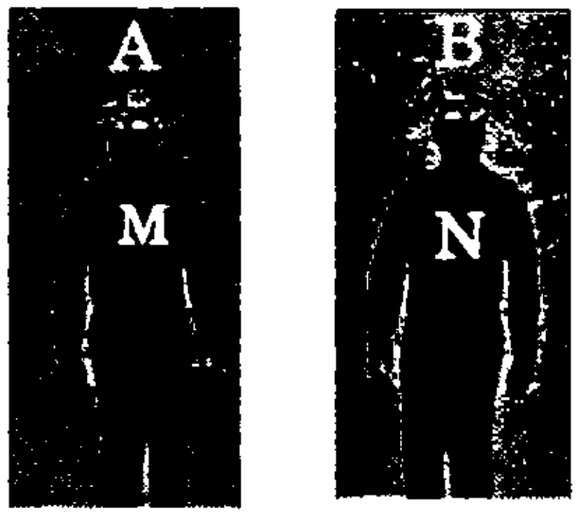
	MARZO	ABRIL	MAYO
Inflación (%)	3,0	5,2	6,2
Dólar (S/.)	2,5	2,6	2,5
Pasaje Urb. (S/.)	1,0	1,1	1,0

Problema 11

Muerte o libertad

Un preso condenado a la pena de muerte, tiene una oportunidad de salvar su vida, si es capaz de resolver el siguiente problema. El Juez, mostrándole dos puertas, cada una cuidada por un guardia, le dijo:

"Una de estas puertas conduce a la libertad y la otra a la silla eléctrica; los guardias las conocen, solo que uno de ellos siempre miente y el otro guardia siempre dice la verdad. Tienes la opción de hacer una sola pregunta a uno de ellos". Tras unos minutos de titubeo, el reo preguntó al guardia N:



- Si le preguntó al guardia M, cuál de las puertas conduce a la libertad, ¿qué me responderá?

- Te dirá que la puerta B —respondió el custodio. Luego de oír la respuesta, el preso se encaminó con toda seguridad hacia la "puerta de la vida" y salió libre. ¿Por cuál de las puertas salió?

Resolución

Sea veraz o mentiroso, la puerta señalada como de la libertad es la que conduce a la silla eléctrica. Por lo tanto salió por la puerta **A**. La respuesta opuesta a la realidad, se debe a que el mentiroso modifica el sentido de la respuesta sea al dar la respuesta o al modificar la respuesta del veraz.

Problema 12

La muestra de artes y oficios

En la muestra anual de artes y oficios, seis expositores, cinco mujeres y un hombre, entre los cuales se incluye un soplador de vidrio, exhiben sus obras en sus puestos respectivos. Al terminar la exposición, intentan entre ellos una serie de intercambios amistosos. Basándose en las pistas siguientes, ¿serías capaz de averiguar cuál es el arte que practica cada uno, quién hizo algún intercambio y con quién lo hizo?

1. *Julia intentó hacer trato con Laura y un trato con la persona que teje y acabó por ponerse de acuerdo con una de ellas.*

2. *Pedro no es ceramista.*
3. *Marta no hace patchwork.*
4. *Isa no es escultora en madera ni tejedora.*
5. *Según los acuerdos finales, la ceramista intercambió dos de sus piezas, cada una con una persona diferente; cuatro de los seis expositores —Julia, Isa, la persona que hace joyas y la mejor que hace patchwork —intervinieron en un intercambio, y Olivia no intervino en ninguno. (Nota: Esta pista menciona a los seis expositores) (Virginia C. Mc Carthy)*

Resolución

Sabemos por la pista 5 que las seis personas son: la que se dedica a la cerámica, Julia, Isa, la persona que hace joyas, la mujer que hace patchwork y Olivia. Pedro no es ceramista (pista 2), ni puede ser la mujer que hace patchwork, por lo tanto, es el que hace joyas. Marta no hace patchwork (pista 3), luego es la ceramista y, por eliminación, es Laura la que hace patchwork. Ni Julia (pista 1), ni Isa (pista 4) son tejedoras; por consiguiente, la tejedora es Olivia. Isa no talla madera (pista 4); la talla Julia, e Isa trabaja el cristal. El intercambio de tejidos de Julia no tuvo lugar con Olivia, que no hizo ningún intercambio (pista 5). Tuvo lugar con Laura (pista 1). Según la pista 5, Marta hizo dos intercambios, uno con Isa y otro con Pedro.

En resumen:

Julia (madera) intercambió con **Laura** (patchwork).

Marta (cerámica) intercambió con **Pedro** (joyas) y con **Isa** (vidrio).

Olivia (telar) no intercambió con nadie.

Problema 13

Cinco niños, todos de edades distintas, comprendidas entre los tres y los siete años, viven en la misma casa de la calle del Olmo. Partiendo de las pistas siguientes, ¿podría encontrar los nombres completos y las edades de los cincos niños?

1. *Todos los sábados por la tarde, la señora Parga se va a trabajar y deja a sus hijos con la señora Ribas, cuya hija es más joven que los niños de la señora Parga.*
2. *Tina es mayor que Luis y más joven que el niño (o la niña) cuyo apellido es Pla.*
3. *La niña apellidada Torres es de dos años mayor que Lisa.*
4. *La madre de Rita, que a veces se queda en casa los sábados por la tarde, se encarga de vez en cuando de Toni mientras que la madre de éste sale de compras.*

***Nota**: Fíjese en que, según la pista 1, hay dos niños apellidados Parga. Por lo tanto, la columna de Parga ha de llevar dos puntos para indicar los nombres de pila de los hermanos. (Virginia C. Mc Carthy)*

Resolución

De acuerdo con la pista 1, la señora Parga, que tiene más de un hijo, trabaja todos los sábados por la tarde, mientras que la señora Ribas, que tiene una hija, siempre se queda en casa ese día por la tarde. La pista 4 describe a las otras dos mujeres, la madre de Rita, que a veces se queda en casa los sábados por la tarde (y que, por lo tanto no puede ser ni la señora Parga ni la señora Ribas), y la madre de Toni, que a veces sale de compras los sábados por la tarde (y que, por el mismo motivo que el anterior , tampoco puede ser ni la señora Parga ni la señora Ribas). Puesto que hay cinco niños en la casa, la señora Parga ha de tener dos hijos, y las otras tres madres uno cada una, esto es, los cinco niños son: Los dos que se apellidan Parga, la niña que se apellida Ribas, Rita y Toni. El apellido de Toni no es Torres, puesto que la señora Torres tiene una hija (pista 3) de modo que Toni se apellida Pla, y Rita se apellida Torres. Se nos ha dicho que todos los niños tienen edades distintas, comprendidas entre los tres y siete años. El que tiene tres

años no es ni uno de los hijos de la señora Parga (pista 1) , ni Toni Pla (pista 2), ni Rita Torres (pista 3). Así que tiene que ser la niña apellidada Ribas, que no se llama Tina (pista 2) y que, por consiguiente se llama Lisa. Rita Torres es, pues, la que tiene cinco años (pista 3). Y según la pista 2, Toni Pla, Tina y Luis, han de tener respectivamente siete, seis y cuatro años. Tina y Luis, por eliminación, son los hermanos Gray.

Resumiendo:

Toni Pla, siete años.
Tina Parga, seis años.
Rita Torres, cinco años.
Luis Parga, cuatro años.
Lisa Ribas, tres años.

Problema 14

La carrera de caballos

En la primera carrera de la temporada intervinieron diez jinetes, incluidos Amelia Coll y Armando. Basándose en las pistas siguientes, ¿podría determinar el nombre completo de todos los jinetes, el caballo que montó cada uno (uno se llama Estrellita) y el puesto que consiguieron en la carrera?

1. *Los que acabaron del primero al quinto puesto fueron, respectivamente: Roura, que montaba a Afortunado, Saenz, Elisa, Prol y Cortés.*
2. *El caballo de Lamas (que no era Flecha Roja) acabó en último lugar, un morro detrás que Esperanza Mía.*
3. *Gonzáles acabó cinco puestos por delante que Soledad.*
4. *Aldebarán llegó dos puestos detrás del caballo de Salvador y dos puestos delante del caballo montando por el señor Nuevo.*
5. *Pablo y Jacinto montaron a Flecha Roja y Sibarita, aunque no forzosamente en este orden; Pablo acabo la carrera delante de Jacinto.*
6. *Príncipe Negro, el caballo de Eloy, Zapaquilda y el caballo de Larra acabaron consecutivamente, en el orden dado.*
7. *El caballo de Joaquín acabó directamente delante de Buen Chico, que acabó dos puestos delante del caballo montado por Ramiro.*
8. *El caballo del señor Conde acabó delante de Soberbia.*

(Cheryl Mc Laughlin)

Resolución

Según las pistas 1 y 2, Roura montó a Afortunado y llegó primero, Saenz fue el segundo, Elisa la tercera, Prol el cuarto, Cortés el quinto, Esperanza Mía el noveno y Lamas el décimo. Según la clave 3, Gonzáles tuvo que estar entre los cinco primeros y ha de ser, por lo tanto, Elisa, mientras que soledad se clasificó octava. Los tres caballos a que se refiere la pista 4 no puede haberse clasificado primero, tercero y quinto, puesto que Cortés se clasificó quinto. Tampoco pudieron clasificarse tercero, quinto y séptimo, puesto que Elisa se clasificó la tercera; ni cuarto, sexto y octavo, puesto que Soledad se clasificó octava; ni sexto, octavo y décimo, puesto que Lamas se clasificó décimo. Si se hubiera clasificado quinto, séptimo y noveno, eso significaría que el señor Conde (mencionado en la pista 8) y Amelia Coll (mencionada en el planteamiento) fueron el sexto y el séptimo (sin ningún orden determinado). El apellido de Soledad sería entonces Larra (por eliminación) y se habría clasificado inmediatamente detrás de Aldebarán. Pero esto contradice la pista 6, de forma que los caballos de la pista 4 tuvieron que llegar el segundo, el cuarto y sexto. Por consiguiente, Salvador es Saenz, Prol montó a Aldebarán, y Nuevo terminó el sexto. Amelia Coll acabó la séptima o la novena, lo mismo que el señor Conde, luego el apellido de Soledad es Larra. Entonces, según la pista 6, Nuevo montó a Príncipe Negro y Zapaquilda, montada por Eloy, llegó en séptimo lugar. Eloy tiene que ser el señor

Conde, mientras que Amelia Coll montó a Esperanza Mía. Según la pista 7, la única posibilidad es que Joaquín fuese el primero, Buen Chico fuese el segundo y Ramiro terminase en cuarto lugar. Según la pista 5, Pablo tuvo que terminar el quinto y Jacinto el décimo. Jacinto Lamas montó a Sibarita, mientras que Pablo montó a Flecha Roja (pista 2). Por eliminación, el jinete de Príncipe Negro fue Armando. Soberbia acabó en octavo lugar (pista 8) y Elisa Gonzáles, por eliminación, montó a Estrellita.

En resumen:

1° Joaquín Roura, Afortunado.
2° Salvador Saenz, Buen Chico.
3° Elisa Conzáles, Estrellita.
4° Ramiro Prol, Aldebarán.
5° Pablo Cortés, Flecha Roja.
6° Armando Nuevo, Príncipe Negro.
7° Eloy Conde, Zapaquilda.
8° Soledad Larra, Soberbia.
9° Amelia Coll, Esperanza Mía.
10° Jacinto Lamas, Sibarita.

Problema 15

Las tres publicaciones diarias de la ciudad, que aparecen de lunes a sábado, tienen dos secciones especiales que se incluyen sólo en ciertos días. Ninguno de los periódicos tienen las mismas secciones especiales. Cada uno de ellos presenta uno o ambas de su secciones en tres días determinados, mientras que los otros tres se limitan a publicar las secciones corrientes. A partir de las pistas siguientes, ¿podría encontrar los temas especiales publicados por cada periódico (uno es El Imparcial) y los días en que aparece cada tema?

1. *El martes, sólo El Nacional, que incluye una sección sobre alimentación, publica algo más que las secciones habituales.*
2. *La sección de economía aparece tres veces por semana, la de tráfico únicamente el miércoles, y cada uno de los otros temas, dos veces por semana.*
3. *Todos los días se publica un par de temas distinto; por ejemplo, el teatro y la música se publican el sábado, aunque en periódicos distintos.*
4. *El Liberal publica secciones especiales, además de las habituales, el lunes, el jueves y el sábado, y es el único periódico en que ocurre así el jueves.*
5. *Las noticias de sociedad y de teatro no aparecen en el mismo periódico. (Evelyn B. Rosenthal)*

Resolución

Hay precisamente dos secciones especiales que aparecen cada día (pista 3). El martes, *El Nacional* publica noticias sobre alimentación y su segundo tema especial, puesto que ningún otro periódico publica una sección especial en ese día (pista 1). Los días en que *El Liberal* publica secciones especiales son el lunes, jueves y el sábado y, teniendo en cuenta que ninguno de los otros dos periódicos tiene una sección especial el jueves (pista 4), las dos secciones especiales de *El Liberal* aparecen ese día. Dado que las noticias de economía se publican tres veces por semana (pista 2), pero no el sábado (pista 3), la economía no es uno de los temas de *El Liberal*. Tampoco lo es del tráfico (pista 2). Por lo tanto, *El Liberal* tiene que publicar una sección sobre música o teatro el sábado, publicando la otra un periódico distinto (pista 3), y su segundo tema especial tiene que ser las noticias de sociedad. Su sección del sábado es, por consiguiente, la música (pista 5), publica ambas secciones el jueves y, teniendo en cuenta que ambos temas se publican dos veces por semana (pista 2), publica también las noticias de sociedad el lunes. Si el segundo tema especial de *El Nacional* fuera la economía –es decir, si publicase las noticias sobre alimentación y sobre economía el martes– y teniendo en cuenta que la sec-

ción de alimentación se publica dos veces a la semana y la de economía tres veces (pista 2), habría un segundo día en que se publicasen a la vez las secciones de alimentación y economía, contradiciendo la pista 3.

En consecuencia *El Imparcial* publica noticias sobre economía el lunes, el miércoles y el viernes, y es *El Nacional* el que publica la sección de teatro el sábado (y también el martes). La única sección sobre tráfico que se publica el miércoles (pista 2) tiene que aparecer en *El Imparcial*. La segunda sección especial que se publica el viernes ha de ser las noticias sobre alimentación, publicadas en *El Nacional*.

En resumen:

	El Imparcial	**El Liberal**	**El Nacional**
Lunes	Economía	Sociedad	
Martes			Alimentación, teatro
Miércoles	Economía, Viajes		
Jueves		Música, sociedad	
Viernes	Economía		Alimentación
Sábado		Música	Teatro

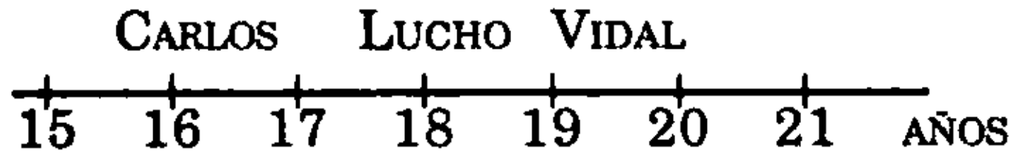
Problema 16

Lucho tiene 18 años. Vidal nació 2 años después de Isabel y 4 años antes que Pepe. Si Lucho es mayor que Carlos en 2 años y menor que Vidal en 1 año. Hallar la edad de cada uno.

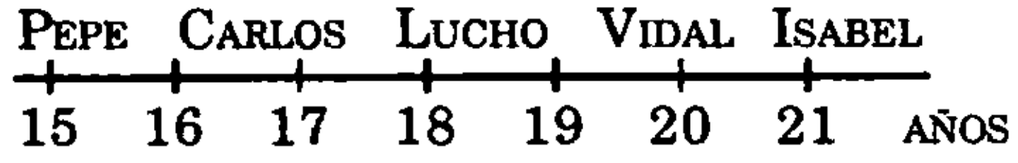
Resolución

Para ordenar la información, es suficiente disponer los datos con la ayuda de un esquema, que inicialmente pueden ser esquemas separados para cada premisa y luego ir acoplando según se va deduciendo las conclusiones.

- Lucho tiene 18 años
- Lucho es mayor que Carlos en 2 años y menor que Vidal en una año:



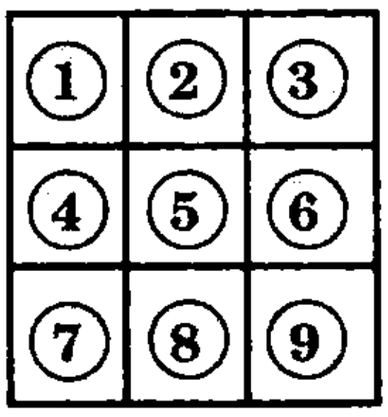
- Vidal nació 2 años después de Isabel y 4 años antes que Pepe:



Rpta.: Pepe (15), Lucho (18), Vidal (19) e Isabel (21)

Problema 17

En una gran zona comercial, 9 bancos A, B, C, D, E, F, G, H e I ocupan cada una de las 9 cuadras contiguas, cuya disposición se muestra en el gráfico adjunto.

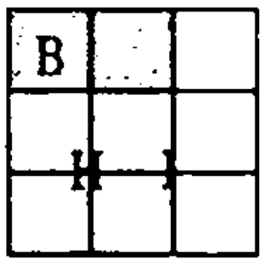


1. *El banco C está al NE del banco G*
2. *El banco H está al Sur de B y al Oeste de I*
3. *El banco D está al Sur de A y al Noroeste de H*
4. *F está al Este de E*

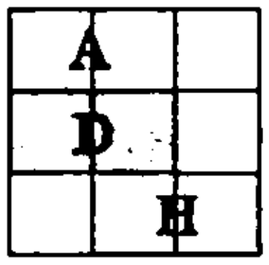
¿qué cuadra ocupa el banco G?

A) 3 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 2 **E)** 5

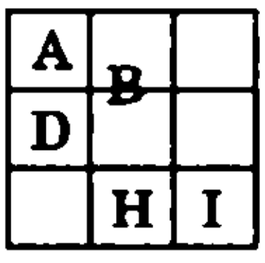
Resolución



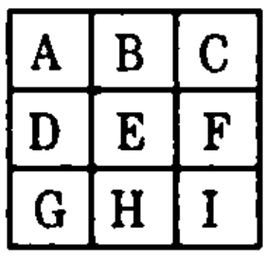
Según 2



Según 3



De (a) y (b)



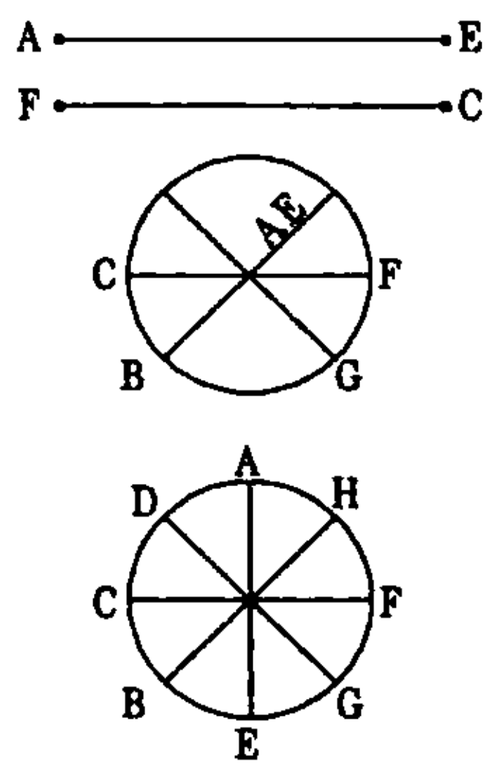
Según 1 y 4

Problema 18

Ocho personas se sientan equidistantemente alrededor de una mesa circular. A está sentado al frente de E, y F al frente de C. El sujeto B está junto y a la derecha de C, mientras que G, junto y a la izquierda de F. La persona B no está junto a A, ni H junto a C. ¿Entre quienes está sentado D?

A) Entre A y B **B)** Entre A y C
C) Entre B y C
D) Entre E y F **E)** Entre C y G.

Resolución



- A frente a E, y F frente a C:
- B junto y a la derecha de C y G junto y a la izquierda de F.
- B no está junto a A ni H junto a C, entonces a D sólo le queda el lugar entre A y C.

Problema 19

El numeral 348, comienza en 3 y termina en 8. De los numerales: 451; 378; 684; 586; 653; 397; 206 y 743 indique cuáles de ellos:

a. Comienzan en cifra par o terminan en cifra impar.

b. Comienzan en cifra par y terminan en cifra impar.

Resolución

√451 √653√
378 397√
√684 √206
586 743√

- Comienzan en cifra par, los marcados por la izquierda.
- Terminan en cifra impar los marcados por la derecha.

a. Las que tiene marca (1 ó 2 marcas)
451; 684; 653; 397; 206 y 743

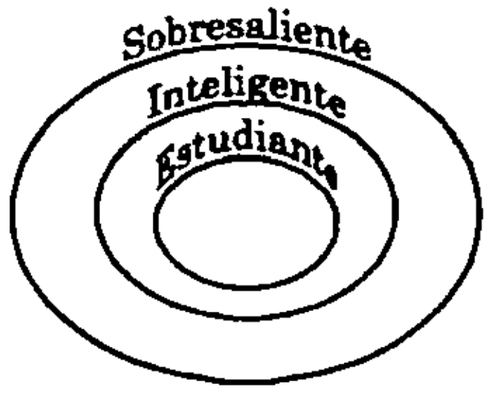
b. Las que tienen 2 marcas: 451 y 653

Problema 20

Todo estudiante es inteligente. Todo inteligente es sobresaliente. ¿Cuál es la conclusión de estas dos premisas?

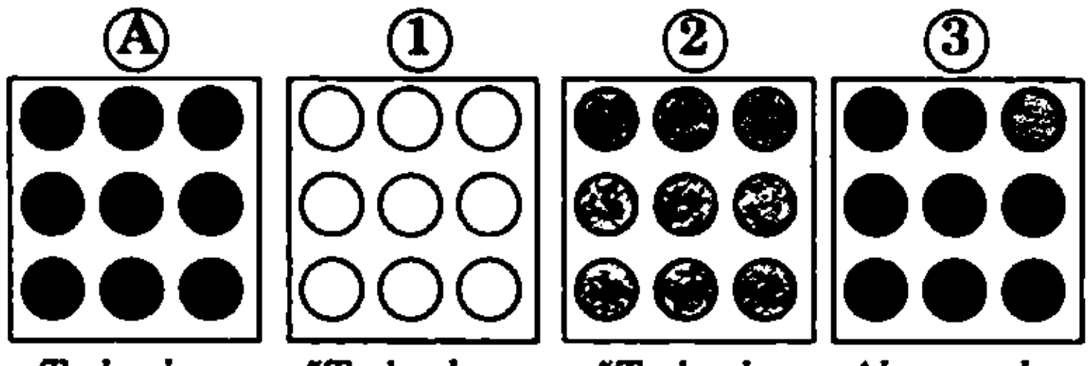
Resolución

El diagrama adjunto representa las premisas mencionadas. Del diagrama se concluye que: "todo estudiante es sobresaliente"



Problema 21

De los gráficos del ① al ③ escoge la que niega el gráfico. Ⓐ



Todas las bolas son negras | *"Todas las bolas son blancas"* | *"Todas las bolas son grises"* | *Al menos hay una bola que no es negra.*

Resolución

Dada una proposición verdadera, su negación hace que la proposición cambie su valor de

verdad, o sea, deja de ser verdadera.

Es suficiente que en la figura A aparezca una bola de color diferente al negro, para que la proposición "Todas las bolas son negras" deje de ser verdadera y se convierta en falsa"

Rpta.: ③

Problema 22

Tres amigas conversaban amenamente preguntándose mutuamente sobre la tenencia de ciertos bienes. Te ofrecemos un resumen de las preguntas y las correspondientes respuestas:

	Ana	Betty	Susan
¿Tienes computadora?	Sí	Sí	No
¿Tienes automóvil?	No	Sí	Sí
¿Tienes VH?	Sí	Sí	No

Pero no te confíes en estas respuestas, porque sólo una de ellas siempre dice la verdad, la otra siempre miente y la otra miente una vez cada tres respuestas. Además si todas dijeran la verdad, las respuestas de las tres serían las mismas. ¿Puedes deducir las verdaderas respuestas?

Resolución

Las respuestas de la que siempre miente y de la que siempre dice la verdad son opuestas, estas son Ana y Susan; por consiguiente Betty es la que miente una de cada tres respuestas. Las respuestas de Betty debe discrepar en una sola, con las respuestas de la que siempre dice la verdad, y esto sucede con las de Ana. Por lo tanto, las respuestas de Ana son las verdaderas. (Sí, No, Sí)

Problema 23

Tres vecinas discutían respecto a sus edades, mientras cerca de ellas José – estudiante de lógica – repasaba sus apuntes para su examen del día siguiente. De la conversación de las señoras, José tomó las siguientes notas:

Luisa: *Yo tengo 42 años y Ana tiene 50 años*

Ana: *Luisa tiene 48 años o Silvia tiene 45 años, pero yo tengo 50 años.*

Silvia: *Yo tengo 41 años y Ana tiene 60 años.*

José: *Las dos señoras tienen razón, pero mi tía siempre miente.*

¿Qué nombre tiene la tía de José? ¿Puedes determinar la edad correcta de cada una?

Resolución

- **Sean** p : Luisa tiene 42 años
  ~p : Luisa tiene 48 años
  q : Ana tiene 50 años
  ~q : Ana tiene 60 años
  r : Sílvia tiene 41 años
  ~r : Sílvia tiene 45 años

- **Afirmaciones:**

  Luisa: $p \wedge q$ ①

  Ana: $(\sim p \vee \sim r) \wedge q$ ②

  Sílvia: $r \wedge \sim q$ ③

- **Análisis:**

1° Si q (F), 1 y 2 serían falsas (ambos contienen q). Como debe haber una sola mentira ⇒ q (V)

2° Si q(V) ⇒ ③ es falso (contiene ~q), puesto que ya hallamos la afirmación falsa, 2 es verdadera. Luego:

Si 1 (V) ⇒ **p(V) ∧ q(V)**
Si 2 (V) ⇒ (~p ∨ ~r) **(V)** ∧ **q(V)**

Para que (~p ∨ ~r) sea (V), ~p es (F)⇒ **~r** es (V).

- **Respuestas:**

La afirmación ③ es falsa ⇒ Sílvia es tía de José

p(V) : Luisa tiene 42 años

q(V) : Ana tiene 50 años

~r(V) : Sílvia tiene 45 años

Problema 24

Tres jóvenes de la vecindad comentan de la bella Isabel, una joven recién llegada al barrio. Los jóvenes, por presumir que cada uno sabe más de ella, dicen una verdad y una mentira.

Alfonso:– Es Huanuqueña y modelo profesional

– Domina el inglés, estudia enfermería y conozco su novio

Víctor: –Trabaja de modelo y no es Huanuqueña

– No tiene novio y domina el inglés

Néstor: –No estudia enfermería, es nacida en Huánuco y no tiene novio.

– No domina el inglés pero sí es modelo

Quisiéramos conocer los datos verdaderos de Isabel. ¿Puedes ayudarnos?

Resolución

Sean las proposiciones:

p : es huanuqueña

q : es modelo

r : domina el inglés

s : estudia enfermería

t : tiene novio

Alfonso : $p \wedge q$ (A1)

$r \wedge s \wedge t$ (A2)

Víctor : $q \wedge \sim p$ (V1)

$\sim t \wedge r$ (V2)

Néstor: $\sim s \wedge p \wedge \sim t$ (N1)

$\sim r \wedge q$ (N2)

• Sea (A1) falso (F) $\Rightarrow$ (A2) verdadero (V)

Si **A2** (V) $\Rightarrow$ r(V), s(V) y t(V). Esto implicaría que tanto **N1** como **N2** fueran falsos: N1 por contener ~t (F) y **N2** por contener ~r(F).

Por lo tanto: A1(V) y A2(F)

• Si A1(V) $\Rightarrow$ **p(V)** y **q(V)**; V1(F)

(por contener ~p(F)) $\Rightarrow$ V2(V)

• Si V2(V) $\Rightarrow$ **t(F)** y **r(V)**; N2(F)

(por contener ~r(F)) $\Rightarrow$ N1(V)

• Si N1(V) $\Rightarrow$ **s(F)**

$\therefore$ p(V), q(V), r(V), s(F), t(F)

Luego, Isabel es huanuqueña, modelo, domina el ingles, no estudia enfermería y no tiene novio.

Problema 25

El capitán a cargo, de las investigaciones del robo a la residencia de la acaudalada Melisa Müler, recibe los informes de sus tres agentes; cuyas conclusiones están en los términos siguientes:

Agente A: *–Pérez es inocente y Quiñones también*

–Han tenido que ser Roldán y Torres, pero Quiñones no pudo ser.

Agente B: *–Pérez es inocente o Torres es inocente*

–Quiñones es inocente y Roldán es el autor o el autor es Pérez.

Agente C: *–Pérez es inocente o Quiñones es inocente, pero Roldán es inocente.*
–Si Torres es inocente entonces Roldán también lo es.

El capitán es consciente de que cada agente, necesariamente hace una conclusión correcta y otra errada.

Sólo uno de los sospechosos ha perpetrado el robo. ¿Puedes ayudar al capitán?

Resolución

• **Sean** p : Pérez es inocente
q : Quiñones es inocente
r : Roldán es inocente
t : Torres es inocente

A1 : $p \wedge q$ **B1** : $p \vee t$
A2 : $\sim r \wedge \sim t \wedge q$ **B2** : $(q \wedge \sim r) \vee \sim p$
C1 : $(p \wedge q) \wedge r$
C2 : $p \rightarrow r$

• **Análisis**

1° q no puede ser falso: **A1** y **A2** serían falsos

(⇒ q(V))

2° Si p es falso Pérez sería culpable, r y t serían verdaderos (hay un solo culpable). Pero si r(V) ⇒ ~r(F). Para p(F), q(V) y ~r(F); **A1** y **A2** serían falsos (⇒ p(V))

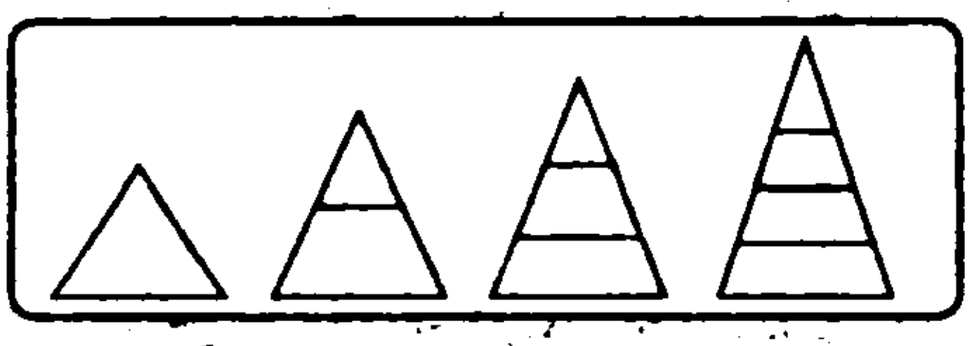
3° Si r es falso: **C1** sería falso (contiene r). Si C1 es falso la otra conclusión **C2** ($t \rightarrow r$) sería verdadero (sólo una conclusión es falsa). Para que $t \rightarrow r$ sea (V) siendo r(F), sólo si t(F); habrían dos culpables. ⇒ r(V)

4° Sólo cabe: p(V), q(V), r(V) y t(F). Estos valores de verdad hacen que: **A1**(V) y **A2**(F)**B1**(V) y **B2**(F)y **C1**(V) y **C2**(F).

Rpta.: Fue Torres.

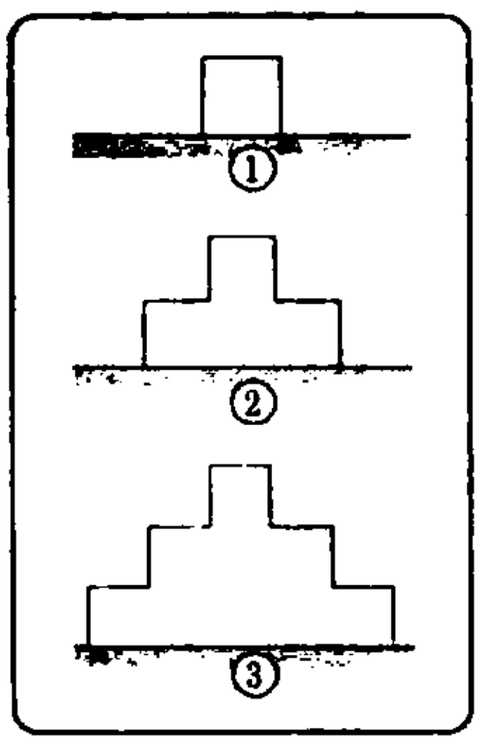
Problemas Propuestos

1. ¿Cuál es el número de triángulo en Fn?



A) $\frac{n(n+1)}{2}$ **B)** n^2 **C)** $n(n+1)$
D) n^2+1 **E)** n

2. Aceptemos que el perfil de este "pedestal" consta de 3 líneas; entonces estarás de acuerdo que el perfil del pedestal 2 consta de 7 líneas. Siguiendo esta secuencia, continuemos dibujando los perfiles hasta el pedestal 100.



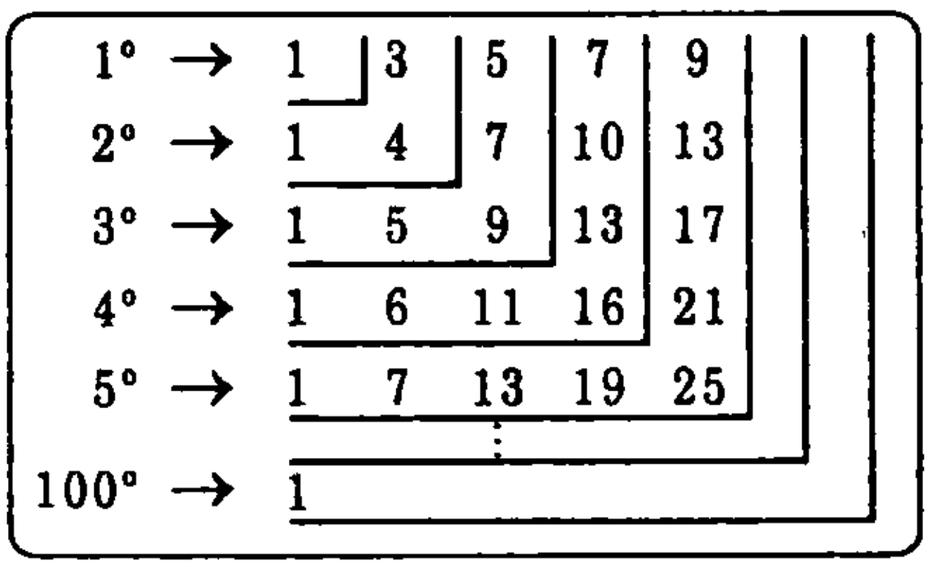
¿De cuántas líneas constará este último pedestal?

A) 360 **B)** 399 **C)** 422
D) 400 **E)** 401

3. "Hallar la suma de cifras del resultado de efectuar $\underbrace{(333\ldots333)^2}_{200\ cfs}$

A) 1800 **B)** 2700 **C)** 1891
D) 1809 **E)** 2709

4. La figura muestra "pasajes" de números en forma de una ⌊ ***invertida.***



Hallar la suma de los números del último pasaje:

A) 10^3 **B)** 10^4 **C)** 10^5
D) 10^6 **E)** 10^7

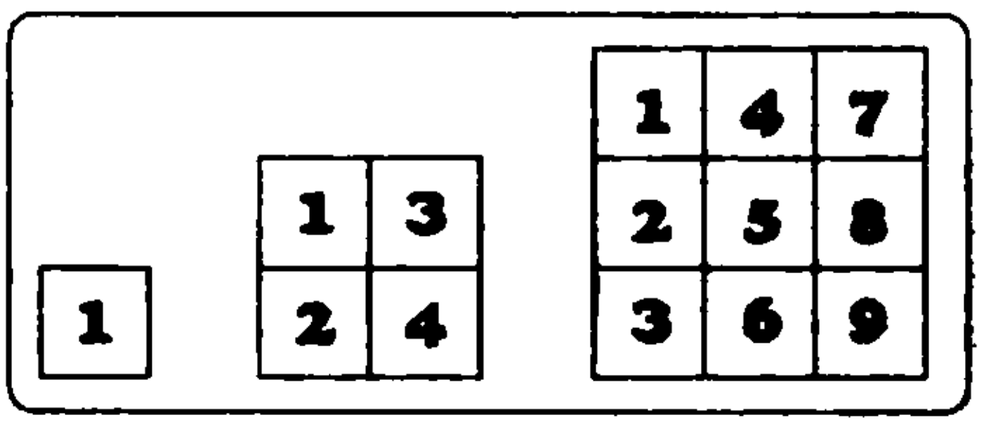
5. Observa la siguiente distribución:

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
. . . . . .
. . . . . .

Para una fila basta el 1. Para dos filas hacen falta 3 números. Para tres filas son necesarios 6 números. ¿Cuántos números hacen falta para formar una distribución de 100 filas?

A) 5050 **B)** 2030 **C)** 2050
D) 5000 **E)** 5600

6. Se sigue la siguiente secuencias, hasta que la suma de los números de las esquinas superior derecha e inferior izquierda, sea 145. ¿Cuántos casilleros por lado tendrá la última figura?



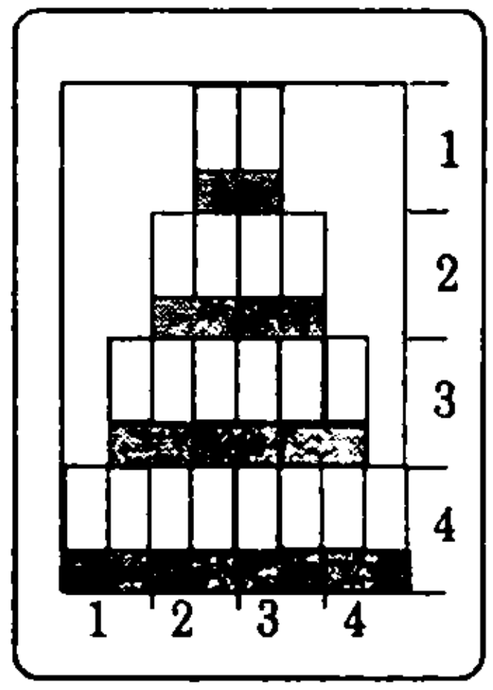
A) 100 **B)** 144 **C)** 10
D) 12 **E)** 15

7. Hallar la suma de la serie:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{200\times 201}$$

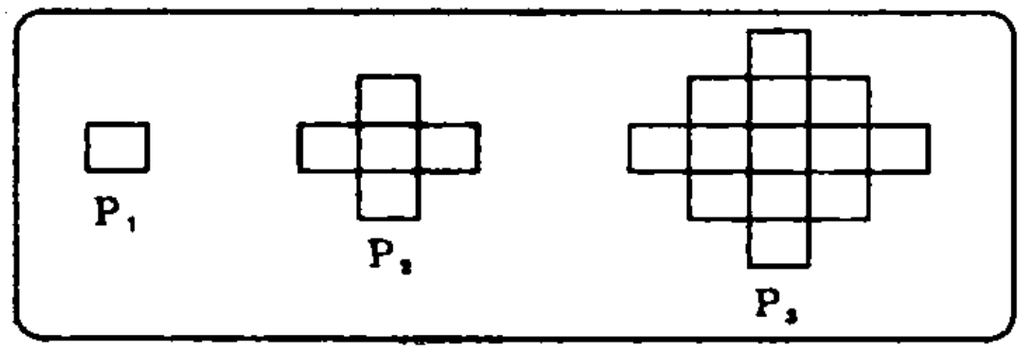
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{201}{200}$ **C)** $\frac{200}{201}$
D) $\frac{199}{200}$ **E)** $\frac{3}{4}$

8. La figura muestra un piso de "4×4", en el que mediante piezas de parquet se ha formado una figura. ¿Cuántas piezas de parquet serían necesarias para formar una figura con el mismo motivo, en un piso de "20×20"?



A) 560 **B)** 420 **C)** 210
D) 650 **E)** 630

9. Las losetas



Cada "cuadradito" es una loseta. ¿Cuántas losetas serán necesarias para formar la figura de la posición 100, siguiendo la secuencia mostrada?

A) 19801 **B)** 16803 **C)** 1601
D) 1901 **E)** 18901

10. Calcular la suma de cifras del resultado de la siguiente radicación:

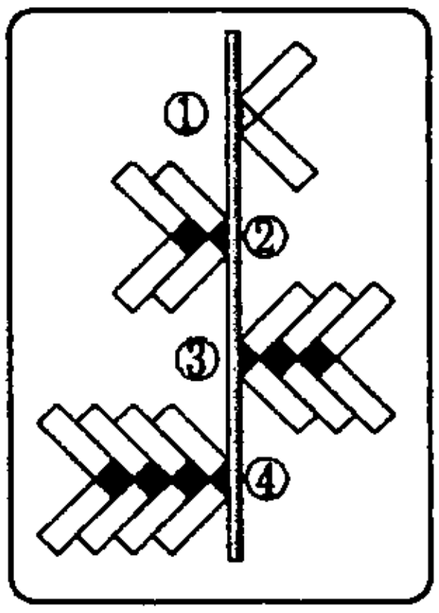
$$\sqrt{20\times 21\times 22\times 23+1}$$

A) 264 **B)** 461 **C)** 521
D) 621 **E)** 360

11. ¿En qué cifra termina la suma de la serie $8+8^2+8^3+8^4+\ldots..\ 8^{600}$ ***?***

A) 8 **B)** 4 **C)** 2 **D)** 6 **E)** 0

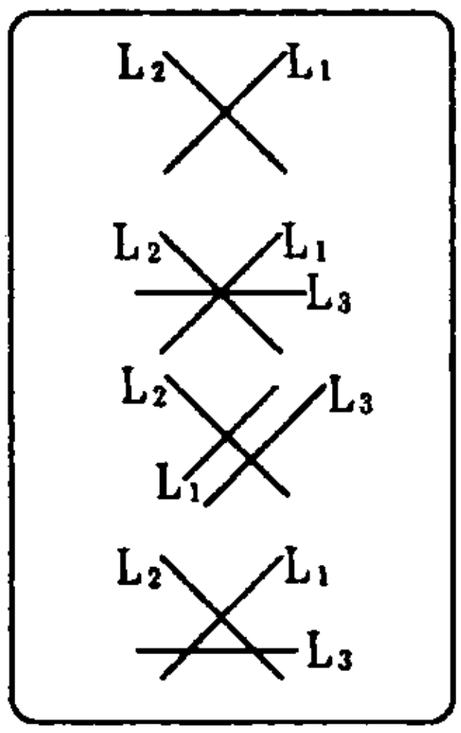
12. Playa de Estacionamiento



Una playa de estacionamiento muy peculiar está distribuida en unidades de estacionamiento ubicadas alternadamente en ambos lados de un muro longitudinal. Cada unidad ha sido enumerada tal como se muestra en la ilustración. La playa cuenta con 40 unidades de estacionamiento diseñadas siguiendo la secuencia mostrada. ¿Cuántos automóviles cómodamente estacionados puede albergar?

A) 400 **B)** 800 **C)** 1600
D) 1640 **E)** 2000

13. Es evidente que dos rectas coplanares (contenidos en el mismo plano) y no paralelas se cortan en un punto.



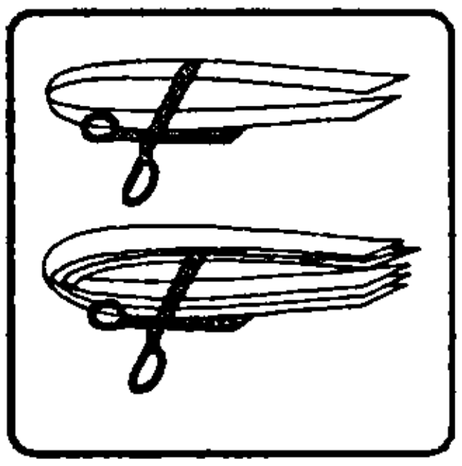
Al trazar una tercera recta: esta puede pasar por el punto de intersección de las dos primeras, puede ser paralela a una de ellas, o por último, cortar a las dos primeras en puntos diferentes. Según sea el caso, el número de puntos de intersección es 1; 2 ó 3; siendo 3 el máximo. ¿Cuál es el máximo número de puntos de intersección entre 100 rectas coplanares?

A) 3 600 **B)** 4 500 **C)** 4 500
D) 4 950 **E)** 10 100

14. Según las pautas del problema anterior, ¿Cuál es el máximo número de puntos de intersección entre 200 circunferencias?

A) 19 900 **B)** 1 000 **C)** 9 000
D) 10 100 **E)** 2 100

15. Dobla una cinta en dos y dale un corte. Enseguida junta los tres pedazos doblados y dale otro corte, como se muestra en la ilustración contigua.



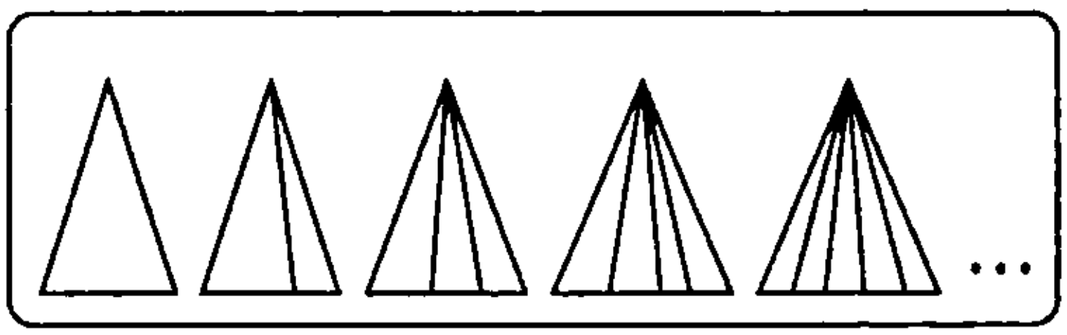
De continuar con esta operación, juntar los pedazos doblarlos y cortar, ¿cuántos pedazos se obtendría al término del veintiavo corte?

A) 60 **B)** 180 **C)** 2^{20}
D) 3^{20} **E)** 20^3

16. ¿Cuántos números pares de tres cifras, son tales que la suma de sus cifras es 15?

A) 24 **B)** 28 **C)** 29
D) 30 **E)** 32

17. ¿Cuál es el número de triángulos de Fn?



F1 **F2** **F3** **F4** **F5** **...**

A) $n(n+1)$ **B)** $\frac{n(n+1)}{2}$ **C)** $\frac{n(n-1)}{2}$

D) n^2+1 **E)** n

18. En la siguiente distribución, calcular la suma de los números de la fila

20.

Fila 1 → 1
Fila 2 → 1 1
Fila 3 → 1 2 1
Fila 4 → 1 3 3 1
Fila 5 → 1 4 6 4 1
...

A) 2^{21} **B)** 2^{20} **C)** 2^{19} **D)** 400 **E)** 20

19. En una convención de 50 abogados, cada abogado era o bien honesto o bien deshonesto. Dadas las premisas:

1. Al menos uno de los abogados era honesto.

2. Dado cualquier par de abogados uno de los dos era deshonesto.

¿Puedes determinar partiendo de estos dos datos, cuántos abogados eran honestos y cuántos deshonestos?

A) 50; 0 **B)** 49; 1 **C)** 1; 49
D) 0; 50 **E)** 25; 25

20. ¿Por cuántas personas está conformada una familia que consta de 1 abuelo, 1 abuela, 2 padres, 2 madres, 4 hermanos, 2 hermanas, 1 sobrina, 2 sobrinos, 1 tío, 1 tía, 1 nieta, 2 nietos, 1 nuera, 1 suegra y 1 suegro?

A) 15 **B)** 14 **C)** 13 **D)** 11 **E)** 9

21. ¿Qué parentesco tiene conmigo, la hija de la nuera de la mamá de mi madre?

A) Es mi hermana **B)** Es mi prima
C) Es mi mamá **D)** Es mi hija
E) Soy yo misma

22. Tres clases de caramelos: de limón, fresa y naranja, han sido embazados en tres latas distintas. Por equivocación, las etiquetas han sido colocadas en latas que no corresponden al tipo de caramelo que contiene. ¿Cuántas latas se deben abrir para saber el tipo de caramelo cada una?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** N A

23. Karen es la sobrina del cuñado de la nuera de mi abuela. El papá de Karen es hijo de la madre de mi madre. ¿Qué parentesco tengo con Karen?

A) Es mi hermana **B)** Yo soy Karen
C) Es mí tía **D)** Es mi prima
E) Es mi hija.

24. Una junta de 6 personas se celebra en un ambiente muy agradable. Ellas están sentadas ocupando cada lado de una mesa hexagonal.

– El ingeniero está frente a Marcos quien conversa amenamente con el médico que está junto y a su derecha.

– El periodista no ve a Iván porque está volteado a su derecha conversando con Sandro.

– Manuel está sentado entre Sandro y el dentista, mientras que Pedro está frente a Elvis.

– El arquitecto está junto y a la izquierda de Pedro. ¿Cuál es el nombre del administrador?

A) Marcos **B)** Iván **C)** Sandro
D) Manuel **E)** Pedro

25. Se ha cometido un hecho delictivo, y los sospechosos son A, B, C y D. En la defensa, la persona A dice que en el momento del hecho estuvo con C y D en otro lugar. La persona B dice que estuvo con C y A. C dice que estuvo con D y D dice que estuvo con A. Si dos afirmaciones coinciden se dan por ciertas. ¿Quién o quiénes fueron los culpables; si se sabe que intervinieron una o dos personas?

A) D **B)** A y C **C)** B
D) B y C **E)** C

26. La isla de Pusilán, como todos sabemos, está habitada solamente por dos tribus de aspecto idéntico pero de temperamentos muy distintos: los habitantes de Verdusia que dicen siempre la verdad, y los de Falsonia que saben únicamente mentir. El explorador Dr. Monser desembarca en Pusilán y tres aborígenes se le aproximan. El ignora el origen preciso de cada uno.

Por favor señor, ¿cuántos verdusianos hay entre ustedes?
Mongo bunda abulá
Perdone, pero no comprendo su lengua.
Ha dicho que solamente hay uno.
No crea lo que dice dos plumas: miente; pero venga a mi casa, porque yo no soy caníbal.
Venga mejor a mi casa porque yo no soy caníbal.
¿Qué invitación acepto: la del indio con dos plumas o la del indio con tres plumas? ¡Ayúdame!

A) Al de dos plumas **B)** A ninguno
C) Al de tres plumas **D)** A los dos
E) A cualquiera de los dos

27. Carmen tiene tres libros: el libro de 550 páginas pesa 450 gramos. El libro de Aritmética no tiene 580 páginas. El libro de geometría pesa menos que el de 560 páginas. El libro de álgebra tiene más páginas que el que pesa 500 g. Uno de los libros pesa 400 g. Determinar el número de páginas y el peso de cada uno de los libros.

Indicar los datos correspondientes al libro de Algebra.

A) 560 Pág.. 450 g **B)** 580 Pág. 400 g
C) 580 Pág. 450 g **D)** 550 Pág. 400 g
E) 560 Pág. 400g.

28. Dos hermanos que tienen dos hijos cada uno, comentan respecto a las edades de sus hijos.

LUCHO : Tus hijos nacieron siempre un año después que los míos.

CARLOS : En efecto, nacieron con tres años de diferencia.

LUCHO : Isaac cumple 15 al próximo año.

CARLOS : Tu hijo Luchito con mi Carlitos son muy amigos a pesar de que Luchito es menor. ¿Qué edad tiene Denis, el otro hijo de Carlos?

A) 8 años **B)** 9 años **C)** 10 años
D) 11 años **E)** 12 años

29. María es mamá de Iván. Carmela es hermana de Jesús. Carola es suegra de Néstor. María es hija de Carola y Jesús hijo de Néstor. ¿Qué parentesco existe entre Carmela e Iván?

A) Hermanos **B)** Primos
C) Tía – sobrino **D)** Tío – sobrina
E) Primos o hermanos

30. Un expositor de una conferencia sobre "realidad educativa" dijo: El índice de alfabetismo en EE.UU. es de 4,5%; el de México, 8,2%; el de Argentina 11,4%, ... "¡Un momento! – Interrumpió un oyente – "Argentina tiene menos índice de Analfabetismo que EE.UU. y México tiene por encima del 10%.

– Probablemente se me confundieron los datos, pero las tasas mencionadas son las que corresponden a los tres países según datos de 1993 – reconoció el expositor.

Revisando los datos, hemos averiguado que aquel oyente tenía razón:

¿Cuál es el índice de Analfabetismo de EE.UU.?

A) 4,5% **B)** 11,4% **C)** 8,2%
D) 4,5% ó 8,2%
E) No es posible saber

31. Las novelas "La babosa", "El arte de matar" y "El coloquio de los perros" fue escrito por Daniel Sueiro, Cervantes y Gabriel Casaccia, aunque no necesariamente en ese orden. Casaccia no escribió. "El arte de matar". Sueiro ni Casaccia escribieron "El coloquio de los perros" ¿Quién escribió "El arte de matar"?

A) Casaccia **B)** Cervantes **C)** Sueiro
D) Faltan datos
E) Ninguno.

32. Tres por tres

Los Falcón y otras dos familias de Fuenteabierta tuvieron trillizos. Siendo jóvenes y de edad aproximada, los chicos se hicieron naturalmente amigos. Además de su especial condición familiar, tenían algo en común, su ardiente entusiasmo por la aviación. De hecho, tan pronto como fueron lo suficientemente mayores, Arturo y otros dos se lanzaron al aire. Cada uno de ellos ocupa ahora una de los tres puestos en unas líneas aéreas que se mencionan en las pistas que vamos a exponer. ¿Podrás descubrir sus nombres completos y el trabajo que realiza cada uno de ellos?

1. *Gabriel es piloto, lo mismo que la hermana de Fidel.*
2. *La hermana de Isaura es ayudante de vuelo, lo mismo que el hermano de Mercedes.*
3. *David es copiloto, lo mismo que la hermana de Estrella.*
4. *Sólo uno de los hermanos de Carlota es piloto.*
5. *El hermano de Emma es copiloto; su hermana no lo es.*
6. *Ninguno de los trillizos Melón es copiloto.*
7. *Uno, y uno solo, de cada familia es ayudante de vuelo.*
8. *En una de las familias, dos mellizos del mismo sexo hacen el mismo trabajo, no son los Turón.*

¿Quiénes son los ayudantes de vuelo de cada familia

A) Carlota, Fidel, Arturo
B) Carlota, Gabriel, Emma
C) David, Fidel, Emma
D) Arturo, Fidel, Emma
E) David, Carlota, Fidel

33. Las cinco canciones

Durante cinco semanas consecutivas, las mismas cinco canciones ocuparon los cinco primeros puestos en la emisora de la radio local, aunque cada canción ocupó un puesto distinto en cada una de las semanas. Intenta determinar los puestos que ocuparon a lo largo de las cinco semanas, partiendo de la información que damos a continuación

1. *En la primera semana,* ***La canción de Marbella*** *se situó después de* ***Aquella triste tarde****, pero no quedó en ultimo lugar.*
2. ***De puntillas entre las violetas*** *subió de puesto en la tercera semana con respecto a la segunda.*
3. ***Aquella triste tarde*** *ocupó en la segunda semana un puesto superior a la de la primera y la cuarta semanas.*
4. ***Era de Santiago*** *ocupó el primer lugar dos semanas más tarde de aquella en que estuvo en segundo lugar.*
5. ***Era de Santiago****, que nunca se situó inmediatamente después de* ***De puntillas entre violetas****, perdió una posición de la cuarta a la quinta semana.*

6. ***Carros de fuego**, que estuvo más baja que **Aquella triste tarde** en la cuarta semana, quedó más arriba que ella en la última.*

¿Que canción fue la número 1 en la quinta semana?

A) Carros de fuego
B) Era de Santiago
C) De puntillas sobre la violetas
D) Aquella triste tarde
E) La canción de Marbella

34. La organización del trabajo casero

La señora Matas y otras cuatro amas de casa decidieron recientemente programar sus tareas caseras, a fin de disponer de unos fines de semana relativamente libres. Estudiando juntas la cuestión, dividieron su trabajo en cinco categorías: cocina, limpieza, lavado, compras y tareas varias (coser, planchar, etc.). A continuación, cada una de las mujeres trazó un horario semanal, asignándose una tarea para cada día de la semana, desde el lunes al viernes. Partiendo de las pistas siguientes, ¿podrías encontrar los nombres completos de las cinco mujeres y reconstruir sus programas respectivos?

1. *En cada día de la semana, una de las mujeres hace la limpieza general y otra lava.*
2. *Teresa lava en un día de la semana anterior a aquel en que la señora Palomo sale de compras y posterior a aquel en que Amalia hace la limpieza.*
3. *La señora Soto programó, su lavado, sus tareas varias y su cocina en el orden dado, pero no en días consecutivos.*
4. *Felisa y la señora Solana van de compras el mismo día de la semana.*
5. *Tanto Carmen como la señora Lozano hacen limpieza general antes del miércoles.*
6. *Tres de las mujeres dedican el viernes a las tareas varias; ninguna de las cinco mujeres sale de compra los martes.*
7. *Amalia e Irene cocinan, respectivamente, los lunes y los martes.*

Indicar el apellido y el programa del viernes de Amelia.

A) Lozano, varios **B)** Lozano, lavado
C) Palomo, varios
D) Lozano, cocina **E)** Palomo, cocina

35. En una mesa hay 4 botellas iguales con agua gaseosa. La botella A contiene la mitad de lo que contiene B, la botella C contiene 3 veces lo que contiene D.

Manolo llegó con sed del colegio y se tomó un sorbo de D y resulta ahora que B y D contienen la misma cantidad. ¿Cuál de las Botellas está con más contenido que las otras?

A) B y D **B)** A y D **C)** C
D) A **E)** B

36. Corongo está al Sur de Cabana Norte, Sihuas está al Este de Corongo. Si Caraz está al Suroeste de Sihuas, entonces Cabana Norte está.

A) Al Sur de Caraz
B) Al Norte de Caraz
C) Al Este de Caraz
D) Al Oeste de Caraz
E) Al Sureste de Caraz

37. Convengamos que para dos personas A y B, A → B significa que A nació antes que B. Basado en lo anterior y las siguientes premisas: Carlos → Joaquín; Noelia → Carolina, Teresa → Iris, Iris → Joaquín; Carlos tiene 20 años, Noelia tiene 18 años e Iris 21 años.
Señala la afirmación correcta.

A) Joaquín → Teresa
B) Joaquín → Carolina
C) Carolina → Iris
D) Teresa → Carolina
E) Carlos →Teresa.

38. ***Un cuaderno y un libro pesan más que un libro y un reloj. Un cuaderno y un reloj pesan más que un libro y un cuaderno. ¿Cuál de los objetos pesan más que los demás?***

A) El reloj B) El libro
C) El cuaderno

39. ***Un conjunto A se dice que está incluido en B, si todos los elementos de A son también elementos de B.***

Resulta que el conjunto M está incluido en P, P está incluido en Q; N está incluido P y Q está incluido en M. Luego:

A) No es posible que Q esté incluido en M
B) M es un conjunto vacío
C) P no puede estar incluido en Q
D) N está incluido en M
E) M está incluido en N

40. ***Cuatro ciudades A, B, C y D están ubicados a lo largo de una autopista que se prolonga de Sur a Norte.***

1. Para ir de A a B se pasa por C
2. Para ir de D a B hay que recorrer 600 km.
3. C está a 200 km de A
4. A está al Sur de B y al Norte de D
5. La distancia entre B y C es mayor en 200 km que la que hay entre A y D. Determinan la ubicación de las 4 ciudades en el orden de Norte a Sur y la distancia entre A y D

A) DACB, 100 km B) BCAD, 100 km
C) ABCD, 200 km
D) ABCD, 100 km E) BCDA, 100 km

41. ***Tres países A, B y C tienen sus economías basadas en la producción de cobre, carne y caña, aunque no necesariamente en este orden; además corresponden a tres continentes distintos.***

1. El país que produce caña no es asiático
2. El país europeo produce Cu
3. A no es asiático
4. C produce caña

Es cierta la relación:

A) A, Europeo, carne
B) B, Asiático, Cobre
C) C, Americano, carne
D) B, Asiático, carne
E) A, americano, caña

42. ***En un edificio de tres pisos hay dos departamentos por piso, en él viven 6 amigos ocupando cada uno un departamento.***

Mauricio, Marcos y Néstor utilizan siempre el ascensor para subir a sus departamentos. Raúl utiliza el ascensor o la escalera sólo cuando visita uno de sus amigos. José vive en el mismo piso que Marcos. Néstor y Juan no viven en pisos adyacentes. ¿Quiénes viven en el segundo piso?

A) Raúl y Juan B) Marcos y José
C) Juan y Marcos D) Juan y José
E) Marcos y Mauricio

43. ***Un edificio de 6 pisos está ocupado por 6 familias. Cada familia ocupa un piso, Los Aburto viven 2 pisos más arriba que los Calderón y 2 pisos más abajo que los Barrera. Los Durán viven en el segundo piso y los Gómez no viven adyacente con los Aburto. ¿En qué piso viven los Muñoz?***

A) 1° **B)** 3° **C)** 4° **D)** 5° **E)** 6°

44. Carmen, Lizet, Rocío, Ivón y Katy son secretarias que trabajan en 5 pisos diferentes de un edificio.

- ***Lizet baja dos pisos para hablar con Carmen***
- ***Katy y Rocío siempre llegan juntas al trabajo y utilizan el ascensor para sus oficinas, solo que Rocío se queda dos pisos antes.***
- ***Carmen trabaja un piso más arriba que Rocío. ¿Quién trabaja en el primer piso?***

A) Ivón **B)** Lizet **C)** Carmen
D) Katy **E)** Rocío

45. Si vas al hipódromo, pierdes tu dinero si no vas al hipódromo, vas al cine.No fuiste al cine.

La conclusión es:

A) No fuiste al hipódromo
B) No perdiste tu dinero
C) Perdiste tu dinero
D) Fuiste al hipódromo y ganaste dinero
E) Ninguna de las anteriores

46. Si no me baño en la mañana, me siento sucio todo el día. Cuando me siento sucio, no puedo trabajar.

Luego:

A) Si me baño en la mañana, puedo trabajar bien.
B) Si me baño en la mañana, no puede trabajar bien.
C) Si no puedo trabajar bien, me bañé en la mañana.
D) Sí puedo trabajar bien, me bañé en la mañana.
E) Sí me siento sucio, no me bañé en la mañana.

47. Ningún aviador es empresario teatral.

Juan y Pedro son empresarios teatrales.

Todo empresario teatral es financiero

Por lo tanto:

A) Ningún aviador es financista
B) Juan y Pedro son financistas y aviadores.
C) Juan es aviador y Pedro es financista
D) Ninguno es aviador ni financista
E) Ninguna de las anteriores

48. De las siguientes premisas:

- ***Si me prestas $10, iré al cine con Inés.***
- ***Me prestas $10 o no eres mi amigo***
- ***Si no eres mi amigo, no te ayudaré en tu trabajo***
- ***Por supuesto, te ayudaré en tu trabajo.***

Podemos concluir:

I. Te debo $. 10

II. Iré al cine con Inés

III. Eres mi amigo

A) Sólo I **B)** Sólo I y II **C)** Sólo II y III
D) Todas **E)** Ninguna de las anteriores

49. Si no estudias el sábado, estudias el domingo.

Si no te levantas temprano el domingo no estudias ese día.

En consecuencia, si el domingo te levantas a la una de la tarde, entonces:

A) Estudias el domingo
B) Estudias el sábado
C) No estudias el domingo ni el sábado
D) Depende de tu horario de estudio
E) No estudias el sábado

50. Si una persona hace deporte, vive muchos años.

Ningún fumador vive muchos años

Por lo tanto:

A) Ningún fumador hace deporte
B) Algunas deportistas fuman
C) Si Javier hace deporte, puede ser fumador
D) Si Gustavo fuma, es deportista
E) Ninguna de las anteriores

51. Si todos los arequipeños son peruanos y algunos peruanos son economistas resulta que:

A) Algunos arequipeños son economistas
B) Todos los arequipeños son economistas
C) Algunos economistas son arequipeños
D) Algunos arequipeños no son peruanos
E) Algunos economistas son peruanos

52. La negación de la proposición:

"Los estudiantes brillantes no acuden al cine" es:

A) Todo estudiante brillante acude al cine
B) Todo estudiante brillante no acude al cine
C) "Un estudiante brillante acude al cine
D) Ningún estudiante brillante acude al cine

53. Cinco sospechosos del crimen de un adolescente, fueron detenidos por la policía local. Ante el interrogatorio las respuestas fueron:

El Chino : *"Fue Vico o Pelao"*
Loco Vico : *"Ni Calín ni yo lo hicimos"*
Pelao : *"Ustedes dos están mintiendo"*
Aldo : *"No, uno de ellos está mintiendo; el otro está diciendo la verdad"*
Calín : *"No, Aldo, eso no es cierto"*

Era sabido para la policía que tres de los sospechosos siempre decían la verdad, pero que dos siempre mentían.

¿Puede deducir la policía quién cometió el asesinato, a sabiendas que sólo uno de ellos pudo ser?

54. El psicólogo A afirma:

"Los niños que ven películas de agresión, se vuelven agresivos".

El Psicólogo B sostiene:

"Los niños agresivos tienen tendencia de ver películas de agresión"

Se nombran los siguientes hechos posibles:

1. Muchos niños que no ven programas de agresión son agresivos.

2. Muchos niños que ven programas agresivos, son pacíficos

3. A muchos niños agresivos no les agrada las películas de agresión. Contradicen la tesis de A:

A) sólo (1) **B)** sólo (2) **C)** sólo (3)
D) (1) y (2) **E)** (1), (2) y (3)

CLAVES DE RESPUESTAS

PÁGINA 5	1	2	3	4
	B	B	E	D

PÁGINA 6	1	2	3	4	5	6
	C	C	A	A	E	B

PÁGINA 8	1	2	3	4	5	6
	E	A	E	E	B	D

PÁGINA 11: Divertijo 1

Ninguna: 80 min = 1 h 20 min

PÁGINA 11 - 12	1	2	3	4
	C	D	E	B

PÁGINA 13: Problemas

1. Abre la caja BN, si ves una bola N, contiene NN. La NN contiene BB y la BB contiene BN.
   Si ves una bola B, contiene BB. La BB contiene NN y la NN contienen BN.
2. El señor Pardo no tiene corbata verde, entonces, roja. Queda verde para el señor Rojo y parda para el señor Verde .

PÁGINA 15 - 17	1	2	3	4	5	6
	C	B	A	E	C	E

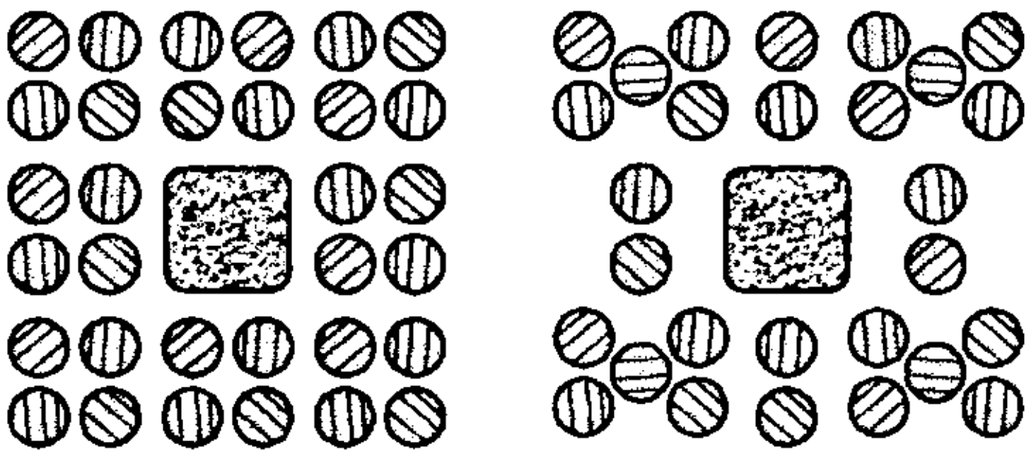
PÁGINA 18	1
	A

PÁGINA 20	1	2
	B	A

PÁGINA 22	1	2	3	4
	A	C	C	C

PÁGINA 23	1	2
	A	B

PÁGINA 24: Reto al Ingenio



Antes Después

PÁGINA 25	1	2	3	4
	C	E	C	E

PÁGINA 26	1	2	Desafío a tu sentido
	D	B	Son iguales

PÁGINA 27: Torre de cubos

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 20^3 = 44100$

PÁGINA 28	1	2
	A	C

PÁGINA 34 - 35	1	2	3	4
	E	E	B	C

PÁGINA 38: Con palitos de fósforo

2×1×2; 2×2×3; 2×3×4; ....; 2×10×11 = 220

PÁGINA 42 - 43	1	2	3	4	5	6	7	8
	C	D	B	B	B	C	C	A
	9							
	B							

PÁGINA 44: Torre de cajas

$$\left(\frac{1+1}{2}\right)^2;\left(\frac{3+1}{2}\right)^2;\left(\frac{5+1}{2}\right)^2;$$

$$\ldots;\left(\frac{199+1}{2}\right)^2 = 10000$$

PÁGINA 44: Carrera de caballos

Intercambiar los caballos

PROBLEMAS PROPUESTOS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
E	**B**	**A**	**D**	**A**	**D**	**C**	**C**	**A**	**B**	**E**	**D**	**D**	**A**	**D**	**D**	**B**	**C**
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
B	**E**	**B**	**B**	**D**	**A**	**B**	**C**	**B**	**C**	**E**	**C**	**C**	**D**	**E**	**A**	**C**	**B**
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
D	**C**	**D**	**B**	**D**	**B**	**C**	**A**	**C**	**A**	**E**	**D**	**B**	**A**	**E**	**A**	**D**	**B**

Gottfried Wilhelm von Leibnitz
(1646 – 1716)

Gottfried Wilhelm von Leibnitz

Nació el 1 de Julio de 1646 en Leipzig, Saxony (Ahora Alemania)

Leibnitz era hijo de un profesor de filosofía moral en Leipzig. Aprendió él mismo Latín y algo de Griego a la edad de 12 años, para así poder leer los libros de su padre. Desde 1661 al 1666 estudió leyes en la Universidad de Leipzig. En 1666 le fue rechazado el ingreso para continuar con un curso de doctorado, y fue a la Universidad de Altdorf, recibiendo su doctorado en leyes en el 1667.

Continuó su carrera de leyes trabajando en la corte de Mainz hasta 1672. En ese año visitó París para tratar de disuadir a Luis XIV del ataque al territorio Alemán.

Permaneció en París hasta 1676, donde continuó practicando leyes. Sin embargo en París estudió matemáticas y física. Fue durante este periodo que las características fundamentales del cálculo fueron desarrolladas.

Fue un verdadero precursor de la **lógica matemática**. Persiguiendo una idea que le acosa desde la juventud es pos de un *"alfabeto de los pensamientos humanos"* y de un *"idioma universal"* se propone el proyecto de construir *"una característica universal"*, especie de lenguaje simbólico capaz de expresar, sin ambigüedad, todos los pensamientos humanos, de manera que al surgir una controversia entre dos filósofos, éstos la zanjasen a la manera de los calculistas; bastaría en efecto, sentarse ante los ábacos, pluma en mano, y como buenos amigos decirse, en mutuo acuerdo: calculemos.

Las ideas de Leibniz, que contiene muchos conceptos de la lógica simbólica de hoy, no tuvieron entonces mayor influencia, pues quedaron inéditas hasta este siglo. Igual destino tuvieron ideas semejantes esbozadas durante el siglo XVIII y comienzos del XIX. Agreguemos que las ideas de Kant, de gran influencia en su tiempo y para quien no era necesaria "ninguna nueva invención en la lógica", han contribuido sin duda al estancamiento de esta disciplina. Las cosas cambiaron cuando llegó , el cual se convirtió en el verdadero fundador de la lógica simbólica. El resto de su vida desde 1676 hasta su muerte, permaneció en Hanover.

El 21 de Noviembre de 1675 escribió un manuscrito usando por primera vez la notación de la integral ò f(x)*d(x). En el mismo manuscrito estaba dada la regla para la diferenciación.

Esta regla fue dada a conocer dos años después, en Julio de 1677.

Falleció el 14 Noviembre de 1716 en Hannover, (Ahora Alemania).

2 PROBLEMAS DE OPERACIONES BINARIAS

INTRODUCCION

Las operaciones matemáticas constituyen la esencia de la matemática en cuanto a su utilización práctica.

Estamos seguros que una inmensa cantidad de problemas que requieren el auxilio de la matemática se puede resolver sin mayores conocimientos matemáticos que las cuatro operaciones fundamentales: Adición, Sustracción, Multiplicación y División.

En este capítulo proponemos estrategias para la resolución de cierto tipo de problemas que no requieren más que saber realizar las 4 operaciones fundamentales.

Al inicio del capítulo damos los fundamentos en los cuales están basadas las operaciones binarias en general.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lo que necesitas para comprender y resolver los problemas de este capítulo es saber sumar, restar, multiplicar y dividir los números enteros y decimales. Si ya lo sabes, no estará demás realizar unas cuantas operaciones de multiplicación y división. Si no estás estudiando para postular a la universidad, puedes utilizar una calculadora.

Adelante y Suerte.

2.1. OPERACION BINARIA

¿Puedes creer que 3 + 9 = 5 es correcta? ¡De ninguna manera! ¡Imposible! Suelen ser las respuestas. Pero permíteme demostrarte que es posible la igualdad. Vamos a asignar los números del 1 al 7 a los días de la semana:

Domingo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
1	2	3	4	5	6	7

Si hoy es lunes, dentro de cuatro días, ¿qué día será?

Es suficiente sumar al día 2 los 4 días siguientes

$$2 + 4 = 6$$

Así tenemos que será el día 6, o sea, viernes.

Si pasan 9 días desde el día 3, ¿qué día será? Al aumentar 9 días al día 3 resulta 3 + 9 = 12. Pero no hay día 12. En estos 12 días hay una semana entera y 5 días más. Cuando pasa una semana exacta se vuelve al mismo día, por lo tanto el resultado será el día 5. Así tenemos:

$$3 + 9 = 5$$

En un sistema como el descrito, jamás habrá un resultado mayor de 7.

Esta aritmética se llama **aritmética modular** y en este caso el módulo es 7.

Reto al ingenio 1

En esta multiplicación las cifras han sido sustituidas por letras. Cada letra diferente sustituye a una cifra diferente. La O sustituye al cero.

$$\overline{TOC} \times \overline{TOC} = \overline{ENTRE}$$

Calcular: $\overline{EN} \times \overline{TR}$

2.1.1 Leyes de composición interna

En la matemática se puede crear una variedad de **operaciones binarias**, sólo es preciso establecer las reglas bien precisas. Veamos el siguiente ejemplo.

En una hoja de papel recortamos las letras E, I y F, tal como se muestra a la derecha. La operación consiste en **superponer** las letras y el resultado es la letra resultante. Además utilizamos el símbolo * para representar la operación. Así, E*F = E significa que superponiendo las letras E y F se obtiene E. Veamos otros más:

- E * I = E
- I * I = I
- I * E = E
- F * F = F
- F * I = F
- F * E = E

*He aquí una tabla de la operación representada por **

*	I	F	E
I	I	F	E
F	F	F	E
E	E	E	E

Los únicos elémentos que intervienen en la operación son las letras E, I y F. Se puede ver que la operación consiste en dados dos elementos hacer corresponder un tercer elemento según una regla establecida. D1

Una **operación binaria** denotada por *, y definida en un conjunto S, asigna a cada pareja ordenada $(a; b)$, elementos de S, un elemento único que denotaremos por $a * b$.

El símbolo utilizado para representar la operación binaria, se llama **operador matemático.**

D1
Una Ley de composición interna en un conjunto dado, establece una correspondencia entre los elementos del conjunto bajo una regla establecida.
Una operación binaria definida en un conjunto es una ley de composición interna en dicho conjunto.
La adición y la multiplicación son leyes de composición interna en el conjunto de los números naturales.

2.1.2 Propiedades de las operaciones binarias.

A. La propiedad de cerradura o de clausura

Si para todo elemento $(m; n)$ del conjunto S, $m * n$ es un elemento de S, entonces la operación binaria tiene propiedad de cerradura. E1

E1
La adición es cerrada en el conjunto de los números naturales: la suma de dos números naturales es siempre otro natural.
La adición no tiene la propiedad de cerradura en el conjunto de los números impares.

B. La propiedad conmutativa

Se dice que la operación binaria * es conmutativa si:

$$a * b = b * a \quad \text{E2}$$

E2
$$25 \times 12 = 300$$
$$12 \times 25 = 300$$
$$\therefore 25 \times 12 = 12 \times 25$$
La multiplicación es conmutativa, en cambio la división no lo es:
$$12 \div 4 \neq 4 \div 12$$

C. La propiedad asociativa

Se dice que la operación binaria * es asociativa si, dadas a, b y c en S.

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

D. Existencia de un elemento idéntico

Decimos que el conjunto tiene un elemento idéntico o identidad con respecto a la operación binaria * si existe un elemento del conjunto S, que denotamos por i, tal que para todo elemento a de S, se cumplen las dos condiciones siguientes:

$$a * i = a \quad \text{y} \quad i * a = a \quad \text{E3}$$

E3
El elemento idéntico de la adición en $\mathbb{R}$ *es el cero:*
$$a + 0 = 0 + a = a$$
El elemento idéntico de la multiplicación en $\mathbb{R}$ *es el uno:*
$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

E. Recíproco

Se dice que un elemento a de S tiene recíproco con respecto a la operación *, si existe un elemento en S, que donotamos por a^{-1}, tal que:

$$a * a^{-1} = i \quad \text{y} \quad a^{-1} * a = i$$

Donde i es el elemento idéntico de S. E4

E2
El recíproco de a *en la adición se denota por* $-a$ *y se llama* ***opuesto de*** a*:*
$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$
El recíproco de a *en la multiplicación se denota por* a^{-1} *y se llama* ***inverso de*** a
$$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$$

2.1.3 Operadores matemáticos

Problema 1

En el conjunto de los números enteros se define la operación simbolizada por Δ bajo la siguiente regla: $a \Delta b = (a + 2)(b - 2)$. Determinar el valor de: $2\Delta[-3\Delta(5 \Delta 4)]$

Resolución

Para cada operación aplicamos la regla establecida. Para realizar las operaciones respetamos el orden de prioridad señalado por los signos de agrupación

$$\begin{array}{rcl} a \Delta b = & (a+2)(b-2) & \\ \downarrow \ \downarrow & \downarrow \quad \downarrow & \\ 5 \Delta 4 = & (5+2)(4-2) & = 14 \end{array}$$

$$-3 \Delta 14 = (-3 + 2)(14 - 2) = -12$$

$$2 \Delta -12 = (2 + 2)(-12 - 2) = -56$$

$$2\Delta - [\underbrace{-3\Delta(\underbrace{5 \Delta 4}_{14})}_{-12}] = \underbrace{-56}$$

Problemas

1. Se define la operación * según la regla:

$$a * b = 2b - 3a$$

Calcular:

$$[(4 * 6) * (2 * 5)] * 3$$

A) 18 B) –18 C) 15 D) 16 E) 14

2. Según la operación Δ definida como sigue:

$$m \Delta n = \frac{m+n}{m-n} \quad \text{si } m \neq n$$

$$m \Delta n = 0 \quad \text{si } m = n$$

Determinar cuáles de las siguientes igualdades son correctas.

I. $7 \Delta 5 = 6$

II. $m \Delta n = m + n \Leftrightarrow m - n = 1$

III. $m \Delta (n \Delta p) = (m \Delta n) \Delta p$

IV. $5 \Delta (3 \Delta 2) = 0$

A) Todas B) I, II y IV C) Sólo I
D) I y IV E) Ninguna

3. Hemos definido en $\mathbb{N}$ la operación cuyo símbolo es Δ, mediante la siguiente regla:

$$(a; b) \Delta (c; d) = (a + c) - (b + d)$$

Hallar M donde:

$$M = (5; 8) \Delta (10; 9) + (8; 12) \Delta (11; 8)$$

A) –5 B) –3 C) –1 D) 4 E) 6

4. En $\mathbb{N}$ definimos la operación S(n) como la suma de cifras de n.

Si $S(\overline{abc}) = 15$ ***Hallar*** $(\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab})$

A) 15 B) 30 C) 1665 D) 165 E) 555

5. Según la operación definida en el problema anterior, indicar cuáles de las siguientes igualdades es siempre correcta.

i) $S(444) + S(555) = S(444 + 555)$

ii) $S(A) + S(B) = S(A + B);\ \forall A, B \in \mathbf{N}$

iii) $S(A) - S(B) = S(A - B);\ \forall A, B \in \mathbf{N}$

A) Sólo *i* **B)** *i* y *ii* **C)** Todas
D) Sólo *ii* **E)** Ninguna

6. Sea E(n) = Residuo de dividir "n" entre 5; ∀ n. Calcular:

$$E(4444^2) + E(7777^2)$$

A) 15 **B)** 5 **C)** 6
D) 7 **E)** 0

7. Se define en el conjunto ℝ:

$[\![x]\!]$ = ***el mayor entero menor que x.***

Por ejemplo $[\![6,5]\!] = 6, \quad [\![-8,4]\!] = -9$

Según esto calcular:

$$[\![\sqrt{2}]\!] + [\![-\sqrt{3}]\!] + [\![\pi]\!] - [\![\sqrt{5}]\!]$$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

Problema 2

Se define la operación simbolizada por * en el conjunto {1; 2; 3; 4; 5} de acuerdo a la tabla adjunta:

*	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5

a) Calcular:

(2 * 3) * (5 * 2)

Resolución

Para hallar en la tabla el resultado de 2*3 ubicamos 2 en la primera columna y 3 en la primera fila. El resultado de 2*3 se encuentra en la intersección de la fila de 2 y la columna de 3. Entonces 2*3 = 5. Análogamente hallamos 5*2 = 2. Luego:

5 * 2 = 2 ***Rpta.: 2***

b) La operación * ¿Tiene la propiedad de clausura en el conjunto dado?

Resolución

Para cualquier par de números del conjunto dado, el resultado es un elemento del mismo conjunto. Sí, tiene la propiedad de clausura.

c ¿Es conmutativa?

Cuando la operación es conmutativa la tabla es simétrica respecto a la diagonal que pasa por el operador. En este caso, lo es.

d. ¿Tiene elemento neutro?

Sí. Es el 5. Porque para cualquier número a del conjunto dado, $a * 5 = 5 * a = a$

Problemas

1. En el conjunto A = {0; 1; 2; 3; 4} definimos una operación mediante la siguiente tabla:

θ	0	1	2	3	4
0	4	3	2	1	0
1	3	4	3	2	1
2	2	3	4	3	2
3	1	2	3	4	3
4	0	1	2	3	4

¿Cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

A. *La operación tiene la propiedad de clausura.*

B. *La operación es conmutativa*

C. *Tiene elemento neutro*

D. *Tiene elemento simétrico*

A) 0 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 1

2. Aquí se presenta la tabla de la operación simbolizada por (*):

*	1	2	3	4
1	3	4	2	1
2	3	4	1	3
3	2	4	1	2
4	4	3	1	2

Según esta tabla determina el valor de E, donde:

E = 2 * 3 + 1 * [3 * (4 * 1)] + 4 * (3 * 2)

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

3. En el conjunto M = {a, b, c} definimos la operación interna de M × M → M simbolizada por ⊥. La tabla de la operación ⊥ se muestra a continuación:

¿Cuál es el resultado de la expresión?

$$M = \frac{a \perp [b \perp (c \perp a)]}{[(c \perp a) \perp b] \perp c}$$

⊥	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

A) a/c **B)** c/a **C)** b/a **D)** c/b **E)** a/b

4. En el conjunto M = {1; 2; 3; 4} definimos una operación mediante la siguiente tabla:

ϕ	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	2	1
3	1	2	3	4
4	4	1	2	3

Según esta tabla calcular:

$$E = (1 \phi 2) \phi [3 \phi (4 \phi 1)]$$

A) 4ϕ4 **B)** 1 **C)** 2
D) 3 **E)** 4

2.1.4 Operaciones de adición y multiplicación

Problema 1

En la siguiente adición, hallar el valor de A + B + C + D.

$$\begin{array}{r} \overbrace{8888\ldots\ldots\ldots\ldots8888}^{134\ cifras} + \\ 888\ldots\ldots\ldots\ldots8888 \\ 88\ldots\ldots\ldots\ldots8888 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 8888 \\ 888 \\ 88 \\ 8 \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots DCBA \end{array}$$

Resolución

Los puntos suspensivos significan "así sucesivamente". Se utilizan, en este caso, para no escribir todas las cifras.

Dado que el primer sumando tiene 134 cifras, y cada sumando tiene una cifra menos que el anterior, en total hay 134 sumandos.

La suma se efectúa por columnas de derecha a izquierda. De la suma de cada columna, si es mayor que 9, se pone la cifra de las unidades y se lleva las otras.

1ra Columna : Son 134 "ochos" ⇒ 134 × 8 = 1072 → se "pone" ⇒ A = 2

2da Columna : Son 133 "ochos" ⇒ 133 × 8 = 1064 + 107 = 1171 → se "pone" ⇒ B = 1

3ra Columna : Son 132 "ochos" ⇒ 132 × 8 = 1056 + 117 = 1173 → se "pone" ⇒ C = 3

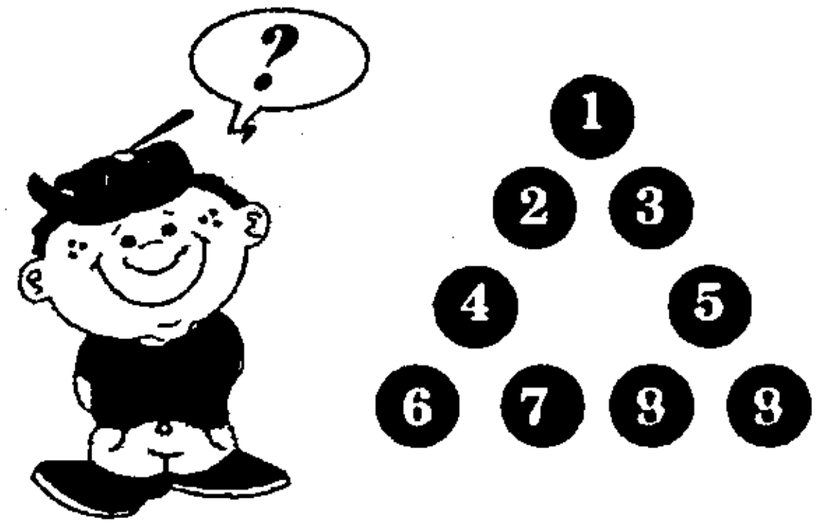
4ta Columna : Son 131 "ochos" ⇒ 131 × 8 = 1048 + 117 = 1165 → se "pone" ⇒ D = 5

Luego: A + B + C + D = 2 + 1 + 3 + 5 = 11

¿Has entendido?...Si tienes dudas, en lugar de considerar 134 cifras, considera sólo 4 "ochos" y efectúa la operación, luego vas extendiendo para más cantidad de cifras. Puedes tú mismo inventar tus propios problemas para que practiques.

Reto al Ingenio 2

Aquí tienes un triángulo formado por esferas numeradas del 1 al 9:



Debes distribuir las esferas de tal manera que los números de los lados sumen lo mismo y lo mayor posible

Problema 2

Si $(a+b+c)^2 = 169$. Calcular $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$.

Resolución

La notación $\overline{abc}$ representa un numeral de 3 cifras. Se coloca una barra superior para diferenciar de la multiplicación. Por ejemplo, si $a = 3$ y $b = 2$, ab representa 6, porque $ab = 3\times2 = 6$. En cambio $\overline{ab}$ representa 32, porque $\overline{ab} = 32$.

• ¿Qué número elevado al cuadrado nos da 169 ? ... El número es ..., entonces $\boxed{a+b+c=13}$

• Para hallar la suma pedida ubicamos los números en columna.

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \\ \overline{bca} \\ \overline{cab} \\ \hline 1443 \end{array}$$

Unidades : $c + a + b = 13$, se lleva 1
Decenas : $b + c + a = 13 + 1 = 14$, se lleva 1
Centenas : $a + b + c = 13 + 1 = 14$, se pone

Luego $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = \boxed{1443}$

Reto al ingenio 3

Provisto de los signos +, −, ×, ÷ ; Juanito se dispone a reponer las igualdades del tablero. ¿Puedes ayudarlo?

2	2	2	2 = 6
3	3	3	3 = 10
4	□	4	4 = 16
5	5	5	5 = 24

Problema 3

Hallar un numeral de la forma $\overline{abcdef}$, tal que que sus productos sucesivos por 5; 4; 6; 2 y 3 sean respectivamente iguales a los numerales formados permutando circularmente sus cifras.

Resolución

$\overline{abcdef}\times5 = \overline{fabcde}$ (1)

$\overline{abedef}\times4 = \overline{efabcd}$ (2)

$\overline{abcdef}\times6 = \overline{defabc}$ (3)

$\overline{abcdef}\times2 = \overline{cdefab}$ (4)

$\overline{abcdef}\times3 = \overline{bcdefa}$ (5)

Se deduce que $a = 1$, para que los productos no tengan más de 6 cifras.

En (5) $\overline{abcdef}\times3$ termina en 1 $\Rightarrow$ **f = 7**

En (4) $\overline{abcde7}\times2$ termina en 4 $\Rightarrow$ **b = 4**

En (3) $\overline{abcde7}\times6$ termina en 2 $\Rightarrow$ **c = 2**

En (2) $\overline{abcde7}\times4$ termina en 8 $\Rightarrow$ **d = 8**

En (1) $\overline{abcde7}\times5$ termina en 5 $\Rightarrow$ **e = 5**

$\therefore$ $\boxed{\overline{abcdef} = 142857}$

Problema 4

Sabiendo que $a \times \overline{mnp} = 696$; $\overline{mnp} \times b = 2436$ ***y*** $c \times \overline{mnp} = 2088$, ***hallar*** $\overline{mnp} \times \overline{abc}$.

Resolución

Recordemos cómo se efectúa una multiplicación de este tipo.
Por ejemplo **256×324:**

256×	*donde*	256×	← *Multiplicando*
324		324	← *Multiplicador*
1024	←	256×4	} *Productos parciales*
512	←	256×2	
768	←	256×3	
82 944			

Cada producto parcial es el resultado de multiplicar el multiplicando por cada una de las cifras del multiplicador.

$$\begin{array}{r} \overline{mnp}\times \\ \underline{\overline{abc}} \\ c\times\overline{mnp} \\ b\times\overline{mnp} \\ \underline{a\times\overline{mnp}} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} \overline{mnp}\times \\ \underline{\overline{abc}} \\ \overline{2088} \\ 2436 \\ \underline{696} \\ 96\,048 \end{array}$$

Luego: $\overline{mnp} \times \overline{abc} = 96048$

Problema 5

Se multiplica 47 por un número de 3 cifras. Si la diferencia de los productos parciales es 726. Hallar el producto de la multiplicación

Resolución

METODO (1)

La diferencia de los productos parciales es **7 – 4 = 3** veces el número de 3 cifras.
Por lo tanto el número de tres cifras es
726 ÷ 3 = 242. **Rpta.: 242**

METODO (2)

Sea $\overline{abc}$ el número de 3 cifras.

Entonces:

$$\begin{array}{r} \overline{abc}\times \\ 47 \\ \hline 7\times\overline{abc} \\ 4\times\overline{abc} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 1^{er}\ Pdto.\ parcial \\ \leftarrow 2^{do}\ Pdto.\ parcial \end{array}$$

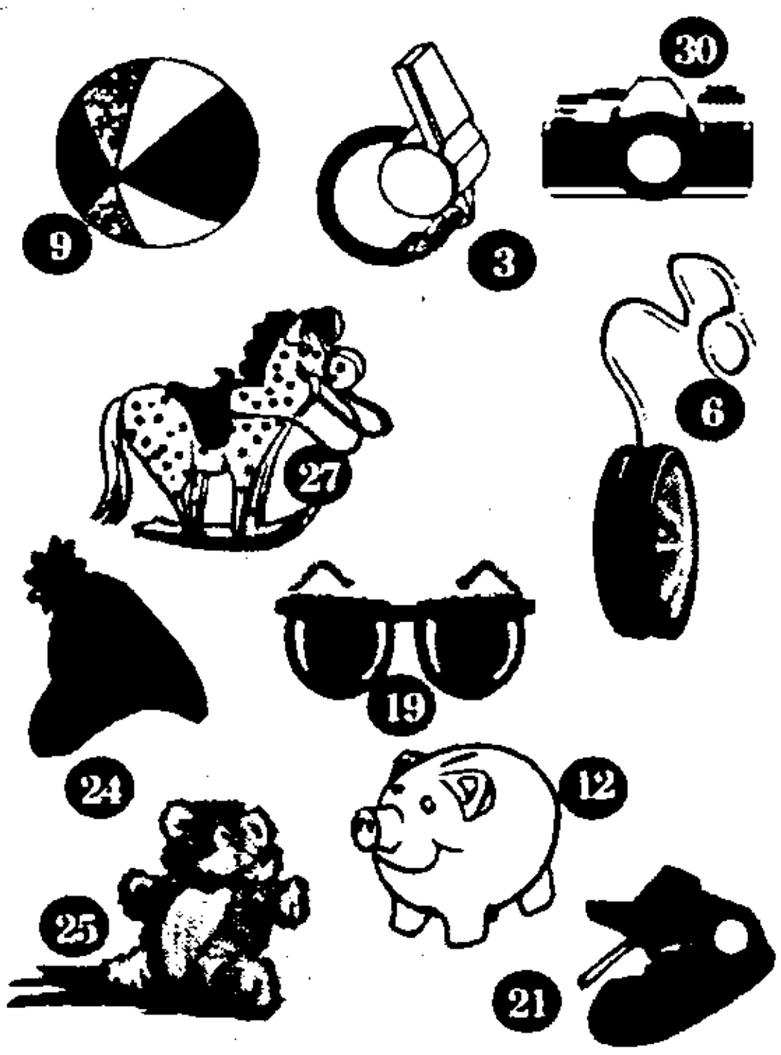
$7(\overline{abc}) - 4(\overline{abc}) = 726$

$3(\overline{abc}) = 726 \Rightarrow \overline{abc} = 242$ **Rpta.: 242**

Reto al ingenio 4

Las atracciones de la feria

Noelito y su novia Blanquita, se pasean observando la diversidad de objetos que se exhiben en los estantes de una feria del barrio. De pronto advierten un juego de "tiro al blanco". Tras la sugerencia de Blanquita, Noelito no pudo rehusar demostrar su gran puntería, haciendo exactamente 50 puntos. ¿Qué juguetes se ganó? Indicar uno de ellos.



Problemas

1. Hallar A + B + C + D en la siguiente adición:

$$\begin{array}{r} 6666\ldots\ldots\ldots\ldots 6666 + \\ 666\ldots\ldots\ldots\ldots 6666 \\ 66\ldots\ldots\ldots\ldots 6666 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 6666 \\ 666 \\ 66 \\ 6 \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots\ DCBA \end{array}$$

148 sumandos

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

2. Esta adición ha quedado propuesta esperando que alguien se atreva a resolverla. Sólo te pido que me digas, cuál es la cifra de las unidades de millar de la suma.

$$\begin{array}{r} \overbrace{4747\ldots\ldots\ldots\ldots 4747}^{128\ cifras} + \\ 474\ldots\ldots\ldots\ldots 4747 \\ 47\ldots\ldots\ldots\ldots 4747 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 4747 \\ 474 \\ 47 \\ 4 \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 2 E) 6

3. Si $a + b + c + d = 23$, calcular:

$$\overline{abcd} + \overline{dabc} + \overline{cdab} + \overline{bcda}$$

A) 25533 B) 23553 C) 25553
D) 5553 E) 2553

4. Se multiplica un número de tres cifras por 47.

¿Cuál es el producto si la suma de los productos parciales es 5478?

A) 23406 B) 23046 C) 23640
D) 23460 E) 23466

5. Un número de cuatro cifras se divide entre 48 y se obtiene 24 como cociente y un residuo máximo.

¿Cuál es el dividendo?

A) 1204 B) 1199 C) 1224
D) 1202 E) 1203

6. ¿Cuál es el menor número por el que debo multiplicar a 33 para obtener un número formando solamente por cifras 7?

A) 23568 B) 23567 C) 23566
D) 23565 E) 23569

7. Hallar C + D + U si:

$$\begin{array}{r} 77\ldots\ldots 777 + \\ 7\ldots\ldots 777 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 777 \\ 77 \\ 7 \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots CDU \end{array}$$

77 sumandos

A) 19
B) 18
C) 15
D) 16
E) 17

8. Hallar C + D – U en:

$$\begin{array}{r} 686\ldots\ldots 6868 + \\ 68\ldots\ldots 8686 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 6868 \\ 686 \\ 68 \\ 6 \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots CDU \end{array}$$

68 sumandos

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

2.1.5 ¿En qué cifra termina?

Problema 1

Hallar en qué cifra termina el resultado de la siguiente operación:

$$497^{2450} + 349^{6754}$$

Resolución

No pensarás efectuar la operación. ¡Ni lo sueñes! Entonces, ¿cómo puedo saber la cifra en que termina el resultado de la operación sin efectuarla? La pregunta es, "en qué cifra termina el resultado" y no "hallar el resultado.

Para determinar en qué cifra termina el resultado de la operación no es necesario efectuarla. Solamente hay que trabajar con las ***cifras terminales****.*

Antes, vamos a convenir en dos cosas:

PRIMERO.- El símbolo 42 representa al número cuarentidós, en realidad no es el número, sino, la representación del número. Lo correcto es llamarlo **numeral**. Pero por cuestiones prácticas, al numeral lo llamamos número y así vamos a considerar en este texto de aquí en adelante.

SEGUNDO.- Para designar que un número termina, por ejemplo en 7, vamos a escribir (...7) que leeremos "un número que termina en 7. Así; 426=...6 significa que el número 426 termina en 6. Por ejemplo, "$(...7)^2 = ...9$", se leerá "*un número que termina en 7 elevado al cuadrado, termina en 9*", esto es cierto cualquiera sea el número que termina en 7.

La expresión "$... 8 + ...9 = ...7$" se leería: "*un número que termina en 8 sumado con otro que termina en 9, termina en 7*".

Ahora volvamos a la resolución del problema.

Primero averigüemos en qué cifra termina 497^{2450} y luego procederemos con 349^{6754}.

- $(497)^{2450} = (...7)^{2450}$

Tenemos que averiguar en qué cifra termina un número

Origen de los Signos

+ y −

El origen de las abreviaturas comerciales se los encuentra en COMPENDIUM ARITHMETICA MERCATORUM, *de Eger, impreso en 1489 en Leipzig por J. Widmann. Antes, y aun después, los matemáticos empleaban o emplearon las palabras* ***et*** *o* ***additus, demptus*** *o* ***minus*** *(Fibonacci, 1202), P y* ***m*** *(Nicolas Chuquet, 1484) P y* ***m*** *(Cardan, siglo XVI).*

×

Signo de multplicación; aparece en la obra del inglés William Oughtred CLAVIS MATHEMATICA *(Oxford, 1631). Antes Michel Stiffel había empleado el signo M (1545); Francois Viéte, el fundador del álgebra moderna escribía* ***in****.*

·

Nuevo signo de multiplicación introducido por el filósofo y matemático Leibniz en 1698.

:

Este signo de la división se debe igualmente a Leibniz. Antes de él, en 1659 el inglés Rahn había usado el signo ÷, que aún se emplea a veces en los países anglosajones.

=

Se encuentra en THE WEHSTONE OF WITTE *de Robert Recorde publicado en Londres en 1557. En el continente, hasta Leibniz, se continúa escribiendo el signo cartesiano* α.

CONTINÚA EN LA SGTE. PÁGINA →

que termina en 7 elevado a 2450. Veamos por inducción:

01

$(\ldots 7)^1 = \ldots 7$ $(\ldots 7)^5 = \ldots 7$ $(\ldots 7)^9 = \ldots 7$

$(\ldots 7)^2 = \ldots 9$ $(\ldots 7)^6 = \ldots 9$ $(\ldots 7)^{10} = \ldots 9$

$(\ldots 7)^3 = \ldots 3$ $(\ldots 7)^7 = \ldots 3$ $(\ldots 7)^{11} = \ldots 3$

$(\ldots 7)^4 = \ldots 1$ $(\ldots 7)^8 = \ldots 1$ $(\ldots 7)^{12} = \ldots 1$

Cada vez que el exponente sea múltiplo de 4, la potencia termina en 1. Si el exponente es mayor en 1 al múltiplo de 4, termina en7. Si el exponente es mayor en dos unidades al múltiplo de 4, la potencia termina en 9. Así sucesivamente. ¿Has comprendido?... Si es así, es suficiente analizar el exponente.

En $(\ldots 7)^{2450}$ el exponente es 2450. Averigüemos si es

múltiplo de 4: (Múltiplo de 4 se denota por $\overset{\circ}{4}$)

$$\begin{array}{r|l} 2450 & 4 \\ 2 & 612 \end{array} \Rightarrow 2450 = 2448 + 2 \Rightarrow \boxed{2450 = \overset{\circ}{4} + 2}$$

El exponente es mayor en 2 unidades al múltiplo de 4, entonces:

$497^{2450} = (\ldots 7)^{2450} = (\ldots 7)^{4^\circ + 2} = (\ldots 7)^2 = \boxed{\ldots 9}$

Ahora veamos 349^{6754}

$(349)^{6754} = (\ldots 9)^{6754}$

Por inducción:

$(\ldots 9)^1 = \ldots 9$

$(\ldots 9)^2 = \ldots 1$

$(\ldots 9)^3 = \ldots 9$

$(\ldots 9)^4 = \ldots 1$

Cuando el exponente es par la potencia termina en 1, y cuando es impar, en 9. Luego:

$(349)^{6754} = (\ldots 9)^{6754} = (\ldots . 9)^{par} = \boxed{\ldots 1}$

Finalmente:

$497^{2450} + 349^{6754} = (\ldots 7)^{2450} + (\ldots 9)^{6754} = \ldots 9 + \ldots 1 = \boxed{\ldots 0}$

El resultado termina en cero.

Rpta.: 0

01

Para averiguar en qué cifra termina $(\ldots 7)^3$, basta multiplicar por 7 a la cifra en que termina $(\ldots 7)^2$.

$(\ldots 7)^2 = \ldots 9$

$\Rightarrow (\ldots 7)^3 = \ldots 9 \times 7 = \ldots 3$

→ VIENE DE LA PÁGINA ANTERIOR

><

Mayor que y menor que, fueron signos imaginados por Thomas Harriott (ARTE ANALYTICA PRAXIS, Londres, 1631).

( )

El paréntesis se debe al matemático francés Girard (principios del siglo XVII).

∞

Símbolo del infinito se encuentra en ARITHMETICA INFINITORUM, 1655, de Wallis.

a ≡ b (mod c)

a = b *módulo* c, *que significa que* a *es múltiplo de* c *más* b, *fue imaginado por Gauss, en 1801.*

!

El signo de la factorial (3! = 1×2×3) fue creado por Kramp, en 1808.

CONTINÚA EN LA SGTE. PAGINA →

Problema 2

¿En qué cifra termina el resultado de operar: $(111111 + 222222 + 333333)^{444444}$

Resolución

La operación pedida se reduce a:

$$(\underbrace{...1 + ...2 + ...3}_{...6})^{444444} = (...6)^{444444} = \boxed{...6}$$

Un número que termina en 6, elevado a cualquier exponente termina en 6.

Rpta.: 6

Problema 3

"Compré casets importados a 9 soles y un número impar de casets nacionales a 5 soles. Pagué con 150 soles y me dieron 23 soles de vuelto" Comentó Néstor a su hijo. "Sé cuántos cassets has comprado papá" contestó el hijo, tras hacer algunos cálculos. ¿Cómo lo supo? ¿Cuántos compró?

Resolución

- El importe de la compra es 150 – 23 = 127
- Si x son los casets importados e y los nacionales, resulta:

$$9x + 5y = 127 \quad (1)$$

Para buscar los valores de x e y que satisfagan esta igualdad, vamos aplicar lo que hemos aprendido del capítulo hasta el momento:

$$\underbrace{9x}_{?} + \underbrace{5y}_{..5} = \underbrace{127}_{..7}$$

- Impar × 5 = .. 5
- .. 2 + .. 5 = .. 7

¿En qué cifra debe termina $9x$? ... Muy bien..... en 2. Para que $9x$ termine en 2, x debe ser 8 ó 18. No puede ser 18 porque 9 × 18 = 162 resulta mayor que 127. Luego:

$$\underbrace{9x}_{72} + \underbrace{5y}_{55} = 127 \Rightarrow x + y = 8 + 11 = 19$$

Rpta.: 19

→ *Viene de la página anterior*

Exponentes y radicales:

$\boxed{a^3}$

La notación de las potencias por medio de exponentes se atribuye a Descartes quien escribia aa, a^3, a^4, a^5, *etc. El empleo de* aa *por* a^2 *continuó durante mucho tiempo (el mismo número de signos tipográficos). Pero si Descartes generalizó el empleo de los exponentes, no fue él quien los inventó. Se los descubre en el* Triparty en la Science des nombres, *escrito en 1424 —y redescubierto en 1841—por el médico y matemático Nicolas Chuquet.*

$\boxed{\sqrt{},\ \sqrt{\sqrt{}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}}$

La primera utilización de estos signos para designar la raíz cuadrada, la raíz cúbica, la raíz cuarta, se encuentra en el matemático alemán Rudolph (die Coss, Leipzig 1525); su compatriota Michel Stiffel los vulgarizó en Arithmetica Universalis *(1544)*

PRACTICA

¿En qué cifra termina cada una de las siguientes potencias?

$5^{124} = ...$

$6^{800} = ...$

$8^{900} = ...$

$149^{149} = ...$

$472^{100} = ...$

Problemas

1. *¿En qué cifra termina el resultado de cada una de las siguientes operaciones?*

   a) 24^{200} *d)* 242^{651}

   b) 38^{465} *e)* 393^{785}

   c) 275^{1000} *f)* 241^{950}

   ¿Cuántos no terminan en 5 ni 1?

   A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 1 **E)** 5

2. *Hallar la última cifra del resultado de operar:*

$$\left(373^{200}+432^{300}\right)^{400}$$

   A) 4 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 5

3. *¿En qué cifra termina el resultado de operar*

$$\left(2^{100}+3^{200}+4^{300}+5^{400}+6^{500}+7^{600}\right)?$$

   A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7

4. *¿En qué cifra termina el resultado de.*

$$2^{300}\left(3^{40}+7^{50}\right)+8^{200}\left(9^{40}+8^{50}\right)$$

   A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

5. *El resultado de la operación:*

$$24^{36^{120}}+38^{24^{560}}$$

   A) 6 **B)** 8 **C)** 0 **D)** 2 **E)** 4

6. *¿En qué cifra termina el resultado de?*

$$3^{10}+4^{11}+5^{12}+6^{13}+7^{14}+\ldots+200^{207}$$

   A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 7

7. *¿En qué cifra termina:*

$$3^{100}+3^{101}+3^{102}+\ldots+3^{400}$$

   A) 2 **B)** 0 **C)** 1 **D)** 4 **E)** 3

8. *¿En qué cifra termina el resultado de:*

$$8^{120}+8^{121}+8^{122}+8^{123}+\ldots+8^{300}$$

   A) 6 **B)** 2 **C)** 8 **D)** 4 **E)** 0

9. *¿Si* k^{307} *termina en 2, siendo k un número positivo.*

   ¿En qué cifra termina k?

   A) 2 **B)** 4 **C)** 8 **D)** 6 **E)** 9

10. *¿Si* a^{103} *termina en 3, siendo a un número entero positivo. ¿En qué cifra termina a?*

    A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

11. *¿Si* m^{354} *termina en 9, ¿en qué cifra termina* m^{652} *?*

    A) 2 **B)** 1 **C)** 9 **D)** 4 **E)** 3

12. *Si al multiplicar* $\overline{ABC}$ *por un número que termina en 347, el producto termina en 933, ¿cuál es el valor de* $A+B+C$*?*

    A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

2.1.6 Criptoaritmética

La CRIPTOARITMÉTICA no es más que un juego. Consiste en reemplazar las cifras de las operaciones matemáticas por letras u otros signos. El problema radica en hallar las cifras que se "esconden" bajo las letras. No se sabe en qué época se inventó, pero los aficionados a este atractivo juego comenzaron a interesarse por ella en el Primer Congreso Internacional de Recreación Matemática celebrado en Brucelas en el año 1935.

La elaboración de un problema de criptoaritmética es un **procedimiento de cifra por sustitución**, bajo una regla aritmética.

Los problemas criptoaritméticos son bastante seductores, sus soluciones no requieren conocimientos matemáticos avanzados, pero exigen numerosas hipótesis y, en consecuencia, cálculos largos y trabajosos que implican grandes riesgos de confusión.

Por eso amigo(a), lector(a), te recomiendo paciencia y minuciosidad para este género de problemas, pues los resultados serán muy gratificantes.

Problema 1

Lupita ha descubierto que para multiplicar por 3 el número $\overline{1ABCDE}$ basta trasladar la cifra 1 al final del número. ¿Puedes hallar A + B + C + D + E?

Resolución

Disponemos la multiplicación en la forma habitual:

1° $1ABCDE \times 3 = ABCDE1$

2° $1ABCD7 \times 3 = ABCD71$

3° $1ABC57 \times 3 = ABC571$ (1 → 1, 2 → A, 8 → B; C → 5, 7 → C)

1° 3 × E termina en 1 ⇒ **E = 7**

3 × 7 = 21, pongo 1 y llevo 2

2° Sustituyendo E por 7:

3 × D + 2 termina en 7 ⇒ **D = 5**

3 × 5 + 2 = 17, pongo 7 y llevo 1

3° Sustituyendo D por 5:

3 × C + 1 termina en 5 ⇒ **C = 8**

3 × 8 – 1 = 25, pongo 5 y llevo 2

4° Sustituyendo C por 8:

3 × B + 2 termina en 8 ⇒ **B = 2**

3 × 2 + 2 = 8 pongo 8 y no llevo

5° Sustituyendo B por 2

3 × A termina en 2 ⇒ **A = 4**

LA CRIPTOGRAFIA

La Criptografía (cripto = oculto, grafía = escritura) es el arte de las escrituras secretas. Desde tiempos muy remotos han sido utilizados los mensajes secretos por muchas personas desde los amantes secretos hasta los espías de países rivales.

La Criptografía consiste en transformar un mensaje en un mensaje secreto, mediante transposición, mezclando según una regla las letras, las cifras, frases o palabras, o mediante la sustitución, que consiste en reemplazar esos elementos por otras letras, cifras o signos.

El emisor transforma el mensaje (mediante el cifrado) en uno secreto que sólo el destinatario lo puede entender (mediante el descifrado). Si dejamos de lado los textos bíblicos en cifra, discutidos y discutibles, el procedimiento criptográfico más antiguo que se conoce es la escitala de los lacedemonios, de la que Plutarco nos dice que fue empleada en la época de Licurgo (siglo IX antes de nuestra era). La escitala era un palo en el cual se enrollaba en espiral una tira de cuero. Sobre esa tira se escribía el mensaje en columnas paralelas al eje del palo. La tira desenrollada mostraba un texto sin relación aparente con el texto inicial, pero que podía leerse volviendo a enrollar la tira sobre un palo del mismo diámetro que el primero.

Hoy los procedimientos de cifrado utilizan las técnicas de la electrónica y son tan complejas en comparación con los procedimientos antiguos.

Luego: **A + B + C + D + E = 7 + 5 + 8 + 2 + 4 = 26**

Rpta.: 26

Problema 2

En la siguiente multiplicación se han borrado las cifras que fueron escritas con lápiz. ¿Puedes completarlas. Cada asterisco indica la cifra que falta.

```
  **9 ×
   **
 ----
  **3
 **5
----
**2*
```

Resolución

Completamos las cifras obvias y sustituimos algunos asteriscos por letras

```
  a b 9
    m n
 ------
   *7 3
 **5
------
 **2 3
```

En 1

Significa "termina en 3"

* $n \times 9 = ..3 \Leftrightarrow n = 7$

* $m \times 9 = ..5 \Leftrightarrow m = 5$

En 2

* $7 \times 9 = 63 \leftarrow$ *se pone*

$7 \times b + 6 = ..7 \Rightarrow \boxed{b = 3}$ (..1 ⇐)

$\Rightarrow 7 \times 3 + 6 = 27 \leftarrow$ *se pone*

* $7 \times a + 2 = 1$ *cifra* $\Rightarrow \boxed{a = 1}$

Completando se obtiene: →

```
  1 3 9 ×
    5 7
 -------
  9 7 3
 6 9 5
-------
7 9 2 3
```

Reto al ingenio 5

En cada una de estas multiplicaciones, las cifras del multiplicando, multiplicador y producto son las 9 cifras significativas (1 al 9).

Descubre las cifras y reemplaza los asteriscos.

```
* * * * ×
      *
 -------
* * * *
```

```
  * * * ×
    * *
 -------
** * * *
```

Hay 2 soluciones para la primera multiplicación y 7 soluciones para la segunda. Encuentra una de ellas para cada multiplicación.

Problema 3

Hay un numeral de 4 cifras que tiene una curiosa propiedad: si quieres multiplicarlo por 4, es suficiente que inviertas el orden de sus cifras. ¿Te atreves a hallarlo?

Resolución

Sea $\overline{ABCD}$ el numeral, entonces debe cumplirse que:

En 1

$$\begin{array}{r} ABCD \times \\ \quad 4 \\ \hline \overline{DCBA} \end{array}$$

* $4 \times D = ..A \Rightarrow$ (A es par)

* $4 \times A =$ *debe ser de una cifra*

$\Rightarrow A = 1$ *ó* 2, *como es par* $\boxed{A = 2}$

ARITMETICA DE LOS PARES E IMPARES

El conjunto de los números enteros positivos 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; .... se divide en dos subconjuntos: los ***pares*** *y los* ***impares***

pares: 2; 4; 6; 8; 10; ...

Impares: 1; 3; 5; 7; 9; ...

Mediante operaciones de adición y multiplicación con números pares ¿puedes obtener un número par?

$4 + 8 = 12$ *(par)*

$246 + 572 = 818$ *(par)*

$24 \times 8 = 192$ *(par)*

Ahora intentemos con los impares:

$7 + 9 = 16$ *(par)*

$7 \times 9 = 63$ *(impar)*

$13 \times 5 = 195$ *(impar)*

② $2BCD \times 4 = DCB2$

En 2

* $4 \times D = \ldots 2 \Rightarrow D = 3$ ó 8
* pero $D \geq 4 \times 2 \Rightarrow \boxed{D = 8}$

En 3

③ $2BC8 \times 4 = 8CB2$

* $4 \times 8 = 32 \leftarrow$ se pone
* $4 \times C + 3 = \ldots B \Rightarrow \boxed{B \text{ es impar}}$
* Del producto $4 \times B$ no se lleva

$\Rightarrow B = 1$ ó 2, como es impar $\boxed{B = 1}$

④ $21C8 \times 4 = 8C12$

En 4

* $4 \times C + 3 = \ldots 1 \Rightarrow C = 2$ ó 7
* Pero $C \geq 4 \times 1 \Rightarrow \boxed{C = 7}$

$\therefore \boxed{ABCD = 2178}$

Problema 4

Un club moderno está reglamentado del modo siguiente: Sólo es posible entrar en parejas de hombre y mujer. Los socios tienen un carnet con un código par para las mujeres y un código impar para los hombres. En la puerta de ingreso hay un aparato de códigos que tiene una ranura en la que los miembros introducen su carnet para ingresar. El aparato transmite la lectura a un computador, el cual opera con los códigos de la pareja y según el resultado activa un interruptor para abrir la puerta. Si la pareja es del mismo sexo, no ordena abrir la puerta. ¿En cuál de las leyes, adición o multiplicación, de la aritmética de pares e impares, está basada el programa de la computadora?

Resolución

Cód 1	Cód 2	Cód 1 + Cód 2	Cód 1 × Cód 2
par	par	par	par
par	impar	impar	par
impar	par	impar	par
impar	impar	par	impar

Sólo en la adición dos códigos de distinta paridad dan impar y dos códigos de la misma paridad dan par. Entonces, la computadora suma los códigos: si resulta impar abre la puerta; si resulta par, no abre la puerta.

¿Qué conclusiones puedes deducir de estas observaciones? ¿Puedes enunciar alguna ley de la aritmética de los pares e impares?

ADICIÓN

PAR + PAR = ...
IMPAR + IMPAR = ...
PAR + IMPAR = ...

MULTIPLICACIÓN

PAR × PAR = ...
IMPAR × IMPAR = ...
PAR × IMPAR = ...

Terminando de completar el cuadro de arriba, has enunciado las leyes que rigen la aritmética de los PARES e IMPARES. *¿La importancia de estas leyes se podría comparar con las de Newton? Tal vez no. Pero las leyes de Newton han sido cuestionadas porque han sido puestas en evidencia sus limitaciones, por tanto, su validez es restringida.*

Compara estas leyes, con la ley de los signos de la adición y multiplicación de enteros.

¿Tienen aplicación estas leyes? ..., ¡Si! y muchas.

Ejercita

Si x = par e y = impar

Deduce:

a) $x^2 + y^2 = \ldots\ldots$

b) $x^3 + y^3 = \ldots\ldots$

c) $3x + 2y = \ldots\ldots$

d) $xy + x + y = \ldots\ldots$

e) $3x^2 + 2y + 1 = \ldots\ldots$

Problemas

1. En la multiplicación

$$\begin{array}{r} 2\ M\ N\ P\times \\ \hline 3 \\ \hline M\ N\ P\ 1 \end{array}$$

Las cifras han sido sustituidas por letras.

Luego de descifrar calcular $\overline{MN} \times \overline{NP}$

A) 4845 B) 4585 C) 4854
D) 4835 E) 4848

2. En la adición siguiente:

$$\begin{array}{r} A\ B\ C\ D+ \\ C\ B\ A\ D \\ \hline 1\ 3\ 1\ 2\ 8 \end{array}$$

Cada letra sustituye una cifra.

¿Cuánto vale $A + B + C + D$?

A) 18 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

3. Completar la adición:

$$\begin{array}{r} M\ 7\ 4\ N+ \\ P\ 7\ M \\ 5\ N\ M\ 2 \\ \hline N\ M\ M\ 6\ 8 \end{array}$$

y calcular $M + N + P$

A) 10 B) 6 C)7 D) 12 E) 9

4. Restituir la adición

$$\begin{array}{r} A\ B\ 7\ D+ \\ B\ 7\ D\ A \\ \hline 1\ 4\ 2\ 3\ 4 \end{array}$$

Hallar $(A + B + D)$

A) 12 B) 13 C)14 D) 18 E) 16

5. ¿Puedes determinar qué cifras han reemplazado cada una de las letras en la siguiente adición? Te doy una pista: C es impar.

$$\begin{array}{r} 5\ 3\ C\ D+ \\ E\ D\ C\ 3 \\ \hline K\ 3\ K\ 5\ G \end{array}$$

Hallar: $(C + D + E + K + G)$

A) 22 B) 21 C)20 D) 19 E) 18

6. Reconstruir la multiplicación y dar como respuesta la suma de cifras del multiplicando.

$$\begin{array}{r} *\ *\ *\times \\ *\ 9 \\ \hline *\ *\ 7\ * \\ *\ *\ 9\ * \\ \hline *\ 9\ *\ 9\ 6 \end{array}$$

A) 15 B) 16 C)17 D) 18 E) 19

7. Completar la división y dar la suma de cifras del divisor.

$$\begin{array}{r|l} 4\ *\ *\ 6 & *2 \\ \hline 3\ *\ * & 5* \\ \hline *\ *\ * & \\ \hline *\ *\ * & \\ \hline \end{array}$$

A) 11 B) 10 C)9 D) 8 E) 7

8. En la siguiente división hallar $(A + B + C)$

$$\begin{array}{r|l} 2\ A\ A\ 7\ B & AAB \\ \hline C\ C\ C\ B & BB \\ \hline C\ C\ C\ B & \\ C\ C\ C\ B & \\ \hline \end{array}$$

A) 10 B) 11 C)12 D) 13 E) 14

2.2 Problemas de Operaciones Combinadas

2.2.1 Hallar dos números conociendo la suma y la diferencia

Un problema clásico y de conocimiento obligatorio, consiste en calcular dos números conociendo la suma y la diferencia.

Por ejemplo, ¿Cuáles son los dos números que sumados, dan 49 y restados dan 13?

Lógicamente podemos acudir al álgebra, plantear un sistema de dos ecuaciones (E1) cuya solución nos da la respuesta.

(E1)

$$x + y = 49 \quad (1)$$
$$x - y = 13 \quad (2)$$

Sumando (1) + (2)

$$x + y + x - y = 49 + 13 \quad (1)$$
$$2x = 62$$
$$\boxed{x = 31}$$
$$En\ (1): 31 + y = 49$$
$$\boxed{y = 18}$$

Podemos inclusive, generalizar. Sean x e y los números, que se desean conocer y sean S y D, respectivamente, la suma y diferencia de x e y. En consecuencia:

$$x + y = S \quad (1)$$
$$x - y = D \quad (2)$$

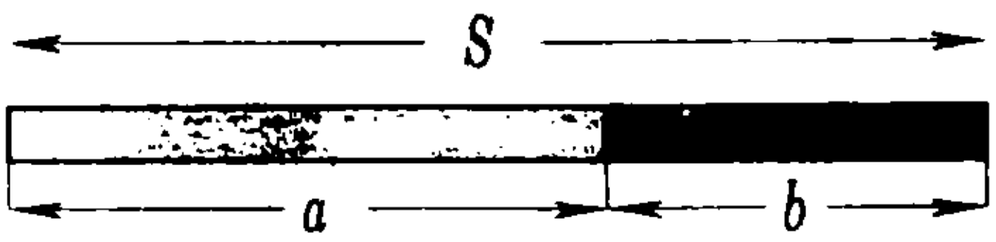
La solución del sistema es:

$$\textit{Número mayor: } x = \frac{S + D}{2} \qquad \textit{Número menor: } y = \frac{S - D}{2}$$

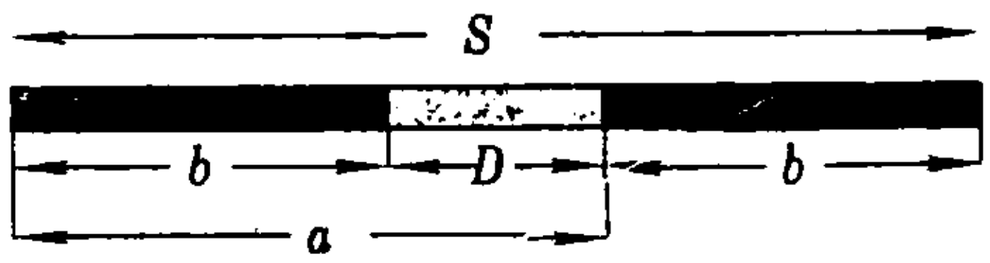
Por ejemplo, S = 49 y D = 13; entonces: $\boxed{x = \frac{49 + 13}{2} = 31}$ y $\boxed{y = \frac{49 - 13}{2} = 18}$

Pero, ¿cómo encontrar los números sin ayuda del álgebra? Sobre todo, cuando ciertas universidades, como la Universidad del Pacífico, no permite acudir a estas fórmulas.

Veamos: Sean a y b los números buscados cuya suma es S y su diferencia D. Representemos las relaciones gráficamente:



Aquí se muestra que a y b suman S.



En a tomamos b. Se pone de manifiesto que la diferencia de a y b es D.

En el gráfico (2), si a S le quitamos D, nos queda el doble de b. Por consiguiente la mitad de esta diferencia nos da el valor de b. Para hallar a, le sumamos D al número b. Así, si la suma es 49 y la diferencia 13:

Número menor: $49 - 13 = 36 \Rightarrow 36 \div 2 = \boxed{18}$

Número mayor: $18 + 13 = \boxed{31}$

A la derecha mostramos más ejemplos. E1

E1

1. Suma = 3781
Diferencia = 2183

Número menor:

$$\begin{array}{r} 3781- \\ 2183 \\ \hline 1598 \end{array} \div 2 = \boxed{799}$$

Número mayor:

$799 + 2183 = \boxed{2982}$

2. Suma = 2857
Diferencia = 1240

Número menor:

$$\begin{array}{r} 2857- \\ 1240 \\ \hline 1617 \end{array} \div 2 = \boxed{808,5}$$

Número mayor:

$808,5 + 1240 = \boxed{2048,5}$

Problema 1

En la fiesta organizada por Panfis y sus amigos, las chicas bailaron a rabiar. Parecía que se habían puesto de acuerdo respecto con cuántos hombres debían bailar.

Carola bailó con Panfis y 7 más. Dora bailó con Panfis y 8 más. Rocío bailó con 10 muchachos. Así sucesivamente, la última bailó con todos los chicos. Si a la fiesta asistieron 53 en total, ¿cuántos son los amigos y las amigas de Panfis que participaron en la fiesta?.

Resolución

• Entre hombres y mujeres hacen 53 (suma = 53)

• Si "n" representa el total de mujeres y v el total de varones, se tiene:

1° Carola bailó con 8 $\Rightarrow$ $8 - 1 = 7$
2° Dora bailó con 9 $\Rightarrow$ $9 - 2 = 7$
3° Rocío bailó con 10 $\Rightarrow$ $10 - 3 = 7$
⋮ ⋮
n° Ultima bailó con $v \Rightarrow \boxed{v - n = 7}$

Se observa que la diferencia entre varones y mujeres es 7. Luego, hay que hallar v y n, conociendo la suma, = 53 y la diferencia = 7.

Número de mujeres: $53 - 7 = 46 \Rightarrow 46 \div 2 = \boxed{\textbf{23 amigas de Panfis.}}$

Número de varones: $23 + 7 = 30 \Rightarrow \boxed{\textbf{29 amigos de Panfis.}}$

Problema 2.

Dos automovilistas separados 342 kilómetros, parten al encuentro al mismo tiempo y se encuentran luego de 2 horas. Hasta el encuentro el más veloz ha recorrido 36 kilómetros más que el otro.

¿Cuántos kilómetros ha recorrido cada uno hasta el punto de encuentro? ¿Con qué rapidez en km/h, suponiendo uniforme para ambos, se han desplazado cada uno?.

Resolución

• Los recorridos de ambos tienen que sumar 342 km

• "El más veloz ha recorrido 36 km más que el otro", significa que la diferencia entre los recorridos es 36 km. Luego:

El menos veloz recorrió: $342 - 36 = 306 \Rightarrow 306 \div 2 =$ **153 km**

El más veloz recorrió: $153 + 36 =$ **189 km.**

El tiempo recorrido para ambos es 2 horas. El menos veloz recorrió 153 km en 2 horas, o sea $153 \div 2 =$ **76,5 km/h** El más veloz: $189 \div 2 =$ **94,5 km/h**

Problema 3

Chito y su amigo Aliso se disponen a jugar a las cartas.

– Jugaré contigo, pero me tendrás que prestar 37 soles para tener ambos la misma suma —le dice Aliso mientras cuenta su dinero.

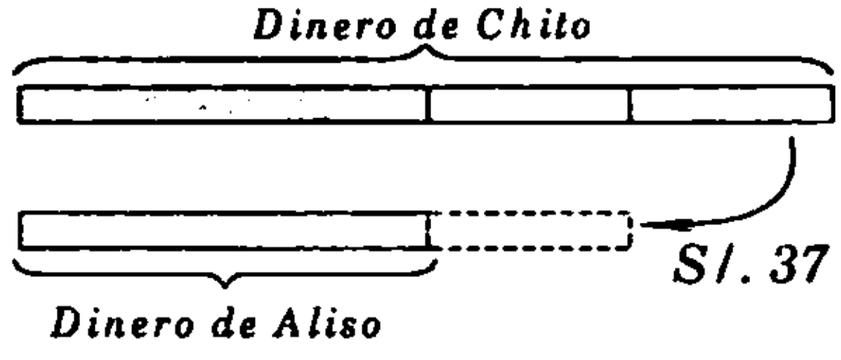
– Acepto. Además, como pienso ganarte todo el dinero que tienes, tendré 346 soles luego de dejarte "micio".

¿Puedes calcular cuánto de dinero tiene cada uno?

Resolución

• Entre ambos tienen S/. 346. (Suma = 346)

• Si para tener ambos la misma suma, Chito da S/. 37, entonces la diferencia entre las sumas que poseen es $2 \times 37 = 74$ (Ver fig.)



$\therefore$ Aliso tiene: $346 - 74 = 272 \Rightarrow 272 \div 2=$ **136 soles**
y Chito tiene : $136 + 74 =$ **210**

Problemas

1. ***En una fiesta donde participaron 88 personas, la primera dama bailó con 5 caballeros, la segunda con 6, la tercera con 7 , así sucesivamente, la última bailó con todos los caballeros. ¿Cuántos caballeros asistieron a la fiesta?***

   A) 42 **B)** 43 **C)** 44 **D)** 46 **E)** 48

2. ***En una pista circular de 480 m de longitud, parten simultáneamente dos atletas, del mismo punto de la pista y en sentidos contrarios. Cuando se encuentran, uno ha recorrido 14 m más que el otro. ¿Cuántos metros ha recorrido el más veloz hasta el punto de encuentro?***

   A) 240 m **B)** 247 m **C)** 233 m
   D) 237 m **E)** 245 m

3. ***Carmen le dice a Piero.***

   – Entre ambos tenemos 134 soles. Si tú me dieras 23 soles, ambos tendríamos la misma suma.

   ¿Cuánto tiene carmen?

   A) 36 soles **B)** 40 soles **C)** 44 soles
   D) 67 soles **E)** 48 soles

4. ***Dos artículos se venden en 348 soles, cobrando por uno de ellos, 24 soles más que por el otro.***

¿En cuánto se vendió el más barato?

A) S/. 180 **B)** S/. 188 **C)** S/. 162
D) S/. 146 **E)** S/. 160

5. ***Una varilla de madera de 134 cm de longitud se rompe en dos pedazos uno 20 cm más largo que el otro.***

¿Cuál es la longitud del pedazo más largo?

A) 77 cm **B)** 76 cm **C)** 57 cm
D) 80 cm **E)** 65 cm

6. ***Se vendieron 40 juegos de buzos (casaca y pantalón) en 1280 soles. La casaca cuesta 6 soles más que el pantalón. ¿Cuál es el precio de un pantalón?***

A) 19 soles **B)** 16 soles **C)** 15 soles
D) 14 soles **E)** 13 soles

7. ***Un recipiente lleno de agua pesa 13 kg. Si el contenido pesa 11 kg más que el recipiente.***

¿Cuántos litros de agua contiene el recipiente?

A) 12 l **B)** 11 l **C)** 10 l
D) 9 l **E)** 8 l

2.2.2. Aplicaciones comerciales

Problema 1

Se compra un artículo en 248 soles y se vende en 398 ¿Cuál es la ganancia en la venta?

Resolución

Para vender un producto se invierte en la compra o en producirlo.

El importe de la venta puede ser igual a la suma invertida, entonces ***no hay ganancia*** *ni pérdida. Puede ser menor que la suma invertida, entonces* ***hay pérdida****. Por último, puede ser mayor que la suma invertida, entonces* ***hay ganancia****.*

Por consiguiente, la diferencia entre el precio de venta y la inversión hecha en la compra o su producción, nos da la ganancia o la pérdida.

Comprando en 248 soles se vende en 398 soles, entonces

se gana **398 – 248 = 150 soles**

Rpta.: 150 soles

Problema 2

Se compraron varios artefactos en 297 soles y se vendieron en 427 soles. Los gastos de venta ascienden a 68 soles. ¿Cuál es la utilidad neta de la venta?

Resolución

Generalmente el proceso de la venta ocasiona gastos, como el pago de vendedores, gastos de movilidad, embalaje, etc.

Entonces la diferencia entre el ***precio de venta*** *y el* ***precio de costo*** *da la* ***ganancia bruta****. De esta ganancia se descuentan los gastos de venta y nos queda la* ***ganancia neta****.*

Ganancia bruta : 427 – 297 = 130 soles

Ganancia neta : 130 – 68 = **62 soles**

Rpta.: 62 soles

Problema 3

Un artículo se compra con un descuento de 18 soles sobre el precio de lista y se vende en 348 soles, obteniendo una ganancia neta de 48 soles. La venta ocasio-

nó un gasto de 37 soles. ¿Cuál es el precio de lista del artículo?

Resolución

Muchas empresas elaboran una lista de precios para ofrecer al público. Pero, generalmente en el momento de la venta se hace un descuento sobre este precio.

- La ganancia bruta incluye los gastos de venta y la ganancia neta, o sea, es:

  48 + 37 = 85 soles.

- Para que al vender en 348 soles la ganancia bruta sea 85 soles, quiere decir que costó

  348 – 85 = 263 soles.

- Se compró en 263 luego de un descuento de 18 soles, entonces el precio de lista es

  263 + 18 = 281 soles.

Rpta.: 281 soles

Problema 4

Se ha comprado 15 docenas de vasos por 345 soles. Los vasos fueron vendidos por decenas a 24 soles, la decena. ¿Cuál es la ganancia de la venta?

Resolución

Cuando no se especifica respecto del tipo de ganancia, se sobreentiende que se refiere a la ganancia bruta.

¿Cuál es tu plan para resolver el problema?... Te sugiero la siguiente idea: Tenemos el precio de costo, ¿no es cierto que averiguando el importe de la venta el problema estaría resuelto? Veamos:

Las 15 docenas son 15 × 12 = 180 vasos, que hacen 180 ÷ 10 = 18 decenas. Cada decena se vendió en 24 soles, entonces el importe de la venta es 18 × 24 = 432 soles. Luego la ganancia es 432 – 345 = **87 soles**.

Rpta.: 87 soles

Problema 5

Un comerciante ha comprado 80 m de tela a 18 soles el metro. Esta tela tiene la propiedad de encogerse 2 cm por cada metro cuando se lava.

¿A qué precio debe venderla el metro después de lavarla, si quiere ganar 520 soles en este negocio?

Resolución

El comerciante ha invertido 80×18 = 1440 soles.

Al lavarla, de cada metro sólo queda 0,98 m, entonces, de los 80 metros queda 0,98×80 = 78,4 m.

Para ganar 520 soles debe vender toda la tela en 1440 + 520 = 1960 soles, esto es, a 1960÷78,4 = 25 soles el metro.

Rpta.: 25 soles

Problema 6

Un ómnibus que cubre la ruta entre dos puntos de una ciudad, ha recaudado 58,2 soles en pasajes. El precio del pasaje es único e igual a 0,6 soles, sin importar el lugar donde suba o baje el usuario. Cada vez que bajó un pasajero subieron tres, y el ómnibus llegó con 68 pasajeros al paradero final. ¿Con cuántos partió del paradero inicial?

Resolución

El total de pasajeros que hicieron uso del ómnibus es 58,2÷0,6 = 97, de éstos, sólo llegaron 68 pasajeros al paradero final; entonces se bajaron 97 – 68 = 29 en el trayecto. Si se bajaron 29, entonces subieron 29×3 = 87 en trayecto; luego, el ómnibus salió con 97 – 87 = 10 pasajeros.

Rpta.: 10 pasajeros

Problema 7

Un comerciante ha comprado espejos de la misma calidad a 15 soles la docena por un monto de 360 soles. Los vende a 2 soles cada espejo. Durante las ventas se le rompieron 5 espejos y los gastos de venta ascienden a 34 soles. ¿Cuál es su ganancia neta?

Resolución

Para conocer la ganancia neta debemos conocer el importe de la venta.

¿Cuántas docenas son?... 360 ÷ 15 = 24 docenas que hacen 24×12 = 288 espejos. Se rompieron 5, entonces se vendieron sólo 283 a 2 soles cada uno, o sea a 283×2 = 566 soles.

Descontando el costo y los gastos de venta resulta 566 – 360 – 34 = **172 soles**, de ganancia neta.

Rpta.: 172 soles

Problema 8

Perico ha comprado en la chacra limones a 3 soles la docena, por un monto de 144 soles. Por cada docena le han regalado 5 limones. El los vende a 6 por 4 soles y regala 2 por la compra de cada 6 limones. Perico no es de gastar mucho, pero ha gastado 45 soles en los tres días que le demandó la venta.

¿Cuál fue su utilidad neta?

Resolución

Comprar a 3 soles la docena con 5 limones de regalo por cada docena, equivale a pagar 3 soles por cada 17 limones.

Igualmente, la venta de 6 limones a 4 soles con 2 de regalo equivale a vender 8 por 4 soles.

Compró 144 ÷ 3 = 48 docenas más 48 × 5 = 240 limones de regalo, o sea, 48 × 12 = 576 + 240 = 816 limones. Los vende en grupos de ocho a 4 soles cada grupo: son 816 ÷ 8 = 102 grupos a 4 soles dan 408 soles. La ganancia bruta es 408 – 144 = 264 soles, menos los 45 soles de gastos, resulta 264 – 45 = **219** soles de ganancia neta.

Rpta.: 219 soles

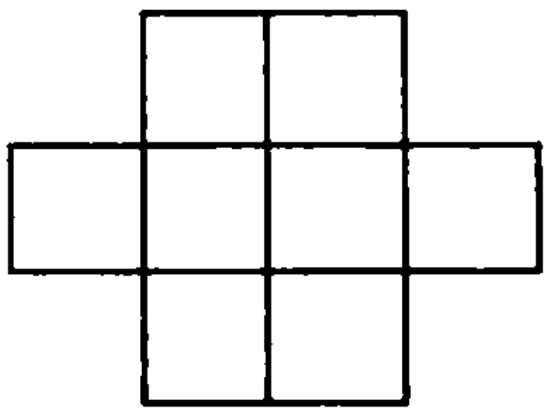
Comentario

Muchos estudiantes opinan que los métodos razonados de resolución de problemas son largos; sostienen esta versión porque en la resolución ven una explicación "extensa". Pero te propongo algo muy interesante: "borra" todas las palabras de la explicación y quédate solamente con las operaciones, ¿cuál es más extenso: el método algebraico o el razonado?

Pues cuando resuelves un problema por el método razonado, no es preciso que escribas todo tu razonamiento, sino sólo las operaciones y el proceso de razonamiento lo realizas mentalmente.

Reto al ingenio 6

En cada casillero de la tabla colocar un dígito del 1 al 8, de modo que no haya 2 digitos consecutivos en dos casillas que tengan un lado o un vértice común



Problema 9

Milton compró 72 docenas de huevos. Le regalaron 3 huevos por la compra de cada docena. El ha planificado vender a 5 por 3 soles. Luego de vender 60 huevos según lo planificado se percata que ha ganado sólo 12 soles y que sus gastos de venta van a llegar a 68 soles. ¿A qué precio debe vender cada huevo de los restantes, si quiere obtener una utilidad neta de 148 soles?.

Resolución

Primero hallaremos el importe del costo, luego averiguaremos cuánto debe ser el monto de la venta para satisfacer sus metas.

- Por cada 5 huevos recibe 3 soles. En 60 huevos hay 12 grupos de 5, entonces recibió $12 \times 3 = 36$ soles, de los cuales 12 soles son su ganancia, entonces el costo de los 60 huevos es $36 - 12 = 24$ soles, o sea, cada huevo le ha costado $24 \div 60 = 0{,}40$ soles.
- Compró 72 docenas, o sea, $72 \times 15 = 1080$ huevos por $1080 \times 0{,}4 = 432$ soles, que es su precio de costo.
- Para cumplir con sus metas, el importe de su venta debe cubrir su costo, sus gastos y su beneficio neto, o sea, debe ser: $432 + 68 + 148 = 648$ soles.
- Ya obtuvo 36 soles en la venta de los 60 huevos, le quedan $1080 - 60 = 1020$ huevos en los que debe obtener $648 - 36 = 612$.

Por consiguiente, cada huevo debe vender a $612 \div 1020 =$ **0,6 soles**

Rpta.: 0,6 soles

Problemas

1. ***Un ganadero ha comprado 12 carneros a 80 soles cada uno. ¿A qué precio debe vender si quiere ganar 192 soles en la venta de los 12 carneros?.***

   A) 94 soles **B)** 96 soles **C)** 98 soles
   D) 97 soles **E)** 95 soles

2. ***Se compraron 36 tocacintas y 21 calculadoras por 2232 soles. Los tocacintas se vendieron por 3024 soles y las calculadoras por 756 soles. La utilidad en un tocacintas es 3 veces la de una calculadora. ¿Cuánto costó cada tocacinta?***

   A) 24 soles **B)** 25 soles **C)** 48 soles
   D) 8 soles **E)** 42 soles

3. ***Compré cierto número de agendas por 768 soles. Al vender una parte de ellas a 20 soles cada una obtuve 240 soles, pero perdí 4 soles en cada una. ¿En cuánto debo vender cada una de las restantes para ganar 272 soles en todas las agendas?***

   A) 48 soles **B)** 24 soles **C)** 32 soles
   D) 30 soles **E)** 40 soles

4. ***Gabino ha comprado 1092 plumones a 6 soles cada uno. Por cada docena le regalaron uno. ¿A qué precio debe vender el ejemplar, si desea ganar 1440 soles, regalando 2 plumones por cada docena?.***

A) 4 soles **B)** 5 soles **C)** 6 soles
D) 8 soles **E)** 7 soles

5. Ricardo compró cierto número de objetos por 14 000 soles, vendió parte de ellos por 5400 soles a 45 soles cada uno, ganando en esta venta 600 soles.
¿Cuántos objetos compró Ricardo?

A) 300 **B)** 320 **C)** 350
D) 360 **E)** 480

6. De una pieza de tela de 36 m se ha vendido una parte a 90 soles y otra parte a 72 soles, quedando 9 m.
¿Cuál es el precio por metro, si en la primera vez se vendió 3 metros más de tela que en la segunda vez?

A) 4 soles **B)** 5 soles **C)** 6 soles
D) 7 soles **E)** 8 soles

7. Un comerciante ha vendido 5 televisores. De las utilidades ha tenido que pagar ciertos gastos como impuestos, entre otros, por un monto equivalente al precio de costo de un televisor y le ha quedado como utilidad neta 960 soles. Si no tuviera que pagar los gastos, dos operaciones de esta naturaleza le producirían una utilidad suficiente para comprar 5 televisores nuevos.
¿Cuál es el precio de costo de un televisor?.

A) 480 soles **B)** 540 soles
C) 960 soles **D)** 640 soles
E) 560 soles

Problema 8

Un granjero vendió 15 cerdos y 12 patos por 1824 soles.
¿Cuánto vale cada cerdo, si el precio de un cerdo es 3 veces el de un pato?

Resolución

Vender 15 cerdos equivale a vender $15 \times 3 = 45$ patos.

Vender 15 cerdos y 12 patos equivale a vender $45 + 12 = 57$ patos a 1824 soles. Cada pato se vendió en $1824 \div 57 = 32$ soles, de donde se deduce que cada cerdo se vendió en

$32 \times 3 = 96$ soles.

Rpta.: 96 soles

Problema 9

Entre 6 personas tomaron un taxi por 30 soles. Algunas de ellas no podían pagar, entonces cada una de las restantes tuvo que pagar 2,5 soles más de lo que le correspondía

¿Cuántas personas no pagaron?

Resolución

Lo que han de pagar son 30 soles, a cada una le corresponde pagar $30 \div 6 = 5$ soles. Sin embargo, cada una de las que pagaron aportó $5 + 2{,}5 = 7{,}5$; entonces las que pagaron son $30 \div 7{,}5 = 4$. Por lo tanto, las que no pagaron son $6 - 4 = 2$ personas.

Rpta.: 2 personas

Problema 10

Una empleada ha sido contratada por 15 meses, tiempo por el cual se le ha ofrecido pagar 3 240 soles y un televisor. Cumplido los 8 meses la empleada renunció al trabajo, recibiendo como pago 1560 soles y el televisor. ¿En cuánto estaba valorizado el televisor?

Resolución

Por dejar de trabajar 15 – 8 = 7 meses, dejó de percibir 3240 – 1560 = 1680, entonces por cada mes se le paga 1680 ÷ 7 = 240 soles.

Por los 8 meses se le debería pagar 240 × 8 = 1920 soles, sin embargo se le ofrece 1560 soles y el televisor, se deduce entonces que el televisor vale 1920 – 1560 = 360 soles.

Rpta.: 360 soles

Problema 11

Un padre dejó al morir 1 360 soles a cada uno de sus hijos; pero el mayor renunció a su parte y la parte de éste se repartió por igual entre los menores, recibiendo entonces cada uno de ellos 1530 soles. ¿Cuántos hermanos son en total?

Resolución

Cada uno de los menores ha recibido 1530 – 1360 = 170 soles demás debido a la renuncia del mayor, esto implica que, habiendo dividido los 1360 soles del mayor entre los menores, a cada uno le tocó 170 soles demás. ⇒ # hermanos menores es 1360 ÷ 170 = 8.

∴ Son 8 + 1 = 9 hermanos.

Rpta.: 9 hermanos

Problemas

1. ***Para comprar un computador, un grupo de personas ha reunido 2700 soles aportando por igual, sin embargo, el computador cuesta 3060, razón por la cual, cada una tendrá que aportar 8 soles más.***

   ¿Cuánto habían aportado cada una inicialmente?

   A) 56 soles **B)** 55 soles **C)** 58 soles
   D) 60 soles **E)** 62 soles

2. ***Dos confeccionistas deben coser el mismo número de pantalones. El primero de ellos cose 3 pantalones por día y el segundo, 5 pantalones por día. El primero ha empezado 12 días antes que el segundo.***

   ¿Cuántos días trabajó cada uno?

   A) 18 d y 36 d **B)** 20 d y 32 d
   C) 22 d y 34 d **D)** 18 d y 30 d
   E) 22 d y 34 d

3. ***Una máquina fabrica 48 botellas en 12 minutos y otra máquina fabrica 75 botellas en 15 minutos.***

   ¿Cuánto tiempo se necesita para fabricar 243 botellas con ambas máquinas?

   A) 25 min **B)** 27 min **C)** 29 min
   D) 30 min **E)** 42 min

4. ***Un estante de libros tiene capacidad para 42 libros de aritmética y 35 libros de álgebra o en su defecto 36 libros de aritmética y 45 de álgebra.***

   ¿Cuántos libros de álgebra entran en el estante?

   A) 95 **B)** 62 **C)** 85 **D)** 90 **E)** 105

5. ***Había ahorrado lo suficiente como para comprar cierto número de espejos; pero cuando fui a comprarlos, el precio del ejemplar había subido en tres soles, razón por la cual el dinero me alcanzó para 1/5 menos del número previsto.***

   ¿Cuál es el precio actual de cada espejo?

   A) 12 soles **B)** 14 soles **C)** 15 soles
   D) 16 soles **E)** 18 soles

6. ***Un comerciante vendió 8 televisores y 12 radios por 3060 soles. Si cada televisor cuesta tanto como tres radios,***

   ¿cuál es el precio de cada televisor?

   A) 240 soles **B)** 120 soles **C)** 85 soles
   D) 250 soles **E)** 255 soles

7. ***Una empleada ha sido contratada por un año, ofreciéndole pagar 5080 en efectivo y una refrigeradora. Luego de trabajar 8 meses, la empleada se retiró recibiendo 3160 soles y la refrigeradora.***

   ¿En cuánto está valorizada la refrigeradora?

   A) 680 soles **B)** 720 soles **C)** 630 soles
   D) 640 soles **E)** 860 soles

8. ***Entre 8 amigos acordaron comprar un regalo para Carlín con ocasión de su cumpleaños. El regalo, nada barato, un hermoso velador, del que cuelga una tarjeta que anuncia 160 soles de precio. No hay opción a descuento. A la hora de comprar algunos de los amigos decidieron no participar porque se pelearon con Carlín. Los otros piensan que ha sido a propósito por no aportar para el regalo. Pero eso no interesa, queremos saber, ¿cuántos son estos amigos tacaños, que han ocasionado en cada uno de los restantes un gasto adicional de 12 soles?***

   A) 5 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 2

2.2.3 Problemas de falsa suposición

Un tipo de problemas se conocen como **problemas de falsa suposición**, porque para su resolución se puede utilizar una estrategia que consiste en hacer una falsa suposición que provoca un error cuya corrección conduce a la solución.

Sin embargo, no es la única estrategia, como para cualquier otro tipo de problemas, ni es la más eficiente. Hay muchas estrategias, algunos de los cuales expondremos mediante los siguientes problemas.

Curiosidad

Respetando la posición de las cifras suma las dos adiciones siguientes. ¿Son iguales los dos resultados?

123456789 +	1+
12345678	21
1234567	321
123456	4321
12345	54321
1234	654321
123	7654321
12	87654321
1	987654321

Problema 1

Se han de repartir 180 galletas entre 48 niños de un salón, dándole 5 a cada varón y 3 a cada niña

¿Cuántos de los niños son varones?

Resolución

Se puede distinguir que hay dos incógnitas: Cuántos son varones y cuántos son niñas. Este tipo de problemas se caracteriza porque se conoce la suma de las incógnitas. Además se conoce lo que corresponde a cada incógnita y el monto de lo que corresponde a ambos.

Vamos a resolver por varios métodos.

METODO (1)

Por ecuaciones

$$\left.\begin{matrix} Varones : x \\ Niñas \ \ : y \end{matrix}\right\} x + y = 48 \qquad \ldots (1)$$

Los niños reciben 5x galletas y las niñas 3y galletas de modo que:

$$5x + 3y = 180 \qquad \ldots (2)$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones

Hallamos: $\boxed{x = 18}$ e $\boxed{y = 30}$

No te presento la resolución del sistema de ecuaciones porque eso lo veremos más adelante.

METODO (2)

Método del reparto.

Si repartimos 3 galletas a cada niño, sea hombre o mujer, utilizaríamos $3 \times 48 = 144$ galletas y quedarían $180 - 144 = 36$ galletas.

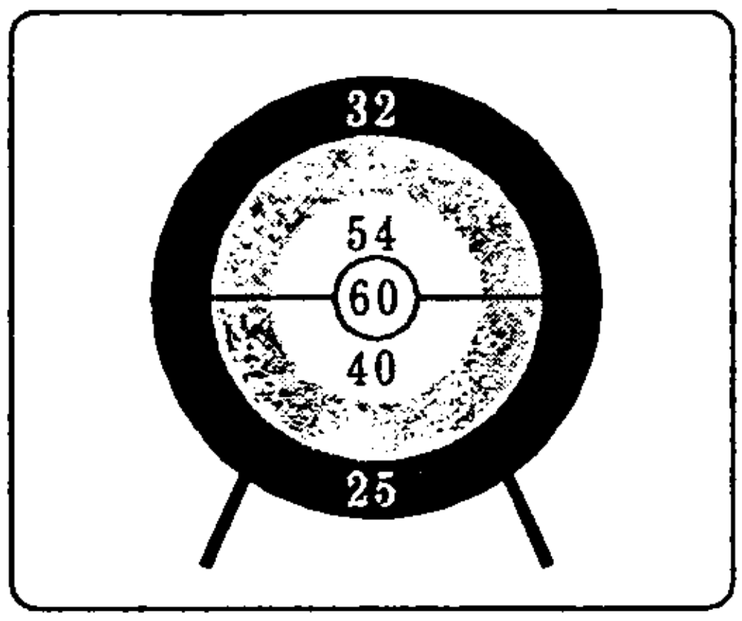
Las niñas ya no reclaman más galletas. Las 36 galletas sobrantes se distribuye entre los varones dándole 2 a cada uno, para completar a 5, que alcanza para $36 \div 2 = 18$ varones.

Luego hay **18 varones** y $48 - 18 =$ **30 niñas**

Reto al Ingenio 7

Carlitos necesita hacer exactamente 92 puntos. ¿Puedes ayudarlo, indicándole los números a los que debe apuntar?

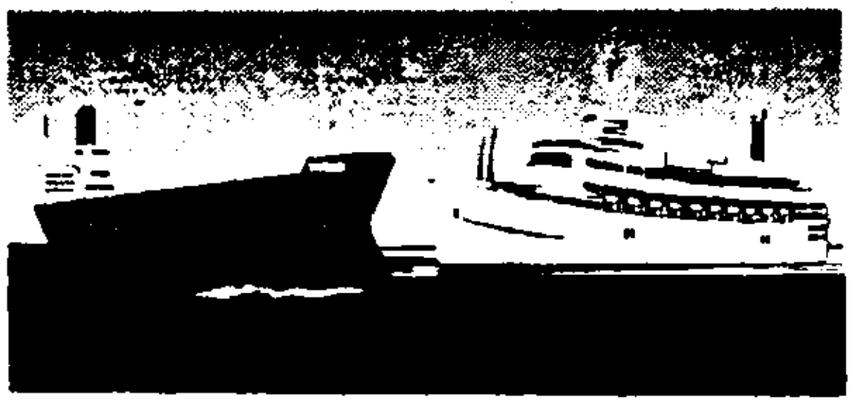
Ah!,.. me olvidaba, debe hacer uso sólo de sus tres flechas



Reto al Ingenio 8

Edward Lucas, conocido particularmente por su célebre colección de recreaciones matemáticas, planteó el siguiente problema en una de las sesiones de un muy grave congreso de matemáticos:

Cada día a la misma hora sale un buque de El Havre con destino a Nueva York y otro sale de Nueva York para El Havre. La travesía se lleva acabo, en ambos sentidos, en siete días. ¿Cuántos transatlánticos con ruta opuesta encontrarán uno de esos buques en el mar? (La expresión "en el mar" excluye al barco que llega cuando él mismo sale y al que sale cuando él llega).



METODO (3)

Falsa suposición

Supongamos que todos son varones, entonces serían necesarias 48 × 5 = 240 galletas. Pero sólo hay 180, hay un error de 240 – 180 = 60 galletas.

Vamos a corregir sustituyendo un varón por una niña. Por cada sustitución el error disminuye en 2 galletas. Para que el error desaparezca completamente son necesarias 60 ÷ 2 = 30 sustituciones. Esto implica que hay 30 niñas y 48 – 30 = 18 niños.

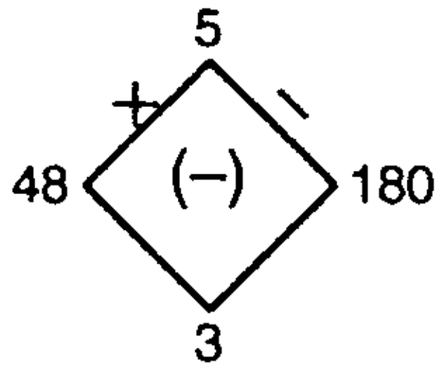
METODO (4)

Método del rombo

Ciertos problemas, por ser muy frecuentes en las preguntas de exámenes de admisión, han sido tipificados y desarrollado para ellos modelos de resolución que pueden ser aplicados mecánicamente si el interesado logra identificar que el problema corresponde al tipo conocido.

Estos modelos de resolución son peligrosos cuando no se tiene un dominio de la identificación de los datos y del resultado que arroja el modelo. Aún más, muchos estudiantes acostumbrados a estos modelos, no son capaces de resolver los problemas mientras no logran encuadrar dentro de los problemas tipo, dado que requiere una receta para cada tipo de problemas.

Bajo esta aclaración, mostramos este modelo de resolución:



$$\Rightarrow \text{Número de niñas} = \frac{48\times5-180}{5-3} = 30$$

$$\text{Número de varones} = 48 - 30 = 18$$

Como verás, el mismo problema se puede resolver de diversas maneras. ¿Has entendido los cuatro métodos expuestos? ¿Cuál de ellos te pareció más práctico? Busca otros métodos de resolución e inventa problemas similares que puedan ser resueltos por los métodos expuestos.

Problema 2

Es una granja se puede contar 240 patas y 80 cabezas entre conejos y gallinas

¿Cuántos son conejos y cuantas son gallinas?

Resolución

Hemos expuesto diversos métodos para resolver este tipo de problemas. La resolución mediante ecuaciones lo estudiaremos en el capítulo correspondiente. En la resolución de los problemas siguientes utilizaremos el método del reparto.

De antemano, no está demás aclarar que 80 cabezas implica 80 animales.

Imaginemos que tenemos a la mano las 240 patas, sólo es imaginación, y empecemos repartiendo 2 patas a cada animal, serán necesarias 80×2 = 160 patas y nos quedan 240 – 160 = 80 patas que alcanzan para 80÷2 = 40 conejos que necesitan completar sus 4 patas.

Luego: son 40 conejos y 40 gallinas.

Rpta.: 40 conejos y 40 gallinas

Problema 3

Manolento, como siempre aborrecido del trabajo, llegó nuevamente tarde a la fábrica. Su jefe Pancricio ya no quiere tolerar más la frescura de Manolento.

– Te doy sólo 20 días para que enmiendes tu actitud— le recrimina Pancricio —pero esta vez por cada día que trabajes se te pagará sólo 18 soles y el día que llegues tarde no sólo dejarás de percibir tu remuneración, sino, te descontaré de tus haberes 15 soles.

Manolento salió meditando de la oficina de Pancricio y hizo las siguientes preguntas.

a. ¿Cuántos días debo llegar temprano en los 20 días para recibir 96 soles?

b. ¿Cuántas tardanzas harán que no reciba un solo céntimo ni quede endeudado?

c. ¿Cuántas tardanzas harán que me endeude 102 soles?

El ya tiene las repuestas. Tú también obtenlas.

Resolución

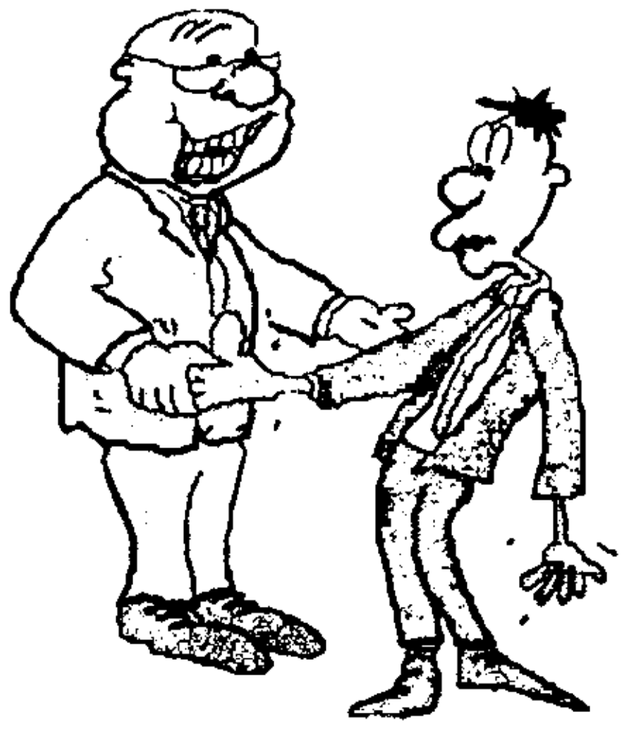
a. De llegar temprano los 20 días tendría 20×18 = 360 soles. Para recibir sólo 96 tendrá que perder 360 – 96 = 264 soles.

Cada vez que llega tarde, no sólo deja de percibir 18 soles, sino, tiene que dar 15 soles, o sea, pierde 33 soles. ¿Cuántas tardanzas le hacen perder 264 soles? 264 ÷ 33 = 8 días.

∴ Debe llegar 20 – 8 = **12 días** temprano.

b. Para no recibir pago alguno, debe perder los 360 soles. En cada tardanza pierde 33 soles, los 360 soles los pierde en 360 ÷ 33 = 10,9 días. Prácticamente con **11 tardanzas** estaría casi a la par con Pancricio.

c. Para endeudar 102 soles debe perder los 360 soles y los 102, es decir, 462 soles. Dado que cada tardanza le hace perder 33 soles, los 462 soles los perderá con 462 ÷ 33 = **14 tardanzas.**



Reto al ingenio 9

Compré un libro en 20 soles, como no era de interés para mí, lo vendí en 30 soles. Más tarde, un amigo se interesó mucho por el libro. Fui a buscarlo y lo encontré que lo estaban vendiendo en 40 soles. No tuve otro remedio que comprarlo en ese precio y vendérselo a mi amigo en 50. No sé cuánto perdí o gané en este negocio. ¿Me puedes ayudar con mis cuentas?

Problemas

1. ***Se han de repartir 300 caramelos entre 60 niños, dando 6 caramelos a cada niña y 4 caramelos a cada varón. ¿Cuántos son varones?***

   A) 30 **B)** 45 **C)** 20 **D)** 18 **E)** 12

2. ***El curioso Benjamín, contó 50 cabezas y 120 patas entre cerdos y gallinas en la granja del abuelo Toribio; ésto se lo comunicó a su hermana Pilar, quien inmediatamente dedujo los cerdos y gallinas que tenía el abuelo. ¿Cuántos eran los cerdos?***

   A) 10 **B)** 15 **C)** 25 **D)** 30 **E)** 40

3. ***Se han de repartir 180 galletas entre 50 animales. Cada animal es un gato o un perro. A cada gato le ha de corresponder 3 galletas y a cada perro, 5 galletas. ¿Cuántos son gatos y cuántos son perros?***

   A) 32 y 17 **B)** 20 y 30 **C)** 25 y 25
   D) 36 y 14 **E)** 35 y 15

4. ***Se ha contratado un obrero por 27 días ofreciéndole pagar 24 soles por cada día que trabaje y cobrarle 12 soles por cada día que no trabaje. Calcular los días trabajados, si pasado los 27 días, el obrero:***

   a) *Recibe 396 soles*

   b) *No recibe ni debe*

   c) *Queda debiendo 108 soles.*

   A) 18; 9; 6 **B)** 20; 9; 25 **C)** 17; 8; 6
   D) 18; 10; 6 **E)** 20; 9; 6

5. ***En una prueba de 40 preguntas, un estudiante ha obtenido 83 puntos. Cada respuesta acertada vale 4 puntos y cada equivocación –1. Las respuestas en blanco no favorecen ni le quitan puntos al estudiante. ¿Cuántas preguntas contestó acertadamente, si dejó sin responder 8 preguntas?***

   A) 9 **B)** 22 **C)** 21 **D)** 23 **E)** 24

6. ***Un camión lleva 900 maletines de dos tipos con un peso total de 2 300 kg. Si los del primer tipo pesan 2 kg cada uno, y los de segundo tipo 3 kg cada uno; determinar, ¿cuántos maletines hay de cada clase?***

   A) 350; 550 **B)** 360; 540 **C)** 380; 520
   D) 400; 500 **E)** 450; 450

7. ***Carlos y Roberto ahorraron en total S/. 7 000. Carlos ahorra S/. 500 mensuales y Roberto S/. 600 mensuales. El número de meses que ha ahorrado cada uno suman 13. ¿Cuántos meses ha ahorrado Carlos?***

   A) 8 meses **B)** 9 meses **C)** 7 meses
   D) 6 meses **E)** 5 meses

8. ***Una persona economiza S/. 50 cuando va a trabajar y gasta S/. 40 cuando se queda en casa. Si durante 18 días no ha ganado ni ha perdido. ¿Cuántos días, se quedó en casa, durante los 18 días?***

   A) 10 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

9. ***Un recipiente contiene 70 litros de una mezcla de dos líquidos A y B. El peso de la mezcla es 81 kg. Un litro del líquido A pesa 1,2 kg y un litro del líquido B pesa 1,1 kg. ¿Cuántos litros del líquido A hay en la mezcla?***

   A) 30 **B)** 34 **C)** 36 **D)** 38 **E)** 40

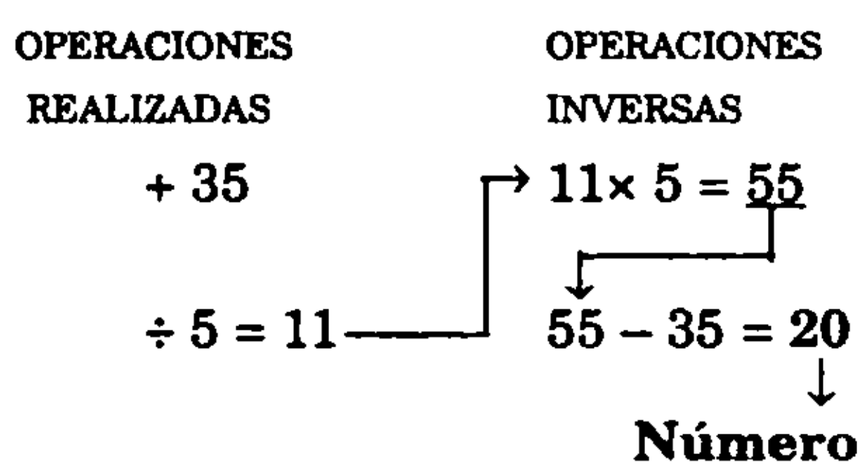
2.2.4 La Regla de Cangrejo

Una estrategia muy interesante en la resolución de problemas es aquella basada en descubrir un número con el que se han realizado una serie de operaciones y se conoce el resultado de tales operaciones.

Por ejemplo, consideremos el número 20. Sumémosle 35: 20 + 35 = 55. Dividamos el resultado entre 5: 55 ÷ 5 = 11. Ahora elaboremos el siguiente problema:

"A un número se le suma 35. El resultado se divide entre 5 y se obtiene 11. ¿Cuál es el número?"

Para descubrir el número, basta realizar con el resultado, operaciones inversas a las realizadas con el número y de la última a la primera: Observa el siguiente esquema:

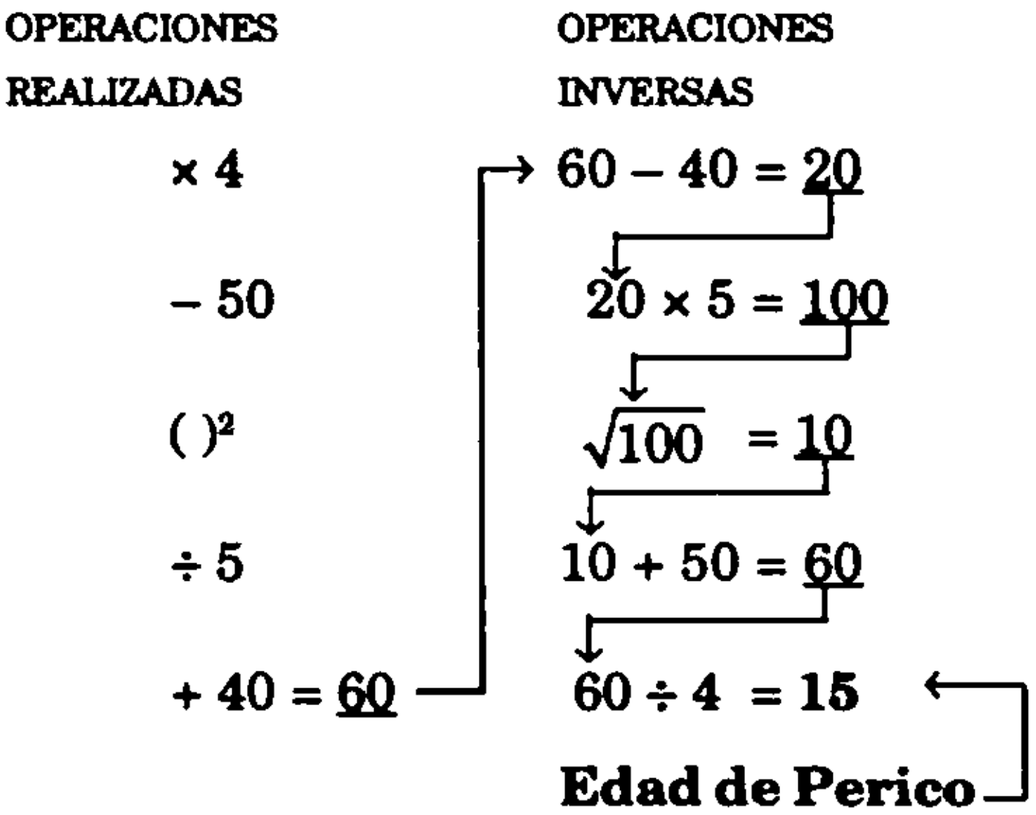


Veamos esta estrategia mediante los siguientes problemas.

Problema 1

La edad de Perico se multiplica por 4, el resultado se disminuye en 50, la diferencia obtenida se eleva al cuadrado, este resultado se divide entre 5 para luego sumarle 40 y se obtiene 60. ¿Cuál es la edad de Perico?

Resolución



Reto al ingenio 10

En la operación de la suma siguiente los dígitos han sido reemplazados por letras. La misma letra está en el lugar del mismo dígito todas las veces que aparece y letras diferentes representan a dígitos diferentes.

$$\begin{array}{r} HHD \\ +\ XD \\ \hline XDH \end{array}$$

Descubre qué dígitos está reemplazando cada letra.

Curiosidad

1×8 + 1 = 9
12×8 + 2 = 98
123×8 + 3 = 987
1234×8 + 4 = 9876
12345×8 + 5 = 98765
123456×8 + 6 = 987654
1234567×8 + 7 = 9876543
12345678×8 + 8 = 98765432
123456789×8 + 9 = 987654321

Problemas

1. ***Con un número se realizan las siguientes operaciones:***

   Se divide entre 6, al resultado se le resta 18 para luego multiplicarlo por 6. Finalmente se le saca la raíz cuadrada y se obtiene 12.

   ¿Cuál es el referido número?

   A) 7 **B)** 252 **C)** 156
   D) 242 **E)** 240

2. ***Con un número se hacen las siguientes operaciones: primero se multiplica por 5, al producto se le suma 60 para luego dividirlo entre 10, al cociente se le extrae la raíz cuadrada para finalmente restarle 4. Si luego de realizar las operaciones indicadas, se obtiene 2, ¿cuál es el número?***

   A) 6 **B)** 60 **C)** 80
   D) 300 **E)** 150

3. ***Ricardo desea adivinar la edad de Norma, para esto, Ricardo le dice a Norma que haga las siguientes operaciones con su edad: que le reste 10, a la diferencia lo eleve al cuadrado, al resultado le sume 6 para que luego lo divida entre 7. Si después de realizar estas operaciones Norma ha obtenido 10, entonces Ricardo le dirá que tiene:***

   A) 15 años **B)** 18 años **C)** 20 años
   D) 21 años **E)** 22 años

4. ***Lupita le dice a su padre Parcimonio que ella quiere practicar matemática.***
   —¿Sabes cuánto peso? Responde Parcimonio.
   —Sí. Papi
   —Pues, hijita, divídelo entre 15, al resultado le sacas la raíz cuadrada, en seguida lo multiplicas por 60 y finalmente lo divides entre 20. ¿Cuánto sale?
   La hija le responde: sale 6

   ¿Cuánto pesa Parcimonio?

   A) 45 kg **B)** 60 kg **C)** 65 kg
   D) 70 kg **E)** 75 kg

Problema 2

De un recipiente lleno de agua, se saca 2 litros, más tarde se derrama la mitad del líquido, enseguida se le adiciona 4 litros, finalmente se gasta la mitad del agua, quedando 8 litros en el recipiente. Calcule la capacidad del recipiente.

Resolución

OPERACIONES DIRECTAS	OPERACIONES INVERSAS
-2	$8 \times 2 = 16$
$\div 2$	$16 - 4 = 12$
$+4$	$12 \times 2 = 24$
$\div 2 = 8$	$24 + 2 = 26 \Rightarrow$ **Rpta.: 26 Litros**

Problema 3

Raúl se enteró que San Judas hacía un milagro que consistía en duplicar el dinero que uno tenga, cobrando únicamente S/. 60 por cada milagro. Una mañana Raúl acudió a San Judas con todos los ahorros. Pero cual sería su sorpresa que luego de 3 milagros se quedó sin un sol. ¿A cuánto ascendían los ahorros de Raúl?

Resolución

OPERACIONES DIRECTAS

$1°\begin{cases} \times\ 2 \\ -\ 60 \end{cases}$

$2°\begin{cases} \times\ 2 \\ -\ 60 \end{cases}$

$3°\begin{cases} \times\ 2 \\ -\ 60 \end{cases} = 0$

OPERACIONES INVERSAS

$0 + 60 = 60$

$60 \div 2 = 30$

$30 + 60 = 90$

$90 \div 2 = 45$

$45 + 60 = 105$

$105 \div 2 = 52{,}5$

Rpta.: Ahorro 52,5

Problema 4

Un tanque lleno de agua se ha secado totalmente en 4 días. En cada día se ha secado la mitad de su contenido al iniciar el día y 60 litros más. ¿Cuál es la capacidad del tanque?

Resolución

OPERACIONES DIRECTAS

$1°día\begin{cases} \div\ 2 \\ -\ 60 \end{cases}$

$2°día\begin{cases} \div\ 2 \\ -\ 60 \end{cases}$

OPERACIONES INVERSAS

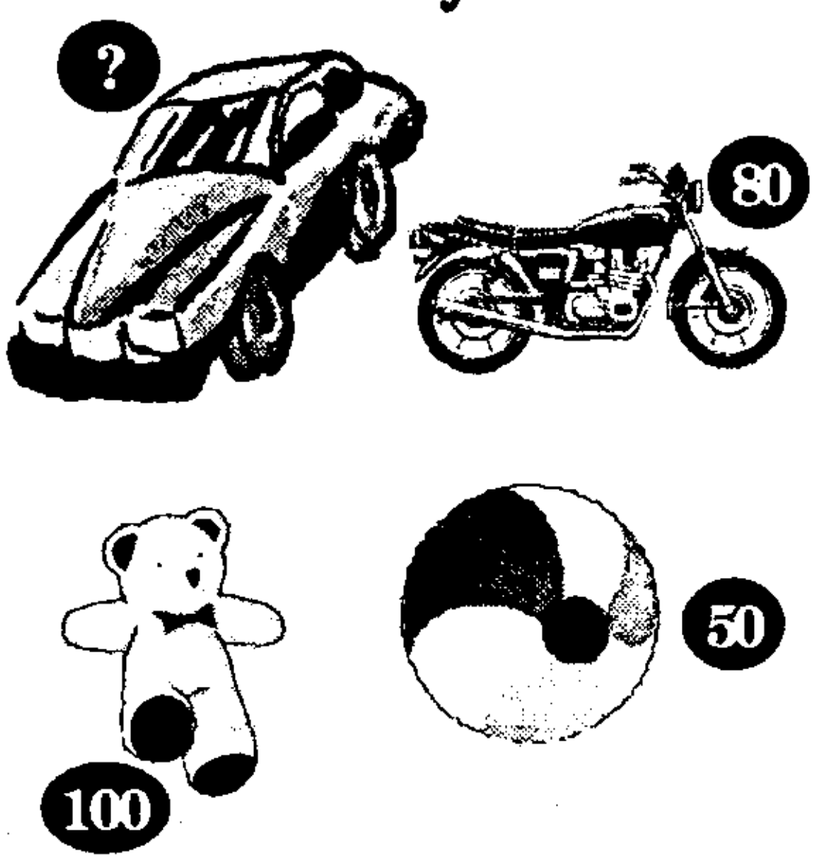
$0 + 60 = 60$

$60 \times 2 = 120$

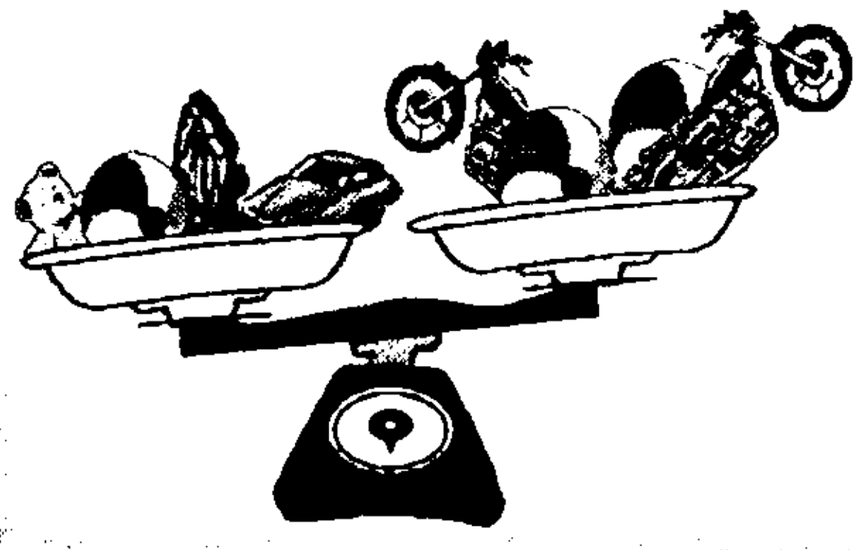
$120 + 60 = 180$

$180 \times 2 = 360$

Divertijo 1



La balanza está en desequilibrio porque le falta poner uno de los juguetes. No sabemos cuál, porque se olvidaron poner el peso del carrito, sólo nos dijeron que pesa más que el osito. ¿Qué juguete equilibra la balanza y cuánto pesa el carrito?



$3°día \begin{cases} \div\ 2 \\ -\ 60 \end{cases}$

$4°día \begin{cases} \div\ 2 \\ -\ 60 = 0 \end{cases}$

$360 + 60 = \underline{420}$

$420 \times 2 = \underline{840}$

$840 + 60 = \underline{900}$

$900 \times 2 = \boxed{1800}$

La capacidad del tanque es **1800 litros.**

Problema 5

Los tres amigos inseparables, Antón, Bico y Camuso están jugando a las cartas. Ellos tienen un estilo de apuestas. El que pierde duplica el dinero de los otros dos.

Luego de tres partidas, en las que han perdido una partida cada uno en el orden en que han sido nombrados tienen 60 soles cada uno. ¿Con cuánto iniciaron el juego cada uno?

Resolución

Ellos tienen 60 soles cada uno, al finalizar la tercera partida.

	INICIAL	LUEGO DE 1RA PARTIDA	LUEGO DE 2DA PARTIDA	LUEGO DE 3RA PARTIDA
Antón				60
Bico				60
Camuso				60
Total				180

El total de dinero en juego es 180 y no varía durante las partidas.

Descubramos cuánto tenían antes de la tercera partida. Camuso, que perdió la tercera partida, ha tenido que duplicar el dinero de los otros dos, entonces, Antón tenía $60 \div 2 = 30$ y también Bico. Dado que la suma total es 180, Camuso tenía $180 - 30 - 30 = 120$.

	INICIAL	LUEGO DE 1RA PARTIDA	LUEGO DE 2DA PARTIDA	LUEGO DE 3RA PARTIDA
Antón			30	60
Bico			30	60
Camuso			120	60
Total			180	180

El truco del cálculo ultra rápido

Pide que te den un número de tres dígitos. Supón que te dan el 567. Escríbelo dos veces en la pizarra o en una hoja de papel:

Pide otro número de tres dígitos. Escríbelo debajo del 567 de la izquierda. Ahora necesitas colocar a la derecha un número diferente de tres dígitos para emplearlo como multiplicador. Debe ser (aunque tu público no debe saberlo) el "complemento a 9" del multiplicador situado a la izquierda; es decir, los dígitos correspondientes de los dos multiplicadores deben sumar 9. Supongamos que el multiplicador de la izquierda es 382. El de la derecha debe ser 617:

567	567
382	617

Si haces el juego ante un grupo, lo mejor es que uno de los asistentes, elegido de antemano entre tus amigos, haga el papel de compinche y te indique el segundo multiplicador que interesa. Si no es así, puedes escribirlo tú mismo fingiendo que lo has elegido al azar. Anuncia que vas a efectuar ahora, mentalmente, las dos multiplicaciones, sumar los dos resultados y luego, como toque final, duplicar la solución. Obtén la suma de los dos productos instantáneamente restando uno del multiplicando y adjuntando luego el complemento a 9. En nuestro ejemplo 567 menos 1 es 566, el complemento a nueve de 566 es 433, de manera que la suma de los dos productos es 566 433. Sin embargo, si escribieses este número podría parecer sospechoso que el resultado comenzase con los mismos dos primeros dígitos que el multiplicando. Para ocultarlo duplica el número. No es difícil hacerlo mentalmente, escribiendo los dígitos de

Ahora averigüemos lo que tenían antes de la segunda partida. En esta partida perdió Bico, que tuvo que duplicar el dinero de los otros dos: Antón tenía 30 ÷ 2 = 15, Camuso 120 ÷ 2 = 60 y Bico: 180 – 15 – 60 = 105

En la primera partida perdió Antón, quien tuvo que duplicar el dinero de los otros dos, entonces Bico tenía 105 ÷ 2 = 52,50, Camuso tenía 60 ÷ 2 = 30 y Antón, 180 – 30 – 52,50 = 97,50.

	INICIAL	LUEGO DE 1RA PARTIDA	LUEGO DE 2DA PARTIDA	LUEGO DE 3RA PARTIDA
Antón	97,50	15	30	60
Bico	52,50	105	30	60
Camuso	30,00	60	120	60
Total	180	180	180	180

Antón empezó con 97,50, Bico con 52,50 y Camuso con 30.

derecha a izquierda a medida que lo multiplicas mentalmente. Tal vez te sea más fácil añadir mentalmente un cero a 566 433 y dividir por cinco (ya que multiplicar por 10 y dividir por 5 es lo mismo que multiplicar por 2). Este caso escribe la respuesta final de izquierda a derecha.

¿Cuál es el truco? La suma de los dos productos es igual al producto de 567 por 999, que a su vez equivale al de 567 por 1000 menos 567. Hazlo sobre un papel y verás inmediatamente por qué el resultado ha de ser 566 seguido por su complemento a 9.

(TOMADO DE CARNAVAL MATEMÁTICO DE MARTIN GARDNER)

Problema 6

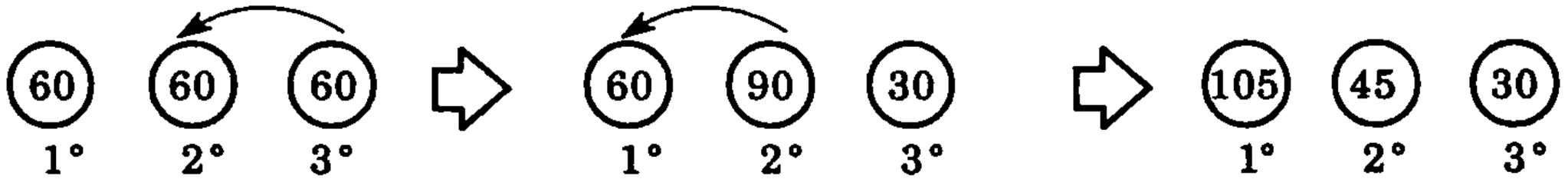
Imagínate que tienes 180 monedas en tres montones. Del primer montón pasas al segundo tantas monedas como hay en éste. Del segundo pasas al tercero tantos como hay en este último. Luego de estos dos pasos te percatas que en cada montón hay la misma cantidad de monedas. ¿Puedes descubrir, cuántas monedas habían inicialmente en cada montón?

Resolución

Pasar de un montón tanto como hay en el otro, significa que, por ejemplo, si hay 20 en el segundo montón, se pasarán 20 del primero al segundo, así en el segundo habría el doble, o sea, 40. Cuando se devuelve al primero lo transferido, en el segundo queda la mitad de lo que había.

Dado que al final hay la misma cantidad en cada montón, esta cantidad es 180 ÷ 3 = 60 monedas.

Resolveremos el problema devolviendo las monedas transferidas, desde la última transferencia hasta la primera:



¿Has entendido? Si hay dudas, comprobemos: del primero, ¿Cuántos pasamos al 2do? ..., Entonces en el 1ro queda 60 y en el 2do habría **45 + 45 = 90**. En seguida pasamos del 2° al 3°, tanto como hay en el 3°, o sea, 30. Así, en el 2° queda 60 y en el 3° también..

Problemas

1. ***Un recipiente lleno de agua, se vacea en la siguiente forma. Primero 8 litros, luego la mitad de lo que quedó y 10 litros más. Finalmente la mitad del último resto, quedando con 15 litros. ¿Cuántos litros de agua contenía el recipiente?***

   A) 80 *l* **B)** 88 *l* **C)** 89 *l*
   D) 86 *l* **E)** 85 *l*

2. ***Carmen va de compras con cierta suma. Compra una camisa con 48 soles, con la mitad de lo que le queda una cocina, con 30 soles un thermo, con la mitad del resto y 35 soles más una olla. Si finalmente le quedó 18 soles, ¿cuánto le costó la cocina?***

   A) 320 soles **B)** 136 soles **C)** 140 soles
   D) 146 soles **E)** 138 soles

3. ***Tres jugadores, A, B y C, se ponen a jugar a las cartas, con la condición de quien pierda duplicará el dinero de los otros dos.***
   Si luego de tres partidas, en las que perdieron una partida cada uno en el orden en que han sido mencionados, cada uno de ellos tiene 72 soles.
   ¿Cuánto tenía A al iniciar el juego?

   A) 72 soles **B)** 63 soles **C)** 36 soles
   D) 117 soles **E)** 126 soles

4. ***Ancelmo, Beto y Caruso acordaron jugar tres partidas de cartas, con la condición de quien pierda primero duplicará el dinero de los otros, el que pierda segundo, triplicará y el que pierda tercero cuadruplicará el dinero de los otros dos. Perdieron en el orden en que han sido nombrados y cada uno resultó con 144 soles.***

   ¿Cuánto ganó o perdió Caruso?

   A) Perdió S/. 84 **B)** ganó S/. 120
   C) ganó S/. 134 **D)** Perdió S/. 68
   E) ganó S/. 84

5. ***Parcimonio le muestra cuatro montones de granos a su hija Lupita.***

   —Si cuentas cuántos granos hay en cada montón, hallarás 64 en cada uno —le dice Parcimonio.–Pero inicialmente habían diferente cantidad de granos en cada montón. Pasé del primero al segundo tantos granos como habían en el segundo, igualmente pasé del segundo al tercero tanto como había en éste y, por último, del tercero al cuarto, tanto como había en el cuarto montón y quedó tal como vez.

   —Descubre cuántos granos contenía inicialmente cada montón.
   Lupita tardó 5 minutos en hallar la solución. Te pido que demores menos tiempo y me digas cuánto había inicialmente en el primer montón.

   A) 120 **B)** 112 **C)** 96 **D)** 56 **E)** 48

6. ***Se tienen 3 recipientes conteniendo cierto número de litros de agua. Del primero se hecha a los otros 2, tantos litros como había de agua en cada uno, en seguida se hace la misma operación con el contenido del segundo y finalmente se hace igual con el contenido del tercero. De esta manera los tres recipientes quedaron conteniendo 16 litros de agua cada uno.***

   ¿Cuál era el contenido inicial del primer recipiente?

   A) 8 litros **B)** 14 litros **C)** 26 litros
   D) 12 litros **E)** 16 litros

2.2.5 Diferencia Unitaria y Diferencia Total

Problema 1

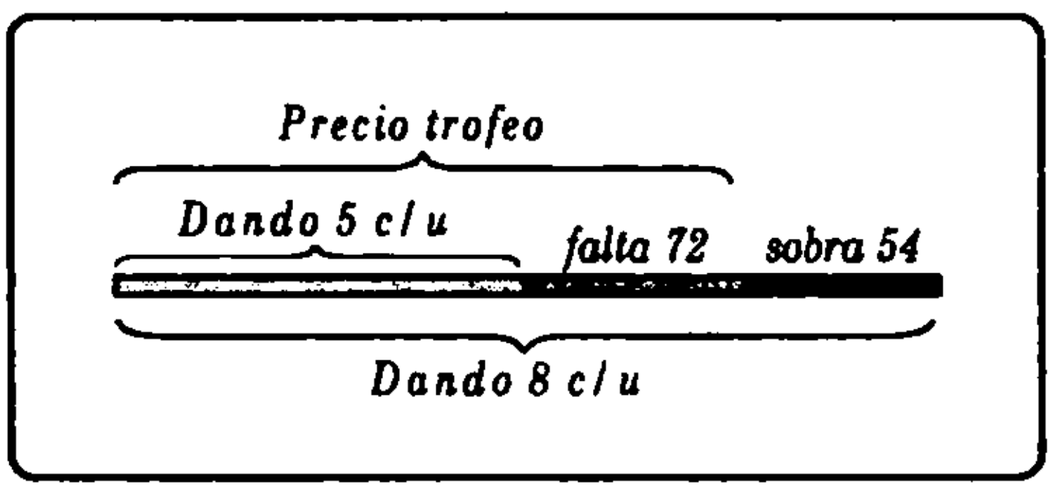
Los socios de un club, decidieron comprar un trofeo para el club. Uno de los socios propuso poner una cuota de 8 soles cada socio, pero se percataron que sobraría 54 soles, por lo que decidieron poner 5 soles cada uno, pero en este caso faltaría 72 soles para comprar el trofeo. ¿Cuántos socios son? ¿Cuánto cuesta el trofeo?

Resolución

Cuando sobra 54, la recaudación sobrepasa en 54 al precio del trofeo. Cuando falta 72 para el precio del trofeo, significa que la recaudación está 72 soles por debajo del precio del trofeo. Entre ambas recaudaciones hay una diferencia de 54 + 72 = 126 soles.

¿Qué es lo que origina esta diferencia? La diferencia de cuotas entre 8 soles y 5 soles. Los 126 soles de diferencia, se llama DIFERENCIA TOTAL *y la diferencia entre 8 soles y 5 soles, se llama* DIFERENCIA UNITARIA.

En la figura se observa que entre las dos formas de recaudación hay una diferencia de 72 + 54 = 126 soles. Esta diferencia se produce porque cada socio da 3 soles menos. Por consiguiente, si cada socio produce una diferencia de 3 soles, ¿cuántos socios tiene que haber para producir una diferencia de 126 soles?



La respuesta la obtendremos dividiendo 126 ÷ 3 = **42 socios** ¿Has entendido hasta aquí?... Si no es así revisa nuevamente el procedimiento seguido.

¿Cómo hallamos el precio del trofeo?

Dando 5 soles cada socio, la recaudación asciende a 42 × 5 = 210. A esta suma le faltaría 72 soles para comprar el trofeo, esto implica que el trofeo cuesta 210 + 72 = **282 soles.**

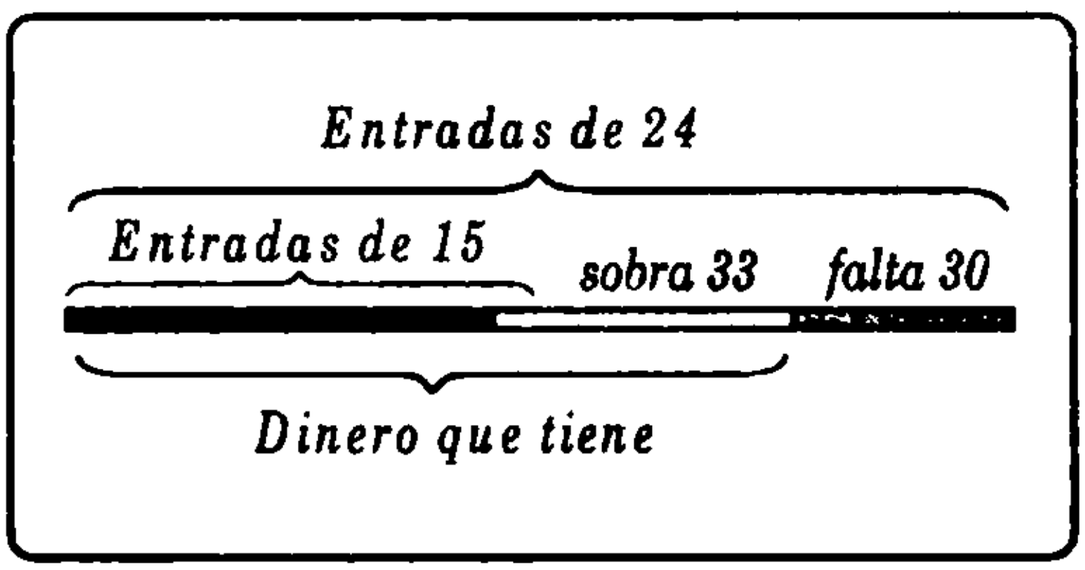
De otro modo: dando 8 soles cada socio recaudaría 42 × 8 = 336 soles. Pero, según los datos, de esta suma sobraría 54 soles tras comprar el trofeo, entonces éste cuesta 336 – 54 = **282 soles.**

Problema 2

Parcimonio ha aprovechado el feriado por fiestas patrias para llevar al circo a su hija Lupita y sus sobrinos . Cuando se dispone comprar entradas de 24 soles, se percata que le va faltar 30 soles, entonces decide comprar entradas de 15 soles, así aún le sobra 33 soles para hacer otras compras. ¿Cuánto dinero tenía Parcimonio al momento de comprar las entradas y a cuántos sobrinos ha invitado al circo?

Resolución

Para comprar las entradas más caras falta 30 soles y al comprar las más baratas sobran 33 soles, lo que implica, que entre ambos importes hay una **diferencia total** de **33 + 30 = 63** soles.



Al comprar entradas de 15 soles en lugar de entradas de 24 soles, gasta 24 – 15 = 9 soles menos por cada entrada. Si por cada entrada el gasto se reduce en 9 soles, ¿cuántas entradas originan una diferencia de 63 soles? ¿Puedes hallar la respuesta?

En efecto: 63 ÷ 9 = 7 entradas, una para Parcimonio, otra para Lupita y se deduce que los 5 restantes son para los sobrinos. ¿Cómo hallamos el dinero que tenía ? 15 × 7 + 33 = 138 soles ¿Entiendes porqué? Verifica esta respuesta.

Problemas

1. ***Hemos decido comprar un escritorio con mis socios aportando 45 soles cada uno, pero nos dimos cuenta que nos faltaban 20 soles para dicha compra. Entonces decidimos dar 10 soles más cada uno, así, sobró 40 soles. ¿Cuántos socios tengo?***

   A) 4 B) 5 C) 6
   D) 7 E) 8

2. ***Festino y sus amigos se han reunido para organizar una fiesta. Con esta actividad piensan recaudar fondos para comprar un equipo de sonido. Ellos ya estimaron el número de asistentes. Festino propone cobrar 10 soles cada entrada.***

   —Festino, tú no hagas los cálculos, cobrando 10 soles nos va faltar 200 soles —le reclama Clarineto —yo propongo cobrar 15 soles la entrada, así todavía nos sobrará 460 soles.

   ¿Cuántos asistentes han estimado?

   A) 132 B) 123 C) 213
   D) 124 E) 125

3. ***Si reparto 5 caramelos a cada niño me va faltar para 4 niños, en cambio si doy 3 a cada uno, me sobraría 28 caramelos. ¿Cuántos caramelos tengo?***

   A) 98 B) 100 C) 102
   D) 105 E) 88

4. ***Pancricio, el jefe de Manolento, está indeciso entre pagar 240 soles o pagar 220 soles a sus trabajadores.***

   — Si doy 240 a cada uno me va faltar 120 soles y si doy 220 a cada uno me va sobrar 360 soles — piensa ensimismado Pancricio.

   Manolento ha averiguado que ese dinero es para que pague a todos por igual y no sobre dinero.

   ¿Cuánto planea recibir Manolento?

   A) 230 soles B) 238 soles
   C) 236 soles
   D) 235 soles E) 230 soles

5. ***Si reparto 8 caramelos a cada niño me faltaría para 6 niñas. En cambio si doy 5 caramelo a cada niño me sobraría como para 9 niños más. ¿Cuántos niños son?***

   A) 28 B) 30 C) 31
   D) 32 E) 34

6. ***Si en una reunión, las personas se sientan en cada banca, quedarían de pie 9 personas. Pero si se sientan 5 personas en cada banca, quedarían 7 bancas libres. ¿Cuántas personas hay en la reunión?***

   A) 95 B) 85 C) 65
   D) 80 E) 75

Problemas Resueltos

Problema 1

En R se define la operación simbolizada por (*), como sigue:

$$a * \begin{cases} \dfrac{a+2}{2} & \text{Si } a \text{ es par ó cero} \\ \dfrac{a+1}{2} & \text{Si } a \text{ es impar} \end{cases}$$

Calcular: $(3^* + 1^*)^* + 4$

Resolución

$$3^* = \frac{3+1}{2} = 2 \qquad 1^* = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$(3^* + 1)^* + 4 = (2 + 1)^* + 4$$

$$= \underbrace{(3)^*} + 4$$

$$= 2 + 4 = 6$$

Rpta.: 6

Problema 2

Se define en el conjunto de los números naturales la operación CIN, según la siguiente regla:

CIN (x) da el mayor número menor o igual que x que termina en 5. Por ejemplo: CIN (27) = 25; CIN (35) = 35, CIN (74) = 65
¿En qué cifra termina el valor de:

$$E = [CIN(37) + 2CIN(48)]^{CIN(200)}$$

Resolución

$$E = [35 + 2(45)]^{CIN\,200} = (125)^{CIN\,200} = ..5$$

> *Un numeral que termina en 5 elevado a cualquier exponente, siempre termina en 5.*

Rpta.: 5

Problema 3

Definamos en R:

$$a^\square = \frac{a+1}{a-1} \quad si\ a \neq 1$$

$$a^\square = 1 \quad si\ a = 1$$

Según esto, hallar $E = \left[2^\square - (3^\square)^\square\right]^\square$

Resolución

Se opera primero con los números afectados por el mayor número de signo colectores.

$$2^\square = \frac{2+1}{2-1} = 3 \quad 3^\square = \frac{3+1}{3-1} = 2$$

Reemplazando en E:

$$E = \left[3 - (\underbrace{2}_{\uparrow})^\square\right]^\square = [3 - \underbrace{3}_{\uparrow}]^\square = 0^\square = 1$$

Rpta.: 4

Problema 4

Si $\boxed{x+2} = x - 2$, ***hallar*** $M = \boxed{\boxed{4} + \boxed{5}} + \boxed{2}$

Resolución

$$\boxed{4} = \boxed{2+2} = 2 - 2 = 0$$

$$\boxed{5} = \boxed{3+2} = 3 - 2 = 1$$

$$M = \boxed{0+1} + \boxed{2}$$

$$M = \underbrace{\boxed{1}} + \underbrace{\boxed{2}}$$

$$M = \underbrace{\boxed{-1+2}} + \underbrace{\boxed{0+2}}$$

$$M = (-1 - 2) + (0 - 2) = -5$$

Rpta.: –5

Problema 5

En el conjunto A = {1; 2; 3; 4}, se define la operación simbolizada por *, mediante la siguiente tabla

*	1	2	3	4
1	2	3	2	4
2	3	1	3	1
3	2	3	2	2
4	4	1	2	3

Según, esta tabla, hallar

$$P = \frac{(4*1)+(1*4)+(3*2)}{(2*2)+(3*4)+(2*4)}$$

Resolución

El primer número de la operación se lee en la primera columna y el segundo número en la primera fila. El resultado de la operación se encuentra en la fila del primero y la columna del segundo. Luego:

$$P = \frac{4+4+3}{1+2+1} = \frac{11}{4}$$

Rpta.: 11/4

Problema 6

Si $a \Delta b = 4(b*a)+a$

$$a * b = 3(b \Delta a)+b$$

Hallar: $(5 * 3) + (4 \Delta 2)$

1° $5 * 3 = 3[3 \Delta 5] + 3$

$5 * 3 = 3[4(5 * 3) + 3] + 3$

$5 * 3 = 12(3 * 5) + 9 + 3$

$-11(5 * 3) = 12 \Rightarrow \boxed{5 * 3 = -12/11}$

2° $4 \Delta 2 = 4[2 * 4] + 4$

$4 \Delta 2 = 3[3(4 \Delta 2) + 4] + 4$

$4 \Delta 2 = 12(4 \Delta 2) + 16 + 4$

$-11(4 \Delta 2) = 20 \Rightarrow \boxed{4 \Delta 2 = -20/11}$

$\therefore (5 * 3) + (4 \Delta 2) = -12/11 - 20/11 = -32/11$

Rpta.: –32/11

Problema 7

Sea M(A) el operador que borra la primera cifra del numeral A si A empieza en par y borra la última cifra, si A empieza en impar. Por ejemplo: M(678) = 78; M(596) = 59

Según lo anterior:

$M(\overline{aaa}) + M(\overline{bbb}) + M(\overline{ccc})$ Hallar: sabiendo que $\overline{abc} + \overline{cba} = 1069$ y $M(\overline{abc}) + M(\overline{cba}) = 143$

Resolución

1° $\overline{abc}$ $\quad * c + a = 9 \quad (1)$

$\overline{cba}$ $\quad * b + b = 16$

$\overline{1069}$ $\quad \boxed{b = 8}$

2° Si a y c fueran de la misma paridad, $M(\overline{abc}) + M(\overline{cba})$ sería par, como no lo es, a es par y c impar **ó** a es impar y c par. Para cualquiera de los casos el análisis es la misma. Consideremos que a es par y c es impar, entonces:

$M(\overline{\not{a}bc}) + \rightarrow \overline{bc} +$ $\quad * c + b = 13$

$M(\overline{cb\not{a}}) \rightarrow \overline{cb}$ $\quad c + 8 = 13$

$143 \quad 143 \quad \Rightarrow \boxed{c = 5}$ en (1): $\boxed{a = 4}$

$\therefore M(444) + M(888) + M(555) = 44 + 88 + 55 = 187$

Rpta.: 187

Problema 8

Un número de 3 cifras se multiplica por 52, si la suma de los productos parciales es 2135, ¿cuál es la suma de las cifras del producto?

$$\begin{array}{r} \overline{abc}\times \\ 52 \\ \hline \text{Pdtos. parciales} \begin{cases} 2\times\overline{abc} \\ 5\times\overline{abc} \end{cases} \\ \hline \end{array}$$

$$2\times\overline{abc}+5\times\overline{abc}=2135$$
$$7\times\overline{abc}=2135$$
$$\overline{abc}=305$$

$\therefore \quad a+b+c=3+0+5=8$

Rpta.: 8

Problema 9

Efectuar:

$$\left[\frac{315\cdot 285+225}{614\cdot 586+196}\right]^4$$

Resolución

Sea:

$$E=\left[\frac{315\times 285+225}{614\times 586+196}\right]^4$$

$$E=\left[\frac{(300+15)(300-15)+225}{(600+14)(600-14)+196}\right]^4$$

$$E=\left[\frac{300^2-15^2+225}{600^2-14^2+196}\right]^4$$

$$E=\left[\frac{300^2}{600^2}\right]^4=\left[\frac{300}{600}\right]^8=\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}$$

Rpta.: $\frac{1}{256}$

Problema 10

Hallar la raíz cuadrada de

$$9\times 10^{14}+12\times 10^{10}+4\times 10^6$$

e indicar la suma de cifras del resultado

Resolución

$$\sqrt{9\times 10^{14}+12\times 10^{10}+4\times 10^6}$$

$$=\sqrt{10^6(9\times 10^8+12\times 10^4+4)}$$

$$=\sqrt{10^6\left[(3\times 10^4)^2+2(3\times 10^4)(2)+2^2\right]}$$

$$=\sqrt{10^6\left[3\times 10^4+2\right]^2}$$

$$=10^3(3\times 10^4+2)$$

$$=3\times 10^7+2\times 10^3$$

$$=30002000$$

$\therefore$ Suma de cifras = 3 + 2 = 5

Rpta.: 5

Problema 11

Calcular:

$$\sqrt[32]{255\times 257\times 65537+1}$$

Resolución

$$E=\sqrt[32]{225\times 257\times 65537+1}$$

$$E=\sqrt[32]{(256-1)(256+1)(65537)+1}$$

$$E=\sqrt[32]{(256^2-1)(65537)+1}$$

$$E = \sqrt[32]{(256^2 - 1)(256^2 + 1) + 1}$$

$$E = \sqrt[32]{(256^4 - 1) + 1} = \sqrt[32]{256^4} = \sqrt[32]{(2^8)^4}$$

$$E = \sqrt[32]{2^{32}} = 2$$

Rpta.: 2

Problema 12

En la siguiente multiplicación, las cifras han sido sustituidas por letras:

$$\begin{array}{r} MN\times \\ N \\ \hline P99 \end{array}$$

Calcular (M + N + P)

Resolución

El cuadrado de N termina en 9, entonces N es 3 ó 7. Si fuera 3, del producto de N×N no se lleva nada. Entonces 3×M termina en 9, pero este es posible sólo si M = 3, y no es posible porque 3 × 33 = 99. Entonces $\boxed{N = 7}$.

De 7 × 7 = 49, se lleva 4. Luego 7 × M + 4 termina en 9, entonces $\boxed{M = 5}$. El producto es 57 x 7 = 399 ⇒ M +N + P = $\boxed{15}$

Rpta.: 15

Problema 13

Si $\overline{56ABC} = 7(\overline{ABC}) + 53042$

Hallar (A + B + C)

Resolución

El número $\overline{56ABC}$ se puede expresar como $56000 + \overline{ABC}$. Sustituyendo en la igualdad:

$$56000 + \overline{ABC} = 7(\overline{ABC}) + 53042$$

$$56000 - 53042 = 7(\overline{ABC}) - \overline{ABC} \text{ de donde}$$

$$\overline{ABC} = 493 \Rightarrow A + B + C = 16$$

Rpta.: 16

Problema 14

Si cada asterisco representa una cifra, ¿cuál es la suma de cifras del segundo producto parcial de la siguiente multiplicación? (1)

$$\begin{array}{r} **5\times \\ 1** \\ \hline 2**5 \\ 13*0 \\ *** \\ \hline 5*47* \end{array}$$

• Completando las cifras evidentes resulta lo que se muestra.

$$\begin{array}{r} 3A5\times \\ 1CB \\ \hline 2*75 \\ 13*0 \\ 3A5 \\ \hline 4*775 \end{array}$$

- B×5 = ...5 ⇒ B es impar
- B×3 > 20 ⇒ B = 7 ó 9, probando con 9 no cumple, entonces $\boxed{B = 7}$ ⇒ B × 5 = 35, se lleva 3. Luego: 7 × A + 3 = .. 7 ⇒ $\boxed{A = 2}$
- C × 5 = ... 0 ⇒ C es par y C × 3 + lo que se llevó es igual a 13 ⇒ $\boxed{C = 4}$

∴ El segundo producto parcial es 1300

⇒ 1 + 3 = $\boxed{4}$

Rpta.: A

Problema 15

Restablecer las cifras que faltan en la siguiente división y dar como respuesta el producto de cifras del cociente.

```
*2*5* |325
***    1**
-----
*0**
*9**
-----
  *5*
  *5*
-----
```

Resolución

El último cociente es 2, porque al multiplicar por 325 debe tener 3 cifras y tener 5 como cifra central.

Con esto la división resulta como se muestra.

Al multiplicar el segundo cociente por 325 debe terminar en cero, entonces esta cifra es par.

```
 _2_50 |325
 325    1_2
 -----
  _0_5
  _9_0
  =---
    650
    650
 -----
```

La primera cifra del dividendo debe ser mayor que 3 pero menor que 7, porque de ser 7 el primer cociente sería 2. Esto implica que el segundo dividendo es de mil y tantos a tres mil y tantos, entonces el segundo cociente, como es par sólo puede ser 6 u 8.

El producto de 8 por 325 no tiene cifra 9. Entonces el cociente es 162.

Luego $1 \times 6 \times 2 = 12$.

Rpta.: 12

Problema 16

En la siguiente operación de adición los dígitos han sido reemplazados por letras. La misma letra está en lugar del mismo dígito todas las veces que aparece y letras diferentes representan a dígitos diferentes.

```
    Y Y K X +
      Y K E
        K X
          E
  ---------
  E E P D K
```

Resolución

```
    Y Y K X      (i)
      Y K E      (ii)
        K X      (iii)
          E      (iv)
  ---------
  E E P D K      (v)
```

La primera cifra de (*v*) debe ser 1, porque la suma de Y más lo que se ha llevado no llega a 20, entonces $\boxed{E = 1}$

(*v*) comienza en 11, entonces $\boxed{Y = 9}$ y debemos habernos llevado 2 de la suma de decenas, entonces $\boxed{P = 0}$. De habernos llevado 3, P seria 1 y no es posible porque E es 1.

Como llevamos 2 de las decenas, K es 6 u 8 (K es par de la suma de unidades X+1+X+1).

Si K fuera 6, D Sería 0 ó 1 y no es posible porque E es 1 y P es 0, entonces $\boxed{K = 8}$

La suma de unidades es 8; 18; ó 28. Pero no 28 porque como E = 1 entonces X sería 13.

Tampoco 18, porque X sería 8, igual que K, entonces la suma de unidades es 8, de donde $\boxed{X = 3}$ y $\boxed{D = 4}$

Rpta.: 4

Problema 17

"Yo almuerzo cuando las horas transcurrido del día exceden en 2 a las horas por transcurrir". ¿Cuál es mi hora de almuerzo?

Resolución

Desde que empezó el día, hasta este momento que te encuentras leyendo este párrafo, han transcurrido del día cierto número de horas y faltan por transcurrir otras, para que acabe el día. En cada momento del día hay horas transcurridas y horas por transcurrir, ambas horas se completan entre sí para dar las 24 horas del día.

En el problema las horas transcurridas son mayores que las que faltan por transcurrir, en 2 hora, o sea la diferencia es 2. Hallamos dos números cuya suma es 24 y la diferencia, 2

Horas por transcurrir = # menor: $24 - 2 = 22$
$\Rightarrow 22 \div 2 = 11$

Horas transcurridas = # mayor: $11 + 2 = 13$

Rpta.: 13 h

Problema 18

Una botella de vino cuesta 22 soles. El vino cuesta 20 soles más que la botella. ¿Cuánto cuesta la botella?

Resolución

La respuesta errónea más frecuente es **2**. Si la respuesta fuera 2 soles, el vino costaría 20 soles, o sea **20 – 2 = 18** soles más que la botella y no 20 soles más que la botella.

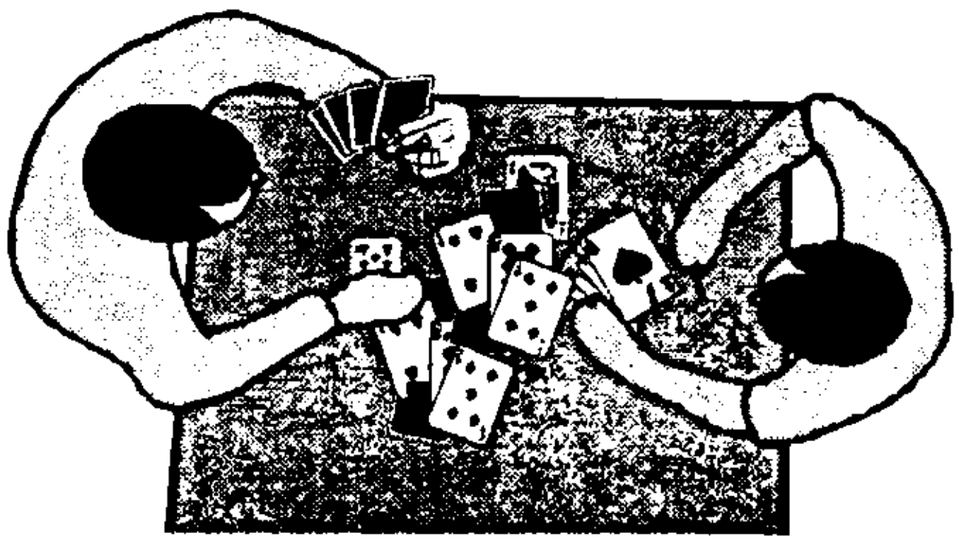
Veamos la resolución: Los 22 soles es la suma de los precios y 20, es la diferencia. Conociendo la suma y diferencia de dos números se pide hallar el menor:

$$22 - 20 = 2 \Rightarrow 2 \div 2 = 1$$

Rpta.: 1 sol

Problema 19

Dos jugadores inician el juego a las cartas con 300 y 200 soles respectivamente, a 10 soles la partida. Al final del juego, el segundo, quien ganó todas las partidas, resultó con una suma igual al cuádruple de lo le quedó al otro. ¿Cuántas partidas jugaron?



Resolución

• La suma que se pone en juego es **300 + 200 = 500** soles.
La suma en juego siempre es 500 soles, sólo varía, luego de cada partida, el dinero que tiene cada jugador.
• Al final del juego, de los 500 el segundo tiene el cuádruplo de lo que le queda al primero, esto es, los 500 lo dividimos en 5 partes, de las cuales 4 partes (400 soles) son del segundo y 1 parte (100 soles) del primero.
• Se deduce que el segundo ganó **400 – 200 = 200** soles. Debieron haber jugado **200 ÷ 10 = 20** partidas

Rpta.: 20

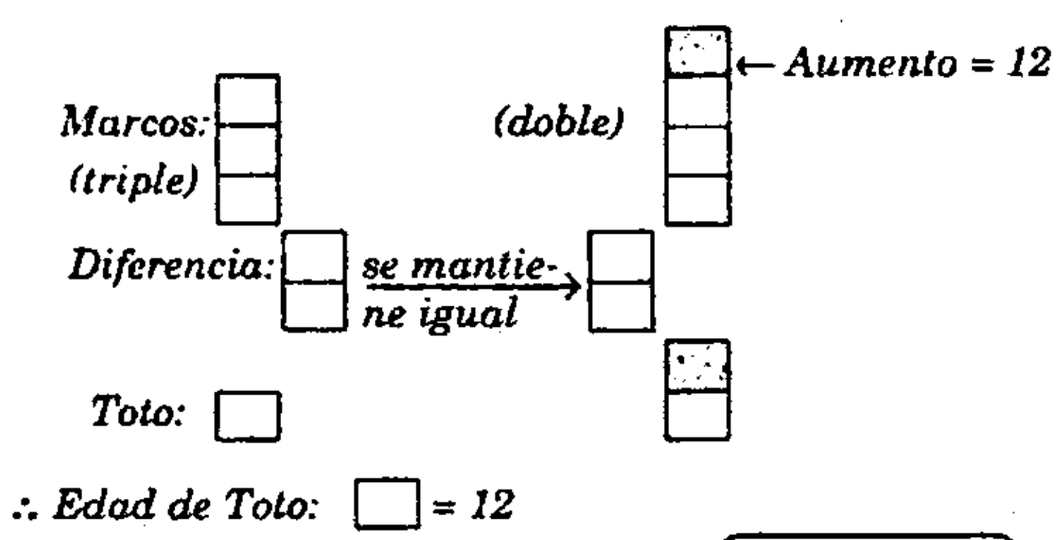
Problema 20

La edad de Marcos es triple de la de Toto, pero dentro de 12 años sólo será el doble. ¿Qué edad tiene Toto?

Resolución

• Imagínate que eres mayor que tu hermano en 2 años. Todo el tiempo de tu vida, la diferencia entre tu edad y la de tu hermano será de 2 años. La diferencia de edades entre dos personas siempre es la misma durante todo el tiempo.

• Basado en esta "propiedad" te propongo una solución gráfica del problema (Hay otros métodos)



Rpta.: 12

Problema 21

Un empleado tiene ahorrados 200 soles y otro 50 soles. Cada uno ahorra mensualmente 20 soles. ¿Dentro de cuántos meses el ahorro del primero, duplicará al del segundo?

Resolución

• La diferencia de ahorros siempre va ser la misma e igual a 200 – 50 = 150 soles.

• Cuando una cantidad es doble que la otra, es además doble de la diferencia. Entonces el primero tiene 2×150 = 300. Su ahorro aumentó en 300 – 200 = 100, este incremento le habrá tomado 100÷20 = 5 meses.

Rpta.: 5 meses

Problema 22

Isa le dice a Nina: "entre ambas tenemos 600 jabones para vender. Si me dieras 50 jabones yo tendría el triple de lo que te quedaría después de haberme dado los 50". ¿Cuántos jabones tiene cada una?

Resolución

En el supuesto caso que Nina entregara a Isa 50 jabones, entre ambas seguirían, teniendo 600 jabones. Pero Isa tendría tres veces (triple) y Nina una vez. Si dividimos los 600 en 4 partes (150 cada parte), a Isa le correspondería 3 partes: **3×150 = 450**. Y a Nina una parte: 150 soles, esto es, luego de haber entregado 50 soles. Entonces Nina tiene **150 + 50 = 200** jabones e Isa los restantes 400.

Rpta.: 400 y 200

Problema 23

¿En cuánto aumenta o disminuye el producto de 30 por 40, si 30 aumenta en 8 y 40 disminuye en 8?

Resolución

• Al aumentar 30 en 8 unidades, el producto aumenta en **40 × 8 = 320**.

• Al disminuir 40 en 8 unidades, el producto disminuye en **8 (30+8) = 304**. En consecuencia, el producto aumenta en **320 – 304 = 16**.

Rpta.: 16

Problema 24

Se dan para multiplicar 24 y 30. Si el multiplicando se hace 5 veces, ¿Cuántas unidades es preciso restar al multiplicador para que el producto no varíe?

Resolución

Al ser quintuplicado el multiplicando el producto se haría 5 veces, para que se mantenga igual, es necesario dividir al multiplicador entre 5, esto es **30 ÷ 5 = 6**, que equivale restarle **30 – 6 = 24** al multiplicador.

Rpta.: 24

Problema 25

Al multiplicar por 65 un cierto número, éste aumenta en 3840. ¿Cuál es el número?

Resolución

Cuando un número se multiplica por 65,

aumenta en 64 veces el número. Esto es, 3840 es 64 veces el número, en consecuencia el número es **3840 ÷ 64 = 60**

Rpta.: 60

Problema 26

El producto de dos enteros es 3120. Cuando uno de los factores aumenta en 7, el producto resulta 3575. Hallar los enteros.

Resolución

El aumento del producto de los enteros es *3575 – 3120 = 455*. Al aumentar en 7 unidades un factor, el producto aumenta en 7 veces el otro, éste es *455 ÷ 7 = 65*; en consecuencia el otro factor es **3120 ÷ 65 = 48**

Rpta: 65 y 48

Problema 27

El producto de dos factores es 600. Cuando cada uno de ellos aumenta en 6, el producto aumenta en 330. Los factores son:

Resolución

El aumento total consta de: 6 veces el aumento del multiplicando, 6 veces el aumento del multiplicador y el producto de los dos incrementos, que sería **6 × 6 = 36**. Luego **330 – 36 = 294** representa 6 veces la suma de los factores, la cual es **294 ÷ 6 = 49**. Si el producto de dos factores es 600 y la suma igual a 49, los factores son 24 y 25.
(Intente la resolución mediante ecuaciones)

Rpta.: 24 y 25

Problema 28

Se compraron 30 gallinas y 24 pollos por 1308 soles. Las gallinas se vendieron por 1500 soles y los pollos por 720 soles. La utilidad en una gallina es 3 veces la de un pollo. ¿Cuánto costó cada gallina?

Resolución

• Utilidad total = **(1500 + 720) – 1308 = 912** soles

• Las 30 gallinas producen una utilidad tanto como 3×30 = 90 pollos. Luego, 30 gallinas y 24 pollos producen tanta utilidad como **90 + 24 = 114** pollos.

• Si 912 soles es la utilidad de 114 pollos, entonces en cada pollo se gana **912 ÷ 114 = 8** soles y en cada gallina **8 × 3 = 24** soles.

• Puesto que cada gallina se vende en **1500 ÷ 30 = 50** soles, ganando 24 soles, entonces, cada una costó **50 – 24 = 26**.

Rpta.: 26 soles

Problema 29

Compré cierto número de cuadernos por 960 soles. Al vender una parte de ellos a 6 soles cada uno obtuve 486 soles, pero perdí 2 soles en cada una. ¿En cuánto debo vender cada uno de los restantes para ganar 345 soles en todos los cuadernos?

Resolución

Si vendiendo en 6 soles se pierde 2 soles por cuaderno, entonces la unidad costó **6 + 2 = 8** soles. Número de cuadernos comprados es entonces, **960÷8 = 120**, de los cuales se vendió en 6 soles **486÷6 = 81** cuadernos perdiendo **81×2 = 162** soles.

En la venta de los **120 – 81 = 39** restantes se debe recuperar los 162 soles perdidos y ganar 345 soles, que hacen **162 + 345 = 507** soles. Entonces en cada uno se debe ganar **507÷39 = 13** soles, es decir se debe vender en **8 + 13 = 21** soles cada cuaderno.

Rpta.: 21 soles

Problema 30

Un granjero vendió 15 cerdos y 12 patos por 1824 soles. ¿Cuánto vale cada cerdo, si el precio de un cerdo es 3 veces el de un pato?

Resolución

Vender 15 cerdos equivale a vender **15 × 3 = 45** patos.

Vender 15 cerdos y 12 patos equivale a vender **45 + 12 = 57** patos a 1824 soles, entonces cada pato se vendió en **1824 ÷ 57 = 32** soles, de donde se deduce que cada cerdo se vendió en **32 × 3 = 96** soles.

Rpta.: 96 soles

Problema 31

Una tienda vende miel en botellas grandes y botellas chicas; cada botella grande cuesta dos veces el precio de una chica. Una señora compró 8 botellas de miel grandes y 5 chicas. Si en vez de eso hubiese comprado 5 botellas grandes y 8 chicas, habría gastado 15 soles menos. ¿Cuál es el precio de cada botella?

Resolución

Ocho botellas grandes valen lo que 16 chicas. Por lo tanto, 8 grandes más 5 chicas valen lo que 21 chicas. Por otro lado, 5 grandes más 8 chicas valen lo que 18 chicas, que son **21 – 18 = 3** botellas chicas menos que la anterior. Esta diferencia en soles es 15 soles. En consecuencia cada botella chica cuesta **15 ÷ 3 = 5** soles y cada grande 10 soles.

Rpta.: 10 y 5 soles

Problema 32

Ochentiséis galletas han de servir de comida para diez animales; cada animal es un perro o un gato. Cada perro ha de obtener 9 galletas y, cada gato, 8. ¿Cuántos perros y cuántos gatos hay?

Resolución

Método I (algebraico)

 # Perros: x } *# animales:* $x + y = 10$ (1)

 # Gatos : y } *Cant. Galletas:* $9x + 8y = 86$ (2)

(1)× 8: $8x + 8y = 80$ (3)

(2) – (3): $\boxed{x = 6}$ $\boxed{y = 4}$

Método (II) (Falsa suposición)

Suponiendo que los 10 animales fueran gatos, entonces bastarán **8×10 = 80** galletas. Hay un error de **86 – 80 = 6** galletas. "Cambiamos" un perro por un gato; por cada intercambio el error se reduce en 1. Para reducir en 6, hacen falta 6 perros. Luego; hay 6 perros y 4 gatos

Método (II) (Método del reparto)

Demos 8 galletas a cada uno de los 10 animales; entonces sobran 6. Bien, cada gato ya recibió su parte. Por lo tanto, las 6 galletas restantes son para los perros y como cada perro debe recibir una galleta más, debe haber 6 perros y 4 gatos.

Rpta.: 6 y 4

Problema 33

Un ganadero compró 20 reses, entre vacas y toros, por 5400 soles. Por cada vaca pagó 250 y por cada toro, 300. ¿Cuántas vacas y cuántos toros compró?

Resolución

Para resolver este problema, vamos a utilizar el mismo modelo de razonamiento que para la resolución del problema anterior.

Imagínate que vas ha cancelar la compra con los 5400. Primero pagas 250 por cada animal, (**van 250 × 20 = 5000**) te sobran 400.

Por cada toro vas a aumentar 50 soles, entonces hay **400 ÷ 50 = 8 toros y 20 – 8 = 12 vacas.**

Rpta.: 8

Problema 34

Tengo 350 pesos en 50 billetes de 5 y 10 pesos. ¿Cuántos billetes tengo de cada clase?

Resolución

Este problema es equivalente a repartir 350 pesos entre 50 personas, dando 5 pesos a unas y 10, a otras. Primero repartimos 5 pesos a cada una de las 50 (**van 5×50 = 250**) Nos quedan 100, los cuales nos alcanza para aumentar 5 pesos a 100 ÷ 5 = 20 personas.

Rpta: 20 de 10 pesos y 30 de 5 pesos

Problema 35

En el corral de los cerdos se han metido las gallinas. Se pueden contar en total 30 cabezas y 84 patas. ¿Cuántos son los cerdos y cuántas, las gallinas en el corral?

Resolución

Si a cada uno de los 30 animales "le ponemos" 2 patas, nos sobran 24. De las 24 patas restantes le "completamos" con 2 a cada cerdo. Nos alcanza para 12 cerdos.

Rpta: Hay 12 cerdos y 18 gallinas

Problema 36

Un árbol crece x metros el primer año, 4 metros el segundo año, el tercer año triplicó la altura que alcanzó el segundo año el cuarto año crece hasta duplicar la altura que tenía al final del tercer año y 5 metros más, alcanzando 41 metros de altura. Calcular "x".

Resolución

OPERACIONES DIRECTAS	OPERACIONES INVERSAS
$x \rightarrow + 4$	$\rightarrow 41 - 5 = \underline{36}$
$\times 3$	$36 \div 2 = \underline{18}$
$\times 2$	$18 \div 3 = \underline{6}$
$+ 5 \Rightarrow 41$	$6 - 4 = 2 =$ "x"

Rpta.: 2 metros

Problema 37

Alicia fue de compras al mercado, gastó en verduras S/. 60 con la mitad del resto compró menestras, con el nuevo resto compró arroz y azúcar gastando S/. 40; quedándose únicamente con S/. 10. ¿Cuánto gastó en total?

Resolución

Sea S/. "N", lo que tenía al iniciar las compras.

OPERACIONES DIRECTAS	OPERACIONES INVERSAS
$N \rightarrow - 60$	$\rightarrow 10 + 40 = \underline{50}$
$\div 2$	$50 \times 2 = \underline{100}$
$- 40 \Rightarrow 10$	$100 + 60 = 160 = N$

Al iniciar las compras tenía S/. 160, después de las compras sólo le quedó S/. 10, entonces gastó en total S/. 150

Rpta.: 150 soles

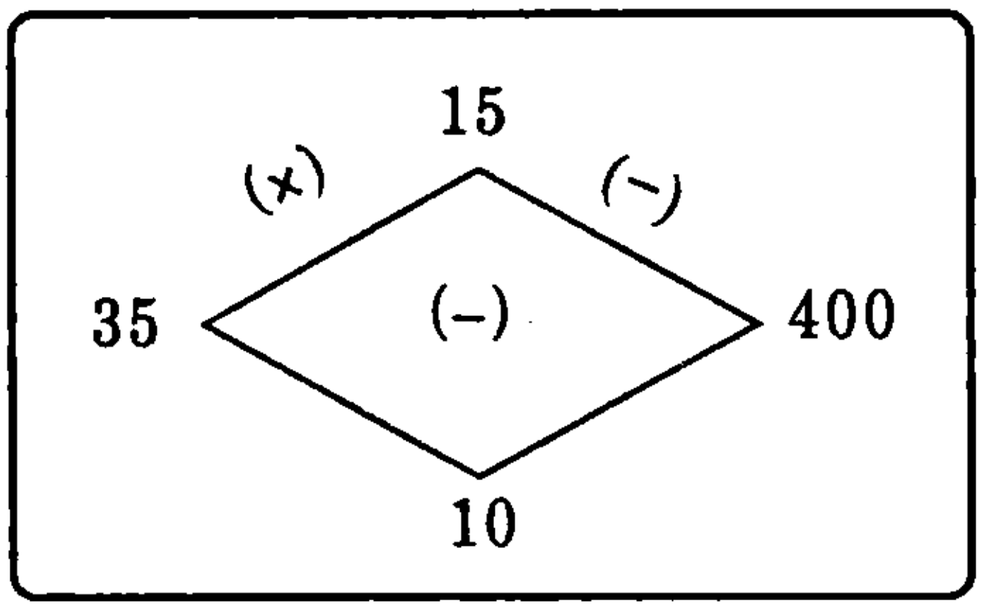
Problema 38

¿Cuántos litros de vino de S/.10 el litro se debe mezclar con vino de S/. 15 el litro, para tener 35 litros de mezcla que se pueda vender a S/. 11 3/7 el litro, sin ganar ni perder?

Resolución

El total de litros de vino es 35, como cada litro de mezcla va a costar S/. $11\frac{3}{7}$ entonces,

el valor total sería: S/. $35\left(11\frac{3}{7}\right) = S/.400$



$$\Rightarrow \text{ \# litros de S/. } 10 = \frac{35 \times 15 - 400}{15 - 10} = 25$$

Rpta.: 25 litros

Problema 39

Un día domingo Jaimito salió de compras con sus 4 amigas, gastó en pasajes de ida S/. 8 con la mitad del resto compró 2 regalos para Nancy y Vilma; para María le compró un regalo de S/. 80, con la mitad del nuevo resto y S/. 40 más compró una cartera para Rocío; cuando él quiso comprarse una billetera observó que le faltaba dinero, por lo que Nancy le prestó duplicándole el dinero que le había quedado, con lo cual se compró una billetera de S/. 100, y se quedó solamente con S/. 8 para el pasaje de vuelta, ¿Cuánto dinero tenía Jaimito?

Resolución

Sea: S/. "N" lo que tenía:

OPERACIONES DIRECTAS		OPERACIONES INVERSAS
$N \rightarrow$	-8	$\rightarrow 8 + 100 = \underline{108}$
	$\div 2$	$108 \div 2 = \underline{54}$
	-80	$54 + 40 = \underline{94}$
	$\div 2$	$94 \times 2 = \underline{188}$
	-40	$188 + 80 = \underline{268}$
	$\times 2$	$268 \times 2 = \underline{536}$
	$-100 \Rightarrow 8$	$536 + 8 = 544 = N$

Rpta.: 544 soles

Problema 40

De un recipiente lleno de agua, se saca 2 litros, más tarde se derrama la mitad del líquido, enseguida se le adiciona 4 litros, finalmente se gasta la mitad del agua, quedando 8 litros en el recipiente. Calcular la capacidad del recipiente.

A) 18 litros **B)** 26 litros **C)** 24 litros
D) 30 litros **E)** 16 litros

Resolución

Sea "L" litros la capacidad del recipiente:

OPERACIONES DIRECTAS		OPERACIONES INVERSAS
$L \rightarrow$	-2	$\rightarrow 8 \times 2 = \underline{16}$
	$\div 2$	$16 - 4 = \underline{12}$
	$+4$	$12 \times 2 = \underline{24}$
	$\div 2 \Rightarrow 8$	$24 + 2 = 26 = L$

Rpta.: B

Problema 41

Un frutero está a punto de vender todas las manzanas que tiene. Mientras hace los tratos con el comprador, piensa para sí: " si vendo a 3 soles el kilo ganaré 40

soles en la venta. En cambio, si vendo a 5 soles el kilo ganaré 120 soles" ¿De cuántos kilogramos dispone y cuánto le costó a él el kg de manzanas?

Resolución

¡Atención! Este problema puede aparentar dificultad, sin embargo su solución es bastante sencilla.

- Cuando incrementa el precio de un kg de 3 a 5 soles, o sea 2 soles; su utilidad se incrementa de 40 a 120, o sea en 80 soles.
- Por cada kg la utilidad incrementa en 2 soles, ¿cuántos kg provocarán un incremento de 80 soles?, pues **80 ÷ 2 = 40** kg.
- De vender a 3 soles ganará 40 soles en 40 kg, esto es, 1 sol por kg por lo tanto, si vendiendo a 3 soles gana 1 sol, a él le costó 2 soles cada kg.

Rpta: 40 kg y S/. 2,0

Problema 42

En la reunión de padres de familia del aula de quinto año, han acordado realizar un viaje de promoción al Cuzco. Para solventar los gastos, uno de los padres propuso dar 80 soles por alumno; pero el profesor de Matemática le hizo notar que faltarían 500 soles. Otro padre propuso una cuota de 120 por alumno, entonces una madre de familia se opuso aduciendo que sobraría 1500 soles. ¿Cuántos son los alumnos y qué gasto implica el viaje?

Resolución

- Al aumentar la cuota de 80 a 120, esto es en 40 soles por alumno, permite que la recaudación total alcance no sólo para cubrir la falta de los 500, sino todavía sobrar 1500 soles.
- Si el incremento de 40 soles por alumno, ocasiona un incremento de **500 + 1500 = 2000** en la recaudación total, ¿cuántos son los alumnos? Pues deben ser **2000 ÷ 40 = 50**.

El gasto del viaje es: $50 \cdot 120 + 500 = 6500$

Rpta.: S/. 6500

Problema 43

Entre 20 personas tomaron un autobús por 300 soles. Algunas de ellas no podían pagar, entonces cada una de las restantes tuvo que pagar 10 soles más de lo que le correspondía. ¿Cuántas personas no pagaron?

Resolución

Lo que se ha de pagar es 300 soles, a cada una le corresponde pagar **300 ÷ 20 = 15** soles. Sin embargo cada una de las que pagaron aportó **15 + 10 = 25**; entonces las que pagaron son **300 ÷ 25 = 12**. Por lo tanto las que no pagaron son **20 – 12 = 8**.

Rpta.: 8

Problema 44

Un ómnibus que cubre la ruta Trujillo – Chiclayo, ha recaudado 300 soles, en un viaje. El pasaje es de 5 soles por pasajero, sin importar el lugar donde suba o baje. ¿Con cuántos pasajeros salió del terminal de Trujillo, si al de Chiclayo llegó con 36?. Se ha sabido además, que en el trayecto, por cada pasajero que bajaba subían 2.

Resolución

- Siendo S/. 300 la recaudación y S/. 5 el pasaje único, los usuarios fueron **300÷5 = 60**. De los 60, sólo 36 llegaron al terminal de Chiclayo, entonces en el trayecto se bajaron **60 – 36 = 24**.
- Si por cada pasajero que bajaba en el trayecto, subían 2, por los 24 que bajaron, habrán subido en el trayecto **2×24 = 48** pasajeros.

• Si 48 subieron en el trayecto, los restantes **60 – 48 = 12** han tenido que subir en el terminal de Trujillo.

Rpta: 12

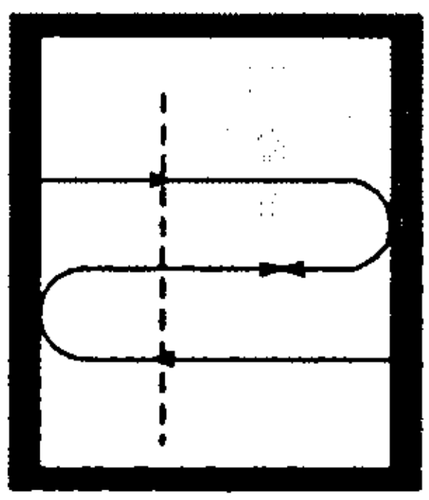
Problema 45

Dos nadadores se lanzan simultáneamente al encuentro desde los bordes opuestos de una piscina cuadrada; se encuentran a 4 m del borde más cercano, continúan nadando y al llegar a los bordes, vuelven inmediatamente, encontrándose esta vez a 2 m del otro borde. ¿Estoy seguro que puedes calcular los metros que mide, cada lado de la piscina?

Resolución

Muchos problemas, tal es este caso, aparentan dificultad en su resolución. Frente a un problema de esta naturaleza debemos buscar diferentes caminos que nos conduzcan a la resolución, puesto que hay muchos. No hay reglas únicas para resolver un problema, las reglas sólo caben en los ***algoritmos****.*

Veamos la resolución de este problema



• De la partida hasta el primer encuentro, entre ambos cubren un ancho de la piscina.

• De la partida hasta el segundo encuentro, entre ambos cubren 3 anchos de la piscina.

• De lo anterior se deduce, que desde la partida hasta el segundo encuentro, cada uno recorre 3 veces lo que recorrieron hasta el primer encuentro. Esto es, el nadador A recorrió **3×4 = 12** m. Quitándole 2 m de su recorrido nos quedamos con el ancho de la piscina, que sería **12 – 2 = 10** m

(Intenta resolver por otros métodos)

Rpta: 10 m

Problema 46

En el aula de quinto año hay 54 estudiantes, entre hombres y mujeres. A 1/4 de los varones les gusta Historia. También se ha sabido que a los 4/7 de los varones les encanta Razonamiento Matemático. ¿Cuántas mujeres estudian en el aula?

Resolución

Muchos estudiantes tienen la equivocada idea de que las ecuaciones "resuelven" todos los problemas. Este problema por ejemplo no requiere de ella. Veamos. Para calcular los varones que gustan Historia debemos "sacar" la cuarta parte al número de varones. Para calcular, los que gustan Razonamiento debemos "sacar" la sétima parte al número de varones. De ambas precisiones se deduce que el número de varones tiene cuarta y sétima partes. ¿Qué números tienen cuarta y sétima partes? Pues, 28; 56; 84;... etc. Pero el número de varones no puede sobrepasar 54, por lo tanto son 28 varones y **54 – 28 = 26** mujeres. ¿Qué te pareció?

Rpta: 26

Problema 47

Dos confeccionistas deben coser el mismo número de pantalones. El primero de ellos cose 8 pantalones por día y el segundo, 10 pantalones por día. El primero ha empezado 4 días antes que el segundo. ¿Cuántos días trabajó cada uno?

Resolución

En 4 días el primero ha sacado una ventaja de **4×8 = 32** pantalones. Cuando el segundo comienza a trabajar por cada día hace **10 – 8 = 2** pantalones más que el primero, que en **32÷2 = 16** días habrá descontado la ventaja que llevaba el primero. Por lo tanto, el se-

gundo trabajó 16 días y el primero 16 + 4 = 20 días.

Rpta.: 20 días

Problema 48

Un artesano pensó elaborar 120 adornos en 15 días, pero tardó 5 días más por trabajar 2 horas menos por día. ¿Cuántas horas trabajó por día?

Resolución

Pensó elaborar **120 ÷ 15 = 8** adornos por día, pero tardó **15 + 5 = 20** días para elaborar los 120 adornos, entonces elaboró **120 ÷ 20 = 6** adornos por día. Si por trabajar dos horas menos por día elabora dos adornos menos por día, entonces para hacer 6 adornos por día trabajó 6 horas diarias.

Rpta.: 6 horas

Problemas Propuestos

1. En el conjunto de los números enteros se define la operación simbolizada por *, en los siguientes términos:

$$a * b = (a + 1)(b + 1)$$

Hallar: $1 * [2 * (3 * 4)]$

A) 128 **B)** 24 **C)** 48 **D)** 96 **E)** 40

2. Si $M^* = m + \frac{1}{m}$ ***para*** $m \neq 0$, ***hallar*** $(2^*)^*$

A) $\frac{5}{2}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{25}{4}$ **D)** $\frac{14}{19}$ **E)** $\frac{29}{10}$

3. Si $x^3 \square y^2 = x^2 + y^3$ ***hallar z en:***

$$z \square 25 = 134 \quad (z \in \mathbb{R})$$

A) 3 **B)** 9 **C)** 27 **D)** 1/3 **E)** 1/9

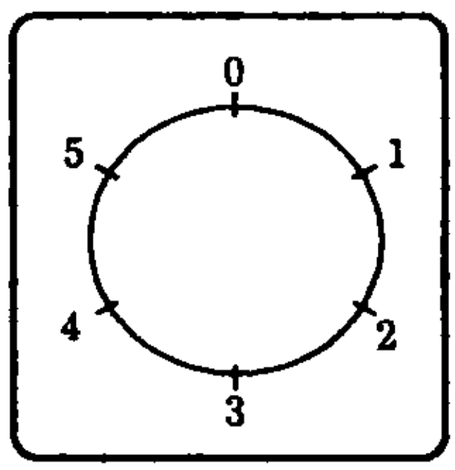
4. Para todo $n \in \mathbb{Z}$ ***definimos S(n) como la cantidad de cifras que se necesita para escribir desde 1 hasta n. Hallar S(300)***

A) 900 **B)** 720 **C)** 600
D) 741 **E)** 792

5. En el gráfico adjunto, definimos dos operaciones siguientes:

$\lceil \overline{a} \rceil$ = ***Girar de cero a unidades en sentido horario. Ejemplo:***

$\lceil \overline{2} \rceil = 2$; $\lceil \overline{7} \rceil = 1$



$\lceil \overline{b} \rceil$ = ***Girar de cero b unidades en sentido antihorario. Ejemplo:*** $\lceil \overline{2} \rceil = 4$

Hallar el valor de E, en:

$$E = \lceil \overline{3} + \overline{2} \rceil + \lceil \overline{20} + \overline{30} \rceil$$

A) 57 **B)** 52 **C)** 36 **D)** 6 **E)** 7

6. Según las operaciones definidas en el problema anterior, indicar, ¿cuáles de las siguientes igualdades es siempre verdadera (V) y cuáles, falsa (F)

a) $\lceil \overline{60} = \overline{120} \rceil$

b) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, $\forall A, B \in \mathbb{N}$

c) $\overline{A} = \overline{A}$, $\forall A \in \mathbb{N}$

d) $\overline{B} \leq 5, \forall B \in \mathbb{N}$

e) $\overline{A} \geq \overline{A}, \forall A \in \mathbb{N}$

A) VVFVF **B)** VFFVF **C)** FVFVF
D) VVVVF **E)** VVFFF

7. En $\mathbb{Z}^+$ definimos (n) como el número de múltiplos de 5 menores que n. Hallar (90) + (150)

A) 40 **B)** 46 **C)** 24 **D)** 180 **E)** 100

8. Se define en $\mathbb{Q}^+$ una operación simbolizada por . Se muestra algunas de las operaciones:

$18 \quad 12 = 6 \qquad 15 \quad 40 = 5$

$32 \quad 20 = 4 \qquad 21 \quad 56 = \ldots$

$13 \quad 7 = 1 \qquad 44 \quad 132 = \ldots$

Señalar la suma de los números que completa la tabla:

A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

9. En $\mathbb{R}$ definimos la operación simbolizada por θ, mediante la siguiente regla:

$$m^n \theta n^m = \frac{m^2+n^2}{m+n}$$

Calcular: $3^{2^{-2^{-1}}} \theta 2^{2^{-1}.3^{2^{-1}}}$

A) $5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ **B)** $5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

C) $2\sqrt{5}+\sqrt{3}$

D) $2\left(\sqrt{2}+1\right)$ **E)** $5\left(1+\sqrt{2}\right)$

10. $\forall x, a, b, c \in \mathbb{R}$, definimos:

$$P\left(\frac{x}{a,b,c}\right) = ax^2 + bx + c$$

Hallar (m + n + p) si

$$P\left(\frac{x-1}{m,n,p}\right) \equiv P\left(\frac{x+1}{1,2,3}\right)$$

A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

11. Sea F(x) = 2F(x −1) $\forall x \in \mathbb{Z}$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa, si F(0) = 1

A) F(3) = F(1) · F(2)
B) F(1) = F(3) ÷ F(2)
C) F(3) = F(4) ÷ F(1)
D) F(2) = F(4) + F(1)
E) F(4) = [F(1)]⁴

12. Sea la operación definida en N y simbolizada por θ, que consiste en:

$3 \theta 5 = 3 + 4 + 5$

$1 \theta 2 = 1 + 2$

En general:

$a \theta b = a + (a+1) + \ldots + b \quad (\text{para } b > a)$

Hallar:

$2 \theta 10 + 5 \theta 15$

A) 25 **B)** 32 **C)** 64 **D)** 146 **E)** 164

13. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, definimos la operación:

$\boxed{n} = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots - n$ *si n es par*

$\boxed{n} = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + n$ *si n es impar*

Hallar: $\boxed{99} + \boxed{100}$

A) 100 **B)** 50 **C)** –50
D) 0 **E)** 199

14. Para todo entero A y B y para todo entero positivo M, se define:

$$A \equiv B(\text{mód.}M) \Leftrightarrow A = \overset{o}{M} + r \wedge B = \overset{o}{M} + r$$

De las siguientes afirmaciones indique la que es falsa.

A) $20 \equiv 8$ (mód. 6)
B) $100 \equiv 1000$ (mód. 9)
C) $35 \equiv 125$ (mód. 5)
D) $15 \equiv 1$ (mód. 7)
E) $16 \equiv 8$ (mód. 5)

15. Sea A = {D, L, M, m, J, V, S} el conjunto de días de la semana, donde cada día está representado por su inicial. Definimos una operación de $A \times N \to A$ mediante la siguiente regla: $a * n = b$, donde b es el día de la semana n días posteriores a a. Hallar el resultado de la siguiente operación.

$$[(L*24)*39]*100$$

A) L **B)** M **C)** m **D)** J **E)** S

16. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{9}} = x^x$ y $\frac{1}{9} \neq x$ **También**

$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = m^m$ y $\frac{1}{4} \neq m$ **sabiendo que** $x \square m = \frac{5}{6}$

Calcular: $\dfrac{0,1 \square 0,2 \square 0,3}{0,4 \square 0,5 \square 0,6}$

A) $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** 0,9 **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{4}{5}$

17. Si un cierto número dividido entre 6 da un residuo 3 y dividido entre 8 da residuo 5. Este número es: (SM – '78)

A) 22 **B)** 21 **C)** 14 **D)** 13 **E)** 56

18. Efectuar: $\sqrt{11^3 + 123 \times 10^4 + 42 \times 10^2}$

e indicar la suma de cifras del resultado

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 11

19. El dividendo de una división es 1081; el cociente y el resto son iguales y el divisor es doble del cociente. Hallar la suma de las cifras del divisor:

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 8 **E)** 7

20. Calcular el valor de:

$$\sqrt[4]{\frac{15627 \times 15623 + 4}{622 \times 628 + 9}}$$

A) $\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{5}$ **C)** 1 **D)** 5 **E)** 25

21. Hallar:

$$\sqrt[16]{2(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)+1}$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 8 **E)** 9

22. Efectuar:

$$[12 \times \underbrace{1010101\ldots01}_{2n+1 \text{ cifras}}] + [12 \times \underbrace{101010\ldots01}_{2n+1 \text{ cifras}}]$$

e indicar la suma de cifras del resultado.

A) $3(2n+1)$ **B)** $6n+6$ **C)** $n+2$
D) n^2 **E)** $n+10$

23. Calcular "x · y · z"

Si se cumple: $\overline{x74y} + \overline{z7y} + \overline{5yx2} = \overline{vvx68}$

A) 24 **B)** 32 **C)** 45 **D)** 30 **E)** 60

24. Cuál, es el valor de A + B si $\overline{73AB} + 1162 = \overline{AB47}$

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

25. Si $\overline{43a5} + \overline{127b} + \overline{c52} + 353 = 6408$

Calcular: $(a^2 + b^2 + c^2)$

A) 80 **B)** 82 **C)** 84 **D)** 86 **E)** 88

26. Si $a + b = 15$;

Calcular: $\overline{ab} + \overline{ba} + \overline{aa} + \overline{bb}$

A) 200 **B)** 300 **C)** 320
D) 330 **E)** 340

27. Un número tiene tres cifras. Si sumamos las cifras y elevamos al cubo, resulta el mismo número.

Cuál es el producto de las cifras del número?

A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 18

28. A un número de tres cifras se le resta el mismo número pero con las cifras invertidas y se obtiene $\overline{AB4}$.

¿Cuál es el valor de A + B?

A) 9 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 18

29. Si $\overline{ABC} \cdot A = 1912$; $\overline{ABC} \cdot B = 3346$ ***y*** $C \cdot \overline{ABC} = 3824$; ***determinar el valor de*** $\overline{ACB} \times \overline{ABC}$

A) 232786 **B)** 234876 **C)** 248752
D) 234626 **E)** 376286

30. Fortunio no había practicado la multiplicación para el examen bimestral. Tantos eran los desaprobados del aula que el profesor les dio la oportunidad de obtener la máxima nota 20, si es que realizaban correctamente la multiplicación $\overline{ABCDE7} \times 5$. ***Fortunio se pasó todo el examen mirando el techo, lo único que atinó fue copiar más abajo el multiplicando, pero tan distraído estaba que puso el 7 delante en lugar de poner al final***

Al recibir su examen ya calificado, Fortunio tenía 20 de nota. ¿Puedes decir cuánto vale A + B + C + D + E?

A) 25 **B)** 20 **C)** 27 **D)** 28 **E)** 29

31. ¿Cuál es el menor número que multiplicado por 7 nos da un producto formado solamente por cifras 3?

A) 4349 **B)** 4339 **C)** 4379
D) 4229 **E)** 47619

32. Si $\overline{ab} \times \overline{ba} = \overline{5da}$.

Hallar $d - (a + b)$

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 5

33. En qué cifra termina 34^{400}

A) 4 **B)** 6 **C)** 2 **D)** 8 **E)** 0

34. ¿Cuál es el resto de dividir

$14 \times 24 \times 34 \times 44 \times \ldots \times 324$ ***entre 5?***

A) 4 **B)** 3 **C)** 0 **D)** 1 **E)** 2

35. ¿Cuál es el resto de dividir.

$N = 14 \times 24 \times 34 \times 44 \times 54 \times \ldots \times 164$ ***entre 10?***

A) 6 **B)** 8 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

36. Sea E(n)= residuo de dividir "n" entre 5; calcular: $E(4444^2) + E(7777^2)$

A) 15 B) 5 C) 6 D) 7 E) 0

37. Hallar la suma de las 4 últimas cifras del resultado de efectuar:

$$[1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \ldots . \times 97 \times 98]^2$$

A) 15 B) 5 C) 6 D) 7 E) 0

38. Hallar el resultado de la siguiente multiplicación:

$(79-1)(78-2)(77-3) \ldots (3-77)(2-78)(1-79)$

A) 80^{10} B) -80^{10} C) -73^{50}
D) 1 E) 0

39. Si $\ldots 129 \times \overline{abc} = \ldots 454$

$\ldots 457 \times \overline{np} = \ldots \overline{36c}$

Calcular: $(p+n) + a \cdot b$

A) 31 B) 20 C) 21 D) 29 E) 32

40. Si $N \times 375 = \ldots 625$; $N \times 427 = \ldots 021$

Hallar las tres últimas cifras de $N \times 156$

A) 235 B) 366 C) 234
D) 188 E) 422

41. Si cada asterisco representa una cifra y

$$\overline{abc} - \overline{cba} = **3$$

$$\overline{abc} + \overline{cba} = **31$$

¿Cuánto le falta a $\overline{abc}$ *para 1000?*

A) 32 B) 38 C) 39 D) 42 E) 35

42. Al multiplicar $\overline{abc9}$ *por* $\overline{nn}$*, el producto termina en 17495. Hallar la suma de cifras de* $\overline{abc9}$.

A) 14 B) 18 C) 16 D) 24 E) 22

43. En la siguiente multiplicación, cada asterisco representa un dígito. ¿Cuál es la suma de cifras del producto?

$$\begin{array}{r} *35\times \\ \quad *3 \\ \hline **05 \\ **4* \\ \hline *1*5* \end{array}$$

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

44. Cada asterisco sustituye una cifra. ¿Cuál es la suma de cifras del producto?

$$\begin{array}{r} 4* \quad \times \\ \quad ** \\ \hline *** \\ **3 \\ \hline 3*** \end{array}$$

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

45. En esta multiplicación, las cifras han sido sustituidas por asteriscos. Reconstruye la multiplicación y marca entre las alternativas la que corresponda a la suma de cifras del producto.

$$\begin{array}{r} *1*\times \\ 3*2 \\ \hline *3* \\ 3*2* \\ *2*5 \\ \hline 1*8*30 \end{array}$$

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

46. Reconstruir la siguiente división y dar como respuesta la suma de las cifras del dividendo

```
* * * * * * | * *
* * *        *80*
---------
    * *
    * *
    ---
      * * *
      * * *
      -----
      * * 1
```

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

47. En la siguiente multiplicación, cada asterisco representa una cifra. Hallar la suma de cifras que faltan en el producto total.

```
      a b c a ×
          a c
      -------
      * * * 6
    * * * *
  -----------
  1 * * 5 * 6
```

A) 15 B) 18 C) 17 D) 16 E) 19

48. Reconstruir la multiplicación.

```
    2 3 5 ×
      * *
    -----
    * * * *
  * * * *
  -------
  * * 5 6 *
```

Dar la suma de cifras del multiplicador

A) 14 B) 16 C) 18 D) 19 E) 12

49. Esta división es exacta, pero el que la efectuó, a propósito reemplazo las cifras por asteriscos con la vana intención de que no puedas descubrirlas. Pero yo sé que lo harás. Lo demostrarás marcando la suma de las cifras el cociente.

```
* * * * 7 | * *
  * *      2 * *
  -----
  4 * *
  * * *
  -----
      * *
      * *
      ---
```

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

50. Descifra la siguiente multiplicación y alternativa que indica la suma de cifras del segundo producto parcial.

```
        * * * * ×
            x y
      ---------
      a b h m y
      ---------
      y a x y
    -----------
    x d x d p y
```

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

51. En la siguiente operación de división los dígitos han sido reemplazados por letras. La misma letra está en el lugar del mismo dígito todas las veces que aparece:

```
* * * * | * A
* B      A * *
-----
  * * *
  D * *
  -----
    D * *
    E * *
    -----
      D E
```

Dar la suma de cifras del cociente.

A) 20 B) 18 C) 17 D) 19 E) 21

52. Esta es una división exacta. Todas las cifras se han borrado, sólo han quedado asteriscos en su lugar. ¿Podrás descubrir la suma de cifras del cociente?

```
* * * * * * * * * | * * *
* * * *           | * * * 7 *
-----             |
    * * * *
    * * *
  -------
      * * *
      * * *
    -------
      * * * *
      * * * *
    -------
```

A) 33 **B)** 34 **C)** 35 **D)** 32 **E)** 31

53. En una prueba de 10 preguntas, cada respuesta acertada vale 4 puntos a favor y cada respuesta equivocada vale 3 puntos en contra. Las preguntas no contestadas no tienen puntaje. Si habiendo contestado las 10 preguntas, Pedro ha obtenido 12 puntos, ¿cuántas preguntas contestó equivocadamente?

A) 3 **B)** 8 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4

54. Un comerciante gastó 171 en igual número de cuadernos y borradores. Si cada borrador costó S/. 1 y S/. 2 cada cuaderno. Entonces el total de artículos comprados es:

A) 100 **B)** 114 **C)** 57
D) 168 **E)** 120

55. ¿En cuánto aumentaría el producto de 36 por 28, si el multiplicador aumenta en 5 unidades?

A) 120 **B)** 130 **C)** 140
D) 150 **E)** 180

56. ¿En cuánto aumenta el producto de 20 por 30 si cada uno de los factores aumenta en 7 unidades

A) 248 **B)** 356 **C)** 360
D) 399 **E)** 380

57. Dos jugadores acuerdan que después de cada partida, el perdedor pague al otro S/. 600. Después de 30 juegos uno de ellos ha ganado S/. 72.00. ¿Cuántos juegos lleva perdiendo el otro?

A) 4 **B)** 20 **C)** 18 **D)** 21 **E)** 12

58. Una señora vendió 120 naranjas por S/. 67. Si algunas las vendió a 0,60 soles la unidad y las restantes a 0,50 soles la unidad. ¿Cuántas vendió a 0,50 soles?

A) 40 **B)** 50 **C)** 60 **D)** 70 **E)** 80

59. Un microbusero recaudó 200 soles, en uno de sus recorridos, gastado 120 boletos de pasaje entero y medio pasaje; los primeros cuestan S/. 2 y los últimos S/. 1. Se desea averiguar cuántos de los pasajeros eran universitarios, sabiendo que superan en 8 al número de niños y éstos también pagan medio pasaje al igual que los universitarios.

A) 16 **B)** 20 **C)** 22 **D)** 24 **E)** 28

60. Una canasta contiene 60 frutas entre manzanas y peras. Cada manzana pesa 350 gramos y cada pera 300 gramos. Si la canasta pesa en total 22 kg y además, las frutas pesan 18 kg más que la canasta; ¿cuántas de las frutas son peras?

A) 10 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 24 **E)** 30

61. Un automovilista recorrió 140 km en 20 horas, viajando a 10 km/h los primeros kilómetros y a 5 km/h los

últimos. ¿Cuántas horas viajó a 5 Km/ h?

A) 10 horas **B)** 12 horas **C)** 14 horas
D) 15 horas **E)** 16 horas

62. Una madera de 7,4 m de longitud, se desea dividir en pedazos de 50 cm y 40 cm, de modo que haya un total de 18 pedazos. ¿Cuántos saldrán de 50 cm?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 14 **E)** 16

63. En una granja se observa 424 patas y 180 cabezas, entre gallinas y cerdos. ¿Cuántos de estos animales son cerdos?

A) 32 **B)** 34 **C)** 44 **D)** 36 **E)** 38

64. En una prueba de examen un alumno gana 4 puntos por cada respuesta correcta y pierde 1 punto por cada equivocación. Después de contestar 60 preguntas obtienen 60 puntos. ¿Cuántas contestó correctamente?

A) 36 **B)** 30 **C)** 28 **D)** 22 **E)** 24

65. A un peón se le contrató 2 meses de 30 días, con la condición que se le abonaría S/. 60 por cada día que trabaje, y que él entregaría S/. 30 por cada día que no trabaje.

Se desea averiguar los días que trabajó en los casos siguientes:

a) Si recibió S/. 1800

b) Si no recibió nada

c) Si él tuvo que entregar S/. 180

Dar como respuesta la suma de los resultados

A) 60 **B)** 56 **C)** 68 **D)** 72 **E)** 78

66. Dos personas han recorrido en total 64 metros, dando entre los dos 100 pasos. Si cada paso del primero mide 70 cm y cada paso del segundo, 50 cm, ¿cuántos pasos más que el segundo ha dado el primero?

A) 10 pasos **B)** 40 pasos **C)** 20 pasos
D) 24 pasos **E)** 25 pasos

67. Una prueba consta de 70 preguntas. Cada respuesta correcta vale 4 puntos, cada respuesta equivocada es un punto en contra y cada respuesta en blanco vale cero puntos. Un estudiante que ha rendido dicha prueba, ha obtenido 95 puntos, habiéndose comprobado que las respuestas buenas fueron el doble de las que dejó en blanco. ¿Cuántas equivocaciones cometió?

A) 30 **B)** 28 **C)** 27 **D)** 25 **E)** 24

68. Un poste de 40 metros ha sido pintado de dos colores, los primeros metros de verde y los restantes, de azul, gastando S/. 2 240 en la pintura. La pintura verde necesaria para un metro de poste cuesta S/. 60 y la pintura azul S/. 50. ¿Cuántos metros están pintados de verde?

A) 20 m **B)** 22 m **C)** 24 m
D) 25 m **E)** 26 m

69. Se ha mezclado arroz de S/. 1,2 el kilogramo con arroz de S/. 1,00 el kilogramo, obteniéndose 50 kg de mezcla. Cada kilogramo de mezcla se ha vendido en S/. 1,35 ganando el 25% del costo. ¿Cuántos kilos han entrado de la primera clase?

A) 18 kg **B)** 20 kg **C)** 22 kg
D) 24 kg **E)** 25 kg

70. Un tren con 325 pasajeros tiene que recorrer 150 km. Los pasajeros de primera clase pagan 4 céntimos por kilómetro y los de segunda, 2 céntimos.

¿Cuántos pasajeros iban de primera clase, si después del viaje se ha recaudado 12960 soles?

A) 125 **B)** 220 **C)** 100
D) 145 **E)** 107

71. En una fábrica trabajan 90 obreros, hombres y mujeres, y los jornales de un mes han importado 4 758 soles. El jornal del hombre es de S/. 21 y el de la mujer de S/. 15. Durante el mes han trabajado 26 días. ¿Cuántos obreros son hombres?

A) 70 **B)** 68 **C)** 72 **D)** 73 **E)** 80

72. Un negociante compró 120 calculadoras. Una parte de ellas las vendió ganando 30 soles en cada una y las restantes, ganando 36 soles también por cada una. Si la venta de todas las calculadoras le han producido una utilidad de 3930 soles; ¿Cuántas vendió ganando 30 soles?

A) 60 **B)** 65 **C)** 68 **D)** 76 **E)** 75

73. En una granja se puede contar 80 cabezas y 300 patas entre conejos y pavos. ¿Cuántos son conejos?

A) 10 **B)** 20 **C)** 50 **D)** 70 **E)** 60

74. Hemos enviado 360 útiles escolares entre cuadernos y libros con un peso de 163 kg. Cada libro pesa 600 gramos y cada cuaderno, 350 gramos. ¿Cuántos cuadernos y cuántos libros hemos enviado?

A) 216 y 144 **B)** 200 y 160
C) 121 y 239 **D)** 150 y 210
E) 212 y 148

75. Un obrero ha trabajado durante 36 días. Los primeros días le pagaron 30 soles de jornal, mientras que los días restantes, 35 soles el jornal. Por los 36 días recibió 1185 soles. ¿Cuántos días trabajó con 30 soles de jornal?

A) 11 d **B)** 12 d **C)** 13 d
D) 15 d **E)** 16 d

76. En una granja se tiene una cierta cantidad de gallinas y conejos. En total suman 48 cabezas y 120 patas. ¿Cuántos son los conejos?

A) 20 **B)** 15 **C)** 12 **D)** 28 **E)** 6

77. En un almacén de arroz hay inicialmente cierto número de sacos de dicho producto. La primera semana se vendió la mitad de los sacos, la segunda semana se vendió 90 sacos, la tercera semana se vendió tanto como no se vendió, quedando en el almacén 500 sacos de arroz. ¿Cuántos sacos había inicialmente?

A) 2 180 **B)** 2 810 **C)** 2 100
D) 2 800 **E)** 1 200

78. Cecilia, cada día gasta la mitad de lo que tiene más S/. 20. Si gastó todo en 4 días. Su promedio de gasto por día es:

A) S/. 200 **B)** S/. 300 **C)** S/. 150
D) S/. 20 **E)** S/. 60

79. En un camión hay 6 143 manzanas. A cada cliente se vende la mitad de lo que hay de manzanas en ese momento y media manzana más; si después de atender al último cliente sólo quedan 2 manzanas. ¿Cuántos clientes compraron?

A) 9 **B)** 10 **C)** 11
D) 12 **E)** Más de 12

80. Un pozo lleno de agua, se agota en 4 horas. Si en cada hora se agota 1/2

metro por debajo de su mitad, ¿Cuál es la capacidad del pozo, sabiendo que es cilíndrico y que el área del fondo es 4 m²?

A) 16 m³ **B)** 28 m³ **C)** 60 m³
D) 72 m³ **E)** N.A.

81. A un número se le extrae la raíz cuadrada después de agregarle 1, al resultado se multiplica por 3 y se obtiene 12. ¿Cuál es el número?

A) 10 **B)** 15 **C)** 17 **D)** 24 **E)** 7

82. Un pozo de agua se vacía en 3 horas. Si en cada hora se va la mitad de lo que había en esa hora más un litro. ¿Cuánto litros tenía inicialmente?

A) 10 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 18

83. Cada vez que Jorge visita a su tía ésta le duplica el dinero que él lleva. El sobrino siempre agradece con S/. 40 la bondad de su tía. Un día Jorge queriendo ganar más dinero, realizó 4 visitas sucesivas a la bondadosa tía; pero tal fue la sorpresa de Jorge que al cabo de la cuarta visita se quedó sin un sol. ¿Cuánto llevó Jorge al empezar las visitas?

A) 30 **B)** 35 **C)** 37,5
D) 39 **E)** 41

84. Se tiene 48 fósforos divididos en tres grupos diferentes. Si del primer grupo paso al segundo tantos fósforos como hay en éste, luego del segundo paso al tercero tantos como hay en el tercero y de éste paso al primero tantos fósforos como hay ahora en el primero, resulta que habrá el mismo número de fósforos en cada grupo. ¿Cuántos fósforos había al principio en cada grupo?

A) 20, 16, 12 **B)** 20, 14, 14
C) 20, 15, 13
D) 22, 14, 12 **E)** 18, 16, 14

85. Una vendedora lleva paltas al mercado y vende la mitad de las que tenía más media palta; deja encargada la mitad de las que le quedaba más media palta, obsequia la mitad del nuevo resto más media palta y todavía le sobran 3. ¿Cuántas paltas llevó al mercado sabiendo que no partió ninguna palta?

A) 35 **B)** 19 **C)** 31 **D)** 27 **E)** 17

86. Se debe llenar de agua un reservorio soltando agua durante un determinado tiempo. Si abro el grifo que vierte 42 litros por minuto durante el tiempo indicado, faltaría 312 litros para llenar. Si abro el grifo de 54 litros por minuto durante el mismo tiempo, se rebalsarían 456 litros. ¿Cuál es la capacidad del reservorio'

A) 2 000 *l* **B)** 2 400 *l* **C)** 2 800 *l*
D) 3 000 *l* **E)** 3 600 *l*

87. Ricoto le comenta a su fiel Vladimico:

— Si pagamos 24 soles por día al nuevo cocinero, estaríamos 180 soles por debajo del presupuesto asignado. Vladimico, mostrando aires de bonachón le sugiere.

— Te sugiero 36 soles diarios y sólo nos excederemos en 180 soles al presupuesto asignado. ¿Cuál es el presupuesto que tiene Ricoto para el cocinero?

A) 800 soles **B)** 840 soles **C)** 900 soles
D) 950 soles **E)** 1000 soles

88. Los socios de un club se reunieron en su local principal. Las bancas que disponen son todas de la misma capacidad. Si los asistentes se sientan de 5 en 5, faltarían 6 bancas para que todos estén sentados. Por lo que decidieron sentarse 7 en cada banca y así había espacio para 18 socios más. ¿Cuántos asistieron a la reunión?

A) 120 **B)** 1274 **C)** 130
D) 136 **E)** 150

89. Un recipiente contiene 46,2 l de agua pura. En éste, se desea preparar una mezcla salina de una determinada concentración. Si se vierte la solución que contiene 7 gramos por litro, habría que agregar 12 gramos de sal demás para conseguir la concentración deseada, en cambio, si se agrega la misma cantidad de la solución de 9 gramos por litro, la mezcla tendría 34 gramos de más de sal. ¿Con qué concentración se desea preparar la mezcla?

A) 2 *g/l* **B)** 2,3 *g/l* **C)** 2,4 *g/l*
D) 2,5 *g/l* **E)** 2,8 *g/l*

90. Gabino ha comprado 1092 cuadernos a 4 soles cada uno. Por cada docena le regalaron uno. ¿A qué precio debe vender el ejemplar, si desea ganar 1584 soles regalando 2 cuadernos por cada docena?

A) S/. 8,00 **B)** S/. 9,00 **C)** S/. 6
D) S/. 10.00 **E)** S/. 12,00

91. Para comprar un computador, un grupo de personas han reunido 2700 soles aportando por igual, sin embargo, el computador cuesta 3060 razón por la cual, cada uno tendrá que aportar 8 soles más. ¿Cuánto habían aportado inicialmente?

A) 50 soles **B)** 55 soles **C)** 60 soles
D) 65 soles **E)** 70 soles

92. En uno de sus recorridos, un ómnibus recaudó 144 soles en pasajes. El pasaje es único e igual a 4 soles, sin importar el lugar donde suba o baje el pasajero. Llegó al paradero final con 8 pasajeros. ¿Con cuántos salió del paradero inicial si durante el trayecto por cada dos pasajeros que bajaban subía uno?

A) 14 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 28 **E)** 22

93. El profesor Geómetras siempre está jalando agua para su molino, o mejor dicho, para su geometría. Durante el ensayo para el desfile escolar, él estuvo encargado de entrenar un batallón. Hizo formarlos con tantas filas como columnas, sin faltar ni sobrar un escolar. Enseguida separó la formación en dos rectángulos, sin mover un solo escolar, de modo que el rectángulo mayor tenía 36 escolares más que el otro. ¿De cuántos escolares está formado el batallón del profesor Geómetras?

A) 324 **B)** 225 **C)** 144
D) 361 **E)** 289

94. Encontrar un número de 3 cifras diferentes, de suerte que si se le resta el número invertido, la diferencia esté conformada por las mismas cifras del número.

Indicar el producto de las tres cifras del número.

A) 120 **B)** 130 **C)** 140
D) 150 **E)** 180

CLAVES DE RESPUESTAS

PÁGINA 74	1	2	3	4
	D	C	A	E

PÁGINA 78	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	D	C	A	B	E	E	B

PÁGINA 82	1	2	3	4	5	6	7	8
	C	B	D	A	D	E	C	A
	9	10	11	12				
	C	D	B	C				

PÁGINA 86	1	2	3	4	5	6	7	8
	A	C	D	D	A	C	C	B

PÁGINA 89 - 90	1	2	3	4	5	6	7
	D	B	C	C	A	E	A

PÁGINA 93 - 94	1	2	3	4	5	6	7
	B	C	E	D	C	C	D

PÁGINA 95 - 96	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	D	B	E	C	E	A	B

PÁGINA 100	1	2	3	4	5	6	7	8
	A	A	E	E	D	D	A	A
	9							
	E							

PÁGINA 102	1	2	3	4
	B	B	B	B

PÁGINA 106	1	2	3	4	5	6
	B	A	D	E	A	C

PÁGINA 108	1	2	3	4	5	6
	B	A	B	D	C	E

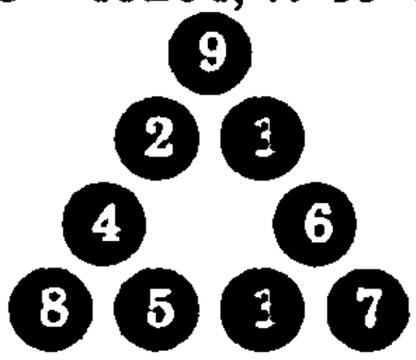
PROBLEMAS PROPUESTOS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	E	C	E	E	B	B	D	A	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	E	D	E	C	B	B	B	D	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
E	B	E	D	C	D	C	C	A	B
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
E	A	B	D	A	B	E	E	D	D
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	E	B	C	C	D	C	B	A	B
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A	A	E	C	E	D	E	B	D	C
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
B	B	A	E	E	B	D	C	B	E
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
E	B	D	E	D	C	A	C	C	C
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
B	C	C	D	C	D	C	E	D	C
91	92	93	94						
C	E	A	E						

Retos al ingenio

1. $208 \times 208 = 43264$, $\therefore\ 43 \times 26 = 1118$

2.



3. $2 \times 2 \times 2 - 2 = 6$

$3 \times 3 + 3 \div 3 = 10$

$4 \times 4 \times 4 \div 4 = 16$

$5 \times 5 - 5 \div 5 = 24$

4. 19 + 6 + 25 = 50: yoyó, lentes y osito

5. 12×483 = 5796; 39×186 = 7254

4×1738 = 6952; 4×1963 = 7852

6.

	3	5	
7	1	8	2
	4	6	

7. 25 + 35 + 32 = 92

8. 13

9. Gané 20 soles

10. 663 + 73 = 736

Divertijo 1: *Carrito y 110*

Carl Friedrich Gauss

Nació el 30 de Abril 1777 en Brunswick, (Ahora Alemania). Cuando Gauss tenía diez años de edad, su maestro solicitó a la clase que encontrara la suma de todos los números comprendidos entre uno y cien. El maestro, pensando que con ello la clase estaría ocupada algún tiempo, quedó asombrado cuando Gauss, levantó en seguida la mano y dio la respuesta correcta. Gauss reveló que encontró la solución usando el álgebra, el maestro se dio cuenta de que el niño era una promesa en las matemáticas.

Hijo de un humilde albañil, Gauss dio señales de ser un genio antes de que cumpliera los tres años. A esa edad aprendió a leer y hacer cálculos aritméticos mentales con tanta habilidad que descubrió un error en los cálculos que hizo su padre para pagar unos sueldos. Ingresó a la escuela primaria antes de que cumpliera los siete años.

A los 12 años, criticó los fundamentos de la geometría euclidiana; a los trece le interesaba las posibilidades de la geometría no euclidiana. A los quince, entendía la convergencia y probó el binomio de Newton. El genio y la precocidad de Gauss llamaron la atención del duque de Brunswick, quien dispuso, cuando el muchacho tenía catorce años, costear tanto su educación secundaria como universitaria. Gauss, a quien también le interesaban los clásicos y los idiomas, pensaba que haría de la filología la obra de su vida, pero las matemáticas resultaron ser una atracción irresistible.

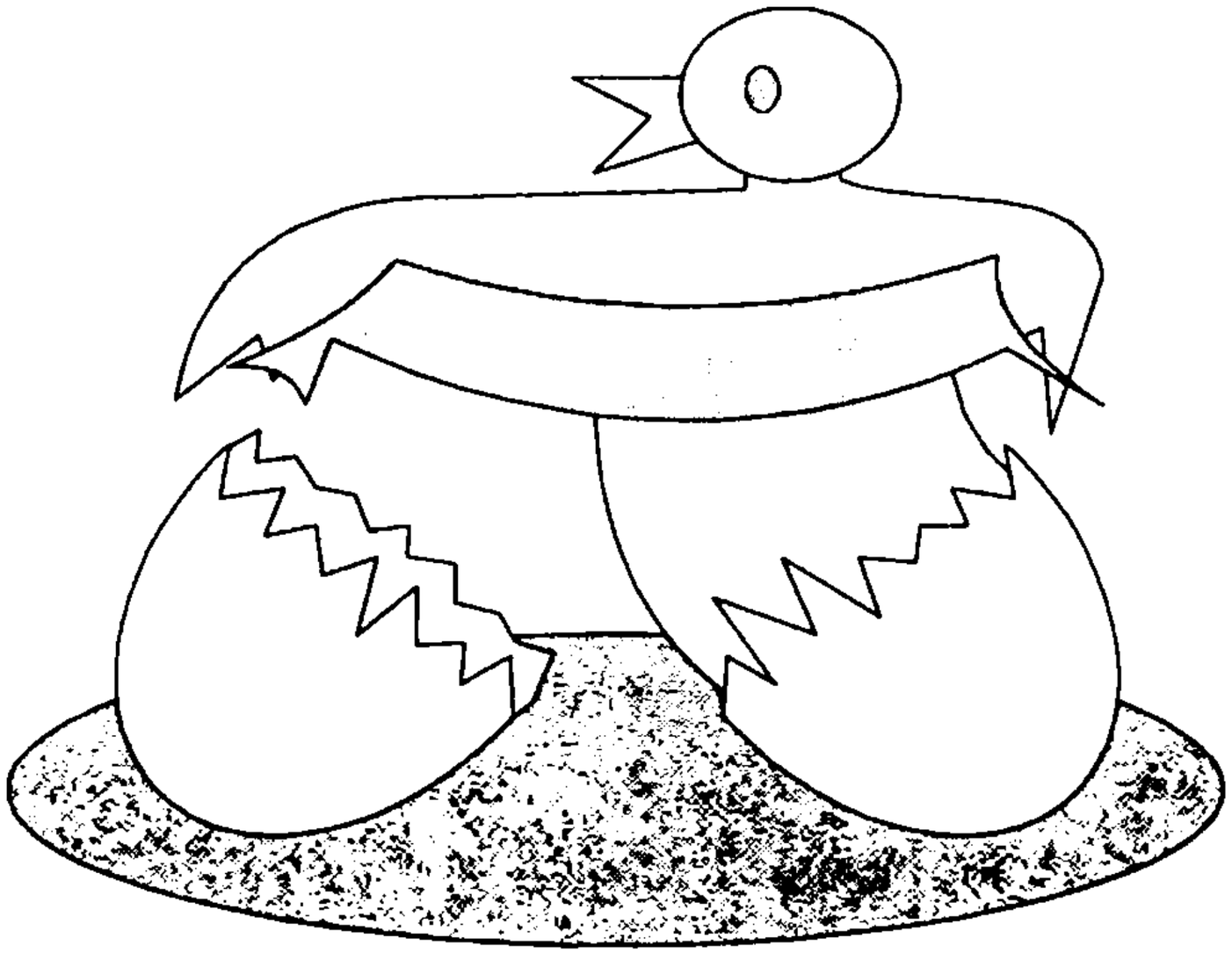
Cuando estudiaba en Gotinga, descubrió que podría construirse un polígono regular de diecisiete lados usando sólo la regla y el compás. Enseñó la prueba a su profesor, quién se demostró un tanto escéptico y le dijo que lo que sugería era imposible; pero Gauss demostró que tenía la razón. El profesor, no pudiendo negar lo evidente, afirmó que también él procedió de la misma manera. Sin embargo, se reconoció el mérito de Gauss, y la fecha de su descubrimiento, 30 de Marzo de 1796, fue importante en la historia de las matemáticas. Posteriormente, Gauss encontró la fórmula para construir los demás polígonos regulares con la regla y el compás.

Gauss se graduó en Gotinga en 1798, y al año siguiente recibió su doctorado en la Universidad de Helmstedt. Las matemáticas no fueron el único tema que le interesó a este hombre; fue también astrónomo, físico, geodesta e inventor. Hablaba con facilidad varios idiomas, e inclusive dominó el ruso a la edad de sesenta años. En 1807 fue nombrado director del observatorio y profesor de astronomía en la Universidad de Gotinga. A principios del siglo XIX, Gauss publicó sus Disquisiciones aritméticas, que ofrecían un análisis lúcido de su teoría de números, comprendiendo las complicadas ecuaciones que confirmaban su teoría y una exposición de una convergencia de una serie infinita. Estudió la teoría de los errores y dedujo la curva normal de la probabilidad, llamada también curva de Gauss, que todavía se usa en los cálculos estadísticos.

En 1833 inventó un telégrafo eléctrico que usó entre su casa y el observatorio, a una distancia de unos dos kilómetros. Inventó también un magnetómetro bifiliar para medir el magnetismo y, con Weber, proyectó y construyó un observatorio no magnético. Tanto Gauss como Riemann, que fue discípulo suyo, pensaban en una teoría electromagnética que sería muy semejante a la ley universal de la gravitación, de Newton. Empero, la teoría del electromagnetismo fue ideada más tarde, en 1873, por Maxwell, aunque Gauss ya poseía los cimientos matemáticos para la teoría. En 1840, las investigaciones de Gauss sobre la óptica tuvieron especial importancia debido a sus deducciones por lo que toca a los sistemas de lentes. A los 77 años, Gauss falleció. Se ha dicho que la lápida que señala su tumba fue escrita con un diagrama, que construyó el mismo Gauss, de un polígono de diecisiete lados. Durante su vida, se reconoció que era el matemático más grande de los siglos XVIII y XIX. Su obra en las matemáticas contribuyó a formar una base para encontrar la solución de problemas complicadísimos de las ciencias físicas y naturales.

Falleció el 23 de Febrero 1855 en Göttingen, Hanover (Ahora Alemania)

3 NÚMEROS RACIONALES



INTRODUCCIÓN

Los cálculos que se realizan en cualquier actividad: comercio, ingeniería, economía, estadística, etc., infaltablemente involucran los números decimales.

Inclusive los números irracionales como $\sqrt{2}$, π y otros, para efectos prácticos que toma como 1,41; 3,14, esto es, sus valores aproximados.

Por consiguiente, cualquier mortal inevitablemente debe saber operar con los números decimales si no quiere que le engañen en las cuentas. El cálculo del IGV pone en apuros a mucha gente que ha descuidado las operaciones con decimales.

Los números racionales son enteros o bien fraccionarios. Los números decimales son la expresión horizontal de una fracción.

Aquí abordaremos una breve teoría de los números racionales y diversas estrategias para la resolución de problemas de fracciones y decimales.

SABERES PREVIOS

Debes saber calcular el MCM de varios números.

Tienes que dominar las operaciones fundamentales. Te recomiendo repasar operaciones con fracciones y decimales. Simplificación de fracciones y conversión de fracción o decimal y de decimal a fracción.

3. NUMEROS RACIONALES

3.1. Fracciones y Decimales

Al dividir un entero entre otro diferente de cero, el cociente resulta o bien entero o bien fraccionario. Por ejemplo, al dividir $\frac{12}{3} = 4$ es entero, mientras que $\frac{3}{2}$ es fraccionario.

Tanto 4 como $\frac{3}{2}$, pueden ser expresados como la división de dos enteros. Todos los números que pueden ser expresados como la división de dos enteros se llaman **números racionales**.

Por lo tanto, el conjunto de los números racionales, denotado por $\mathbb{Q}$, está formado por los **enteros** y los **fraccionarios**.

El número $\frac{15}{3}$ es un racional pero no es fraccionario, ya que representa al entero 5. Por consiguiente no son iguales los términos **número racional** y **número fraccionario**.

El número $\sqrt{2}$ no puede ser racional, porque no hay dos enteros que divididos den el valor de $\sqrt{2}$, por eso se llama irracional. D1

Una fracción es un número de la forma $\frac{a}{b}$, donde a se llama **numerador** y b, **denominador**, con la condición de que b es distinto de cero, porque no es posible dividir entre cero, y a **no** es múltiplo de b, porque si lo fuera $\frac{a}{b}$ sería entero y no fraccionario. Q1

Al dividir el numerador entre el denominador de una fracción, el cociente es un número decimal, de tal suerte que una fracción se puede convertir en decimal y un decimal en fracción. Ejemplos:

- $\frac{7}{4} = 1{,}4$
- $1{,}4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$
- $\frac{2}{3} = 0{,}666..$
- $0{,}\widehat{6} = \frac{2}{3}$

Para convertir de fracción a decimal es suficiente dividir el numerador entre el denominador. La conversión de decimal a fracción lo veremos más adelante.

Q1

Una propiedad interesante de las fracciones es que si se multiplican o se dividen el numerador y denominador de una fracción por un mismo número entero diferente de cero, el valor de la fracción no se altera, se obtiene otra fracción ***equivalente*** *al anterior. Por ejemplo:*

- $\frac{6}{4} = \frac{6\times 8}{4\times 8} = \frac{48}{32} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{48}{32}$
- $\frac{18}{24} = \frac{18\div 6}{24\div 6} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

D1

El $\sqrt{2}$ no es racional.

Vamos a demostrar que no hay dos enteros a y b que divididos den el valor de $\sqrt{2}$.

Usaremos el método de demostración por ***reducción al absurdo****. Esto es, vamos a suponer que sí existen dos números a y b tal que:*

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \qquad (1)$$

(CONTINÚA)

Al dividir el numerador entre el denominador de una fracción, el cociente puede tener un número limitado de cifras decimales o un número ilimitado de cifras decimales. E1

¿Se puede determinar a priori el tipo de decimal que origina una fracción?

Sí. Es posible. No sólo el tipo de decimal que origina, sino, la cantidad de cifras decimales y la cantidad de cifras del período. Depende del denominador de la fracción generatriz. Diremos que una fracción es **generatriz**, cuando no se puede simplificar sus término, o sea, cuando es **irreductible.**

Las fracciones que tienen por denominador una potencia de 10, como 10; 100; 1000; etc, siempre originan un número decimal exacto. D2 *La cantidad de cifras, decimales es igual al número de ceros que tiene el denominador.*

Las fracciones con denominador formado sólo por cifras 9, como 9; 99; 999; etc, originan un número decimal periódico puro. El número de cifras del período es igual a la cantidad de cifras nueve del denominador.

De estas dos observaciones se deduce que, si el denominador de una fracción se puede transformar en una potencia de 10, entonces originará un decimal exacto y si se puede transformar en un número de cifras 9, originará un periódico puro.

Por ejemplo: el denominador de la fracción $\frac{7}{20}$ se puede transformar en una potencia de 10, multiplicando ambos términos por 5: $\frac{7\times5}{20\times5}=\frac{35}{100}=0,35$ y origina un decimal exacto.

El denominador de la fracción $\frac{13}{27}$ se puede transformar en un número de tres cifras 9, multiplicando ambos términos por 37: $\frac{13\times37}{27\times37}=\frac{481}{999}=0,\widehat{481}$ y origina un número decimal periódico puro.

¿Cuándo un denominador se puede transformar en una potencia de 10 ó en un número formando por cifras 9? A1

Además a y b no se pueden simplicar porque no tienen divisores comunes aparte de 1. Elevando al cuadrado (1).

$$\frac{a^2}{b^2}=2$$

De donde. $a^2=2b^2$ *(2)*

Se observa que a es par, entonces, $a=2k\ (k\in\mathbb{Z})$*.Sustituyendo en (2).*

$(2k)^2=2b^2\Rightarrow 4k^2=2b^2\Rightarrow 2k^2=b^2$

Se nota que b es par. Pero si a y b son pares se puede simplificar $\frac{a}{b}$*, lo que contradice a la condición inicial. De aquí se deduce que no hay tales enteros supuestos.*
∴ Si no hay 2 enteros que divididos den $\sqrt{2}$*, entonces este número no es racional, sino,* ***irracional.***

E1

$\frac{5}{8}\Rightarrow 5\,|\,8\ \Rightarrow \frac{5}{8}=0,625$

50 0,625
20
40

Número decimal exacto o limitado

$\frac{9}{11}\Rightarrow 9\,|\,11\ \Rightarrow \frac{9}{11}=0,\widehat{81}$

90 0,8181....
20
90
20

Número decimal inexacto periódico puro

$\frac{5}{6}\Rightarrow 5\,|\,6\ \Rightarrow \frac{5}{6}=0,8\widehat{3}$

50 0,833...
20
20
20

Número decimal inexacto periódico mixto

A. Si el denominador de una fracción generatriz está formado solamente por factores 2 y/o 5, entonces origina un número decimal exacto, cuya cantidad de cifras decimales es igual al mayor exponente de uno de los factores, 2 ó 5, de la descomposición canónica del denominador. E3

B. Si el denominador de una fracción generatriz no contienen factores 2 ni 5, origina un decimal inexacto periódico puro, cuya cantidad de cifras del período es igual a la cantidad de cifras del menor número formado por cifras 9 en el que está contenido exactamente el denominador. E4

C. Si el denominador de una fracción generatriz contiene factores 2 y/o 5 y factores primos distintos a éstos, origina un número decimal periódico mixto cuya cantidad de cifras decimales no periódicas se determina con el criterio A y la cantidad de cifras del período con el criterio B. E3

$\frac{375}{1000} = 0{,}375$ E2

$\frac{4372}{100} = 43{,}72$

$\frac{42}{99} = 0{,}\widehat{42}$

$\frac{345}{99} = 3{,}\widehat{48}$

A1

El denominador de una fracción que contiene solamente factores 2 y/o 5, siempre será posible transformarlo en una potencia de 10, multiplicando apropiadamente a ambos términos de la fracción por el mismo número.

Si el denominador no tiene factores 2 ni 5, entonces siempre será posible transformarlo, análogamente al anterior, en un número formado por cifras 9.

Problema 1

Tú amigo(a) lector(a), con todo lo que hemos expuesto hasta aquí, me puedes decir, sin necesidad de dividir, ¿qué tipo de decimal origina la fracción $\frac{296}{2^6 \times 5^4 \times 11 \times 41}$ ***? Además, ¿cuántas cifras tendrá la parte decimal non periódica y el período?***

Resolución

Antes de analizar el denominador tenemos que verificar que la fracción sea generatriz, o sea, irreductible:

$$\frac{296}{2^6 \cdot 5^4 \cdot 11 \cdot 41} = \frac{8 \times 37}{8 \times 2^3 \cdot 5^4 \cdot 11 \cdot 41} = \frac{37}{2^3 \cdot 5^4 \cdot 11 \cdot 41}$$

La fracción origina un número decimal periódico mixto, con 4 cifras en la parte decimal no periódica, porque el exponente de 5 es 4.

Para determinar la cantidad de cifras del período, vemos que el 11 está contenido en 2 «nueves» y el 41 en 5 «nueves». ¿En cuántos «nueves» están contenidos los dos?

El MCM de 2 y 5 es 10. Entonces 11 y 41 están contenidos en 10 «nueves»

Por lo tanto, tendrá 10 cifras en el período.

¿Estás de acuerdo? Si tienes dudas, comprueba con otros

E3

La fracción $\frac{7}{40}$ origina un número decimal exacto con tres cifras decimales, porque en $40 = 2^3 \times 5$ el mayor exponente de uno de los factores es 3.

La fracción $\frac{4}{11}$ origina un número decimal periódico puro con 2 cifras en el período porque 11 está contenido en 99.

ejemplos. Te recomiendo una calculadora para efectuar las operaciones.

Ejercicios

En el siguiente cuadro, debes señalar el tipo de decimal que origina la fracción dada, además, la cantidad de cifras decimales no periódicas y la cantidad de cifras del período.

Fracción	Tipo de Fracción	N° cifras decimales no periódicas	N° de cifras del período
$\frac{15}{48}$			
$\frac{12}{275}$			
$\frac{147}{594}$			
$\frac{100}{189}$			
$\frac{5}{13}$			
$\frac{125}{287}$			

3.1.1 Conversión de decimal a fracción

Para convertir de decimal a fracción, la idea es "desaparecer" la coma decimal. No vayas a pensar desaparecerlo borrándola.

Cuando un decimal se multiplica por 10, la coma decimal se corre una cifra hacia la derecha, por 100, dos cifras; por 1000, tres, etc. E6

Por ejemplo, si multiplicamos por 100 el decimal 3,48 resulta 3,48×100 = 348. Pero el valor de 3,48 ha sido alterado, para que no se altere, dividimos entre 100:

$$3{,}48 = \frac{3{,}48\times 100}{100} = \frac{348}{100} \quad \Rightarrow \quad 3{,}48 = \frac{348}{100}$$

Así hemos transformado en fracción. Lógicamente puedes enunciar una **regla general** para convertir cualquier decimal exacto a fracción. E7

E5

La fracción $\frac{343}{108}$ origina un decimal periódico mixto: $108 = 2^2 \times \check{2}7$. Entonces tiene 2 cifras decimales no periódicas y 3 cifras en el período, porque 27 está contenido en 999.

¿Cómo saber, en cuántos "nueves" está contenido un número?

Por ejemplo, ¿En cuántos "nueves" está contenido 41?

El menor número de cifras 9 mayor que 41 es 99, entonces vamos a dividir 99 entre 41, si hay residuo vamos agregando más cifras 9, hasta que el residuo sea cero.

$$\begin{array}{r|l} 99 & 41 \\ \underline{82} & 2439 \\ 179 & \\ \underline{164} & \\ 159 & \\ \underline{123} & \\ 369 & \\ \underline{369} & \\ 0 & \end{array}$$

$99999 = 41\times 2439$

41 está contenido en 5 "nueves"

Otro modo de averiguar lo mismo es teniendo la descomposición canónica de los "nueves"

$$9 = 3^2$$

$$99 = 3^2\times 11$$

$$999 = 3^3\times 37$$

$$9999 = 3^2\times 11\times 101$$

$$99999 = 3^2\times 41\times 271$$

$$999999 = 3^3\times 7\times 11\times 13\times 37$$

Aquí vemos que 41 está contenido en 5 "nueves".

Para el caso de decimal periódico puro, consideremos el número $0,\widehat{48}$, que en realidad es:

$$0,\widehat{48} = 0,484848 \ldots \quad (1)$$

Multiplicando por 100: $100(0,\widehat{48}) = 48,484848 \ldots \quad (2)$

Restando miembro a miembro (2) – (1): $99(0,\widehat{48}) = 48$

Dividiendo entre 99: $$0,\widehat{48} = \frac{48}{99}$$

Enuncia una regla general para convertir en fracción cualquier decimal periódico puro. E8

Deduce una regla para convertir números decimales periódicos mixtos en fracción. E9

Ejercicios

Convierte en fracción cada uno de los siguientes decimales. Una vez obtenida la fracción, comprueba que al dividir el numerador entre el denominador de la fracción se obtiene el decimal original.

a) 0,45 **d)** $0,\bar{4}$ **g)** $0,4\widehat{27}$ **j)** $6,\widehat{20}$

b) 3,2 **e)** $0,\widehat{27}$ **h)** $0,52\hat{8}$ **k)** $32,\hat{5}$

c) 2,50 **f)** $0,\widehat{05}$ **i)** $4,2\hat{5}$ **l)** $2,\bar{9}$

E6 $0,342 \times 10 = 3,42$

$0,253 \times 100 = 25,3$

$0,452 \times 1000 = 425$

E7 $$0,427 = \frac{427}{1000}$$

$$37,2 = \frac{372}{10}$$

$$0,052 = \frac{52}{1000}$$

E8 $$0,\widehat{42} = \frac{42}{99}$$

$$0,\widehat{345} = \frac{345}{999}$$

$$0,\widehat{005} = \frac{5}{999}$$

E9 $$0,3\widehat{25} = \frac{325-3}{990}$$

$$0,47\hat{5} = \frac{475-47}{900}$$

$$3,22\hat{5} = \frac{3225-322}{900}$$

$$48,\hat{7} = \frac{487-48}{9}$$

$$4,\hat{9} = \frac{49-4}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

3.2 Clasificación y operaciones con fracciones

3.2.1. Clasificación de fracciones

Las fracciones se clasifican de acuerdo a varios criterios:

A. De acuerdo a los divisores comunes de sus términos

a) Fracción irreductible.- Si los términos tienen como único divisor común a la unidad. No

es posible simplificar.

$\frac{7}{4}$ es irreductible.

b) Fracción reductible.- Si los términos tienen divisores comunes aparte de la unidad. Las fracciones reductibles se pueden simplificar dividiendo los términos entre los divisores comunes. Por ejemplo:

La fracción $\frac{48}{36}$ es reductible. El mayor divisor común entre ellos es el MCD (48; 36) = 12. Dividiendo ambos términos entre 12, obtenemos:

$$\frac{48}{36} = \frac{48+12}{36+12} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{48}{36} \text{ es equivalente a } \frac{4}{3}$$

Las fracción $\frac{4}{3}$ es irreductible. Las fracciones $\frac{48}{36}$ y $\frac{4}{3}$ son equivalentes.

B. De acuerdo a la comparación de sus términos

a) Fracción propia.- Si el numerador es menor que el denominador.

La fracción $\frac{7}{10}$ es propia, porque $7 < 10$.

b) Fracción impropia.- Si el numerador es mayor que el denominador.

La fracción $\frac{12}{7}$ es impropia, porque $12 > 7$. La fracción impropia es mayor que la unidad. Dividiendo el numerador entre el denominador origina una fracción mixta (entero + fracción propia)

$$\begin{array}{r|l} 12 & 7 \\ 5 & 1 \end{array} \Rightarrow \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7} \leftarrow \textit{Fracción mixta}$$

C. De acuerdo al denominador

a) Fracción decimal.- Si el denominador es una potencia de 10; por ejemplo $\frac{7}{10}; \frac{47}{100}$

Expresión general de la fracción equivalente

Si dada una fracción, se pretende hallar otra equivalente a la primera, pero que satisfaga determinadas condiciones, entonces, lo conveniente es hallar la expresión general de todas las fracciones equivalentes a la fracción.

Supongamos que queremos hallar una fracción equivalente a $\frac{32849}{43121}$ *cuyo numerador sea el menor número entero positivo que termine en cifra 3.*

Lo primero que debemos hacer es simplificar la fracción, convertirla en irreductible.

Cuando intentamos simplificar la fracción, notamos que los términos de $\frac{32849}{43121}$ *no tiene tercia, ni séptima, ni onceava, etc. ¿Cómo podemos averiguar si es irreductible o no? Recordemos que para volverla irreductible, hay que dividir ambos términos entre su MCD.*

Entonces debemos hallar el MCD de 32849 y 43121. Pero igualmente, al no conocer los divisores comunes, no podemos hallar el MCD.

En estos casos, hay un algoritmo llamado ***algoritmo de Euclides****, que nos permite hallar el MCD de cualquier par de núme-*

b) Fracción ordinaria.- Si el denominador es diferente de una potencia de 10; por ejemplo: $\frac{13}{20};\frac{48}{52};\frac{36}{50}$

D. De acuerdo a la comparación de varias fracciones

a) Fracciones heterogéneas.- Varias fracciones son heterogéneas si tienen denominadores diferentes.

Las fracciones: $\frac{7}{3};\frac{15}{10};\frac{13}{8}$ son heterogéneas

c) Fracciones homogéneas.- Varias fracciones son homogéneas si tienen denominadores iguales.

Las fracciones $\frac{13}{12};\frac{7}{12};\frac{5}{12}$ son homogéneas

Homogenización

Varias fracciones heterogéneas se pueden convertir en homogéneas transformando a fracciones equivalentes.

Problema 1

Homogenizar las fracciones $\frac{7}{12};\frac{8}{15};\frac{13}{20};\frac{3}{4}$ ***y ordenar de mayor a menor.***

Resolución

Método (1)

Hallamos el MCM de los denominadores:

12	15	20	4	‖	2
6	15	10	2	‖	2
3	15	5	1	‖	3
1	5	5	1	‖	5
1	1	1	1	‖	$\Rightarrow$ MCM = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Cada fracción debe tener por denominador a 60. Para ello tenemos que multiplicar apropiadamente por el mismo número a ambos términos de cada fracción, de modo que el denominador sea 60.

ros. Se va dividiendo el mayor entre el menor, luego el menor entre el residuo, así sucesivamente, hasta obtener un residuo cero y el MCD es el último divisor.

Veamos:

	1	3	5	19
43121	32849	10272	2033	107
10272	2033	107	0	MCD

Dividiendo los términos de la fracción dada entre el MCD=107:

$$\frac{32849}{43121}=\frac{32849\div 107}{43121\div 107}=\frac{407}{403}$$

Todas las fracciones equivalentes a $\frac{32849}{43121}$ *son de la forma*

$\frac{307k}{403k}$, *donde:*

$$k = 1; 2; 3; 4; ....$$

Debemos hallar, aquélla cuyo numerador, 307k, sea el menor entero positivo que termine en cifra 3.

Para que 307k termine en 3, k debe terminar en 9; entonces:

$$k = 9; 19; 29; ....$$

De aquí escogemos el menor: k = 9. En consecuencia, la fracción buscada es:

$$\frac{307k}{403k}=\frac{307(9)}{403(9)}=\boxed{\frac{2763}{3629}}$$

$$\frac{7\cdot5}{12\cdot5}=\frac{35}{60};\frac{8\cdot4}{15\cdot4}=\frac{32}{60};\frac{13\cdot3}{20\cdot3}=\frac{39}{60};\frac{3\cdot15}{4\cdot15}=\frac{45}{60}$$

Las fracciones equivalentes son:

$$\frac{35}{60};\frac{32}{60};\frac{39}{60};\frac{45}{60}$$

Ordenando de mayor a menor. De varias fracciones homogéneas es mayor el de mayor numerador. Luego:

$$\frac{45}{60}>\frac{39}{60}>\frac{35}{60}>\frac{32}{60}\ \Rightarrow\ \frac{3}{4}>\frac{13}{20}>\frac{7}{12}>\frac{8}{15}$$

Método (2)

A cada fracción le ponemos 60 (MCM de denominadores) de denominador. Para obtener el numerador de cada fracción equivalente dividimos 60 entre el denominador de la fracción y multiplicamos este resultado por el numerador.

60 ÷12 = 5
5 × 7 = 35 → $\frac{35}{60}$;

60 ÷15 = 4
4 × 8 = 32 → $\frac{32}{60}$;

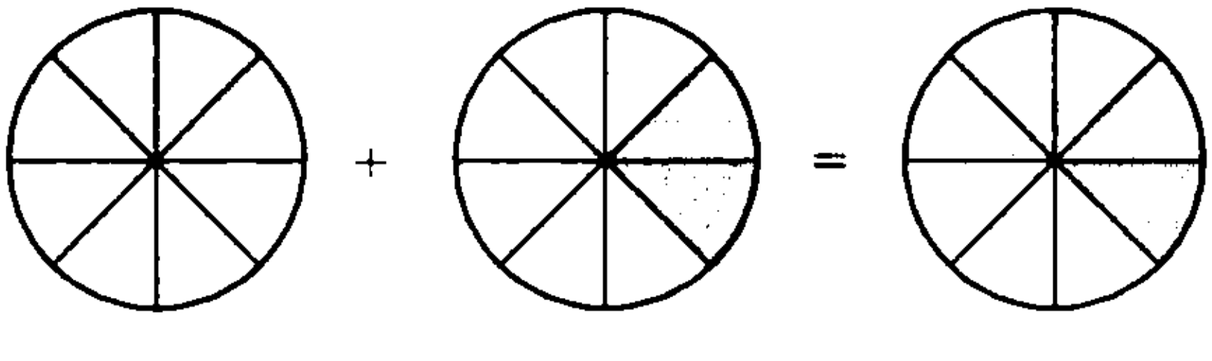
60 ÷20 = 3
3 × 13 = 39 → $\frac{39}{60}$;

60 ÷4 = 15
15 × 3 = 45 → $\frac{45}{60}$

3.2.2 Adición y Sustracción de Fracciones

El procedimiento seguido para sumar fracciones, depende de que si las fracciones sean homogéneas o heterogéneas. Veamos a continuación.

a) ¿Cómo sumar fracciones homogéneas?



$$\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3+2}{8}=\frac{5}{8}$$

Para sumar y restar fracciones homogéneas basta sumar los numeradores y mantener el mismo denominador.

b) ¿Cómo sumar fracciones heterogéneas?

Consideremos las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{3}$ cuya suma quere-

Divertijo 1

Viaje al Pasado

A las 8 de la mañana, en la ciudad de Valencia (España) se va a celebrar una junta de empresarios. Uno de ellos, sale del aeropuerto de Bagdad (Irak) a las 9 de la mañana y llega a tiempo a la junta tras un viaje de 2 horas ¿Es posible esto?

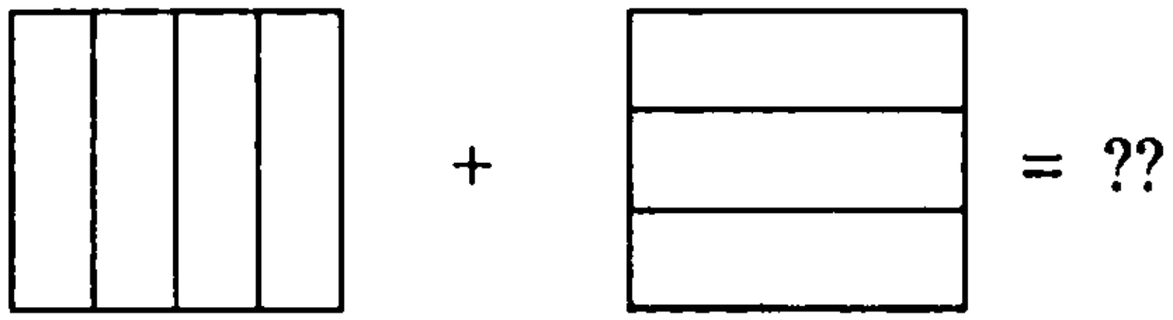
Divertijo 2

¿Cuánto pesa la señora?

Cuando se le pregunte a Camila por el peso de su madre, responde: "Mi madre pesa 90 kg más un décimo de su peso"

¿Cuánto pesa la mamá de Camila?

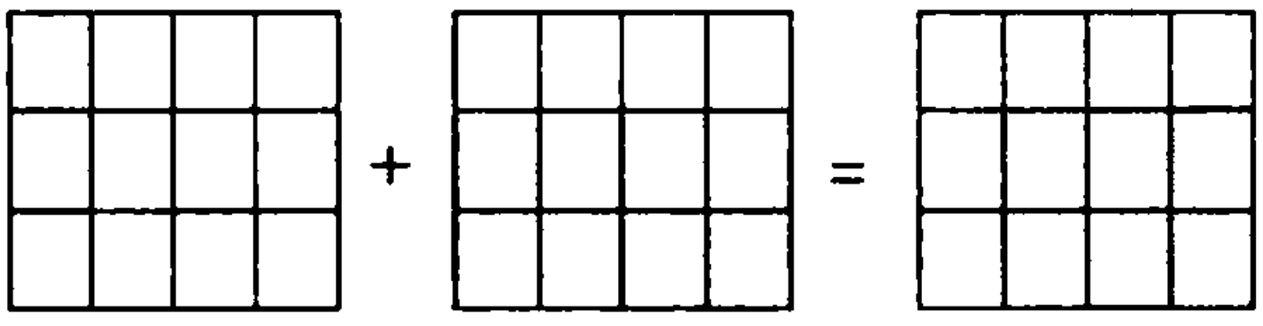
mos hallar. Representemos gráficamente las dos fracciones:



$\frac{1}{4}$ + $\frac{2}{3}$

Como se puede apreciar las partes a sumar no son del mismo tamaño y no hay forma de sumarlos tal como están.

Una estrategia gráfica es, dividir los dos cuadrados en partes del mismo tamaño. Observa la siguiente figura.



$\frac{3}{12}$ + $\frac{8}{12}$ = $\frac{11}{12}$

Se observa que dividir **gráficamente** en partes del mismo tamaño, equivale, analíticamente a homogenizar las fracciones.

Para sumar fracciones heterogéneas, es necesario homogenizarlas previamente, luego efectuar la suma de las fracciones homogenizadas. E1

Divertijo 3
Los libros de Juanito

Al ver a Juanito llegando a la academia con varios libros bajo el brazo, su amiga Nancy se le acercó
_¿Tantos libros tiene Juanito?
_Sólo traje la séptima parte de los que tengo. La tercera parte son de matemáticas. Dos libros de filosofía son mis favoritos. Pero en total no llegan a 30. ¿Cuántos libros tiene Juanito?

Sumemos: E1

$$\frac{2}{5}+\frac{13}{20}+\frac{7}{15}-\frac{7}{4}$$

Hallando el MCM de los denominadores:

MCM (5; 20; 15; 4) = 60

$$=\frac{24+39+28-105}{60}$$

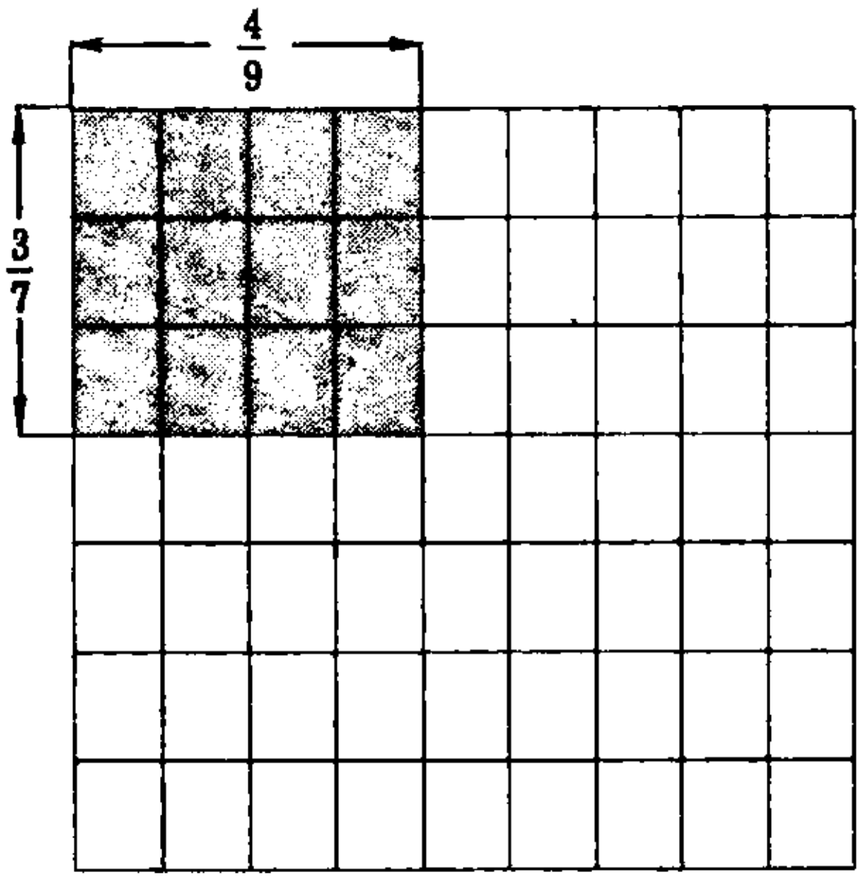
$$=\frac{-14}{60}=\frac{7}{30}$$

3.2.3. Multiplicación y división de fracciones

Consideremos las fracciones $\frac{3}{7}$ y $\frac{5}{9}$ cuyo producto queremos hallar. Podemos saber la regla de cómo se multiplica las fracciones y no saber, el porqué de esa regla y no otra.

Por ejemplo, a Manolete sólo le interesa la regla, porque le es suficiente en caso que un problema requiera de la multiplicación de fracciones.

En cambio, a Lupita, le interesa más bien el porqué de la regla, porque de esa manera, aunque se haya olvidado de la regla será capaz de deducirla en cuanto lo requiera. Veamos, pues, cómo podemos deducir la regla.



Consideremos un cuadrado de lado igual a una unidad de longitud.

Por un lado dividimos en 9 partes y por el otro en 7 partes, como muestra la figura. Así, quedan representadas las fracciones $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{9}$; el cuadrado queda dividido en $7\times9 = 63$ partes, de modo el área de cada cuadradito es $\frac{1}{63}$.

En la figura podemos observar que el área de la parte sombreado, representa el producto de $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{9}$, que abarca 12 cuadraditos. En consecuencia, el área de esta parte sombreado es $\frac{12}{63}$.

Es decir:

$$\frac{3}{7}\times\frac{4}{9}=\frac{12}{63} \text{ de donde se deduce que: } \frac{3}{7}\times\frac{4}{9}=\frac{3\times4}{7\times9}$$

Ahora, ¿puedes anunciar la regla general para la multiplicación de fracciones?

¿Cómo multiplicar un entero por una fracción o una fracción por un entero? Por ejemplo: $4\times\frac{7}{9}$.

Sabemos que 4 es un número racional, y como tal, se puede expresar como $\frac{4}{1}$, entonces, la multiplicación en cuestión resulta:

$$4\times\frac{7}{9}=\frac{4}{1}\times\frac{7}{9}=\frac{4\times7}{1\times9} \text{ de donde se deduce que:}$$

$$4\times\frac{7}{9}=\frac{4\times7}{9}=\frac{28}{9}$$

Como la multiplicación es conmutativa, se puede deducir la regla para el caso de una fracción por un entero:

$$4\times\frac{7}{9}=\frac{7}{9}\times4=\frac{7\times4}{9}=\frac{28}{9}$$ E1

E1

Multiplicar

- $\frac{4}{5}\times\frac{13}{21}=\frac{4\times13}{5\times21}=\frac{52}{105}$
- $8\times\frac{7}{15}=\frac{8\times7}{15}=\frac{56}{15}$
- $\frac{9}{4}\times11=\frac{9\times11}{4}=\frac{99}{4}$

El inverso y la división

Ahora nos proponemos dividir $\frac{4}{9}$ entre $\frac{5}{7}$. ¿Cómo efectuar la división? Imagínate que no sabes la regla y tienes la necesidad de dividir, porque el cociente te conduce a la solución de un problema. Tal vez recuerdas algo de la regla, *que se multiplica en aspa*, pero estás en duda sobre dónde se ubican los productos, que a fin de cuentas da igual que no saber la regla. Para deducir la regla de la división de fracciones, vamos a recordar la propiedad del inverso: todo número racional distinto de cero tiene su inverso. Por ejemplo, el inverso de 7 es $\frac{1}{7}$, el de $\frac{1}{5}$ es 5 y el inverso de $\frac{4}{9}$ es $\frac{9}{4}$. Así, cualquier número racional diferente de cero tiene su inverso.

Por otro lado, la división $9 \div 5$ se puede expresar como $\frac{9}{5}$, que a su vez se puede expresar como $9 \times \frac{1}{5}$. Así llegamos a que $9 \div 5$ es lo mismo que $9 \times \frac{1}{5}$. De donde podemos enunciar: *dividir 9 entre 5 es lo mismo que multiplicar 9 por el inverso de 5*. El problema de la división se resuelve por la vía de la multiplicación.

Volviendo a la división de $\frac{4}{9}$ entre $\frac{5}{7}$, podemos concluir, que dividir $\frac{4}{9}$ entre $\frac{5}{7}$ equivale a multiplicar $\frac{4}{9}$ por el inverso de $\frac{5}{7}$, o sea:

$$\frac{4}{9} \div \frac{5}{7} = \frac{4}{9} \times \frac{7}{5} = \frac{4 \times 7}{9 \times 5} = \frac{28}{45}$$

Esta regla es tan poderosa que se puede aplicar a cualquier caso. Por ejemplo la división de un entero entre una fracción o viceversa. Dividir 12 entre $\frac{7}{5}$ equivale a

Curiosidades

El número π en la Biblia

¿Qué valor se asignaba a π en la época bíblica? Es curioso conocer dos referencias que aparecen en la Biblia.

Dice el libro de los Reyes (1 Reyes 7, 21), al hablar de la construcción del templo de Jerusalén:

"Hizo también de fundición una gran concha, toda redonda, de diez codos de diámetro, de un borde al otro; tenía cinco codos de profundidad, y un cordón o moldura de unos 30 codos ceñía toda su circunferencia".

Si la circunferencia era de unos 30 codos y el diámetro de diez codos

$$\pi \approx 3$$

Y el libro de las Crónicas, sobre el mismo tema (2 Crónicas 4, 4):

"Y una gran concha o pila de bronce fundido, que tenía diez codos de de diámetro, redonda perfectamente: cinco codos tenía de profundidad y un cordoncillo de 30 codos abrazaba toda su circunferencia".

multiplicar 12 por el inverso de $\frac{7}{5}$: $12 \div \frac{7}{5} = 12 \times \frac{5}{7} = \frac{60}{7}$

Así, la división, por ejemplo, de $\frac{7}{9}$ entre 8 resulta: $\frac{7}{9} \div 8 = \frac{7}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{7}{72}$

Un caso particular de la división de fracciones es la división:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Veamos los casos en que uno de los términos de la división es un entero:

$$\frac{a}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{c} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a}{bc}$$

Fracción de un número

Calcular los $\frac{3}{4}$ de 200, equivale a dividir 200 en 4 partes y considerar 3 de esas partes:

200÷4 = 50, luego 3×50 = 150. Así llegamos a la conclusión de que $\frac{3}{4}$ de 200 es 150.

En términos prácticos, lo que hemos hecho es multiplicar $\frac{3}{4}$ por 200:

$$\frac{3}{4} \text{ de } 200 = \frac{3}{4} \times 200 = \frac{3 \times 200}{4} = 150$$

Vemos que la preposición **de**, en términos prácticos, puede ser sustituido por el signo de la multiplicación.

Por ejemplo, ¿cuánto es $\frac{3}{7}$ de $\frac{3}{7}$?

$$\frac{3}{7} \text{ de } \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{3 \times 3}{7 \times 7} = \frac{9}{49} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{3}{7} \text{ de } \frac{3}{7} \text{ es } \frac{9}{49}}$$

Problema 1

Hallar el resultado de la siguiente operación:

$$\frac{\frac{1}{7}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{9}\div\frac{4}{3}}{\frac{4}{5}\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{4}\right)}$$

Resolución

$$\frac{\frac{1\times3}{7\times5}+\frac{2}{9}\times\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}\left(\frac{8-7}{28}\right)}=\frac{\frac{3}{35}+\frac{\cancel{6}}{\cancel{36}_{6}}}{\frac{4}{5}\times\frac{1}{28}}=\frac{\frac{18+35}{35\times6}}{\frac{4}{5\times28}}$$

$$\frac{53\times\cancel{5}\times\cancel{28}^{\,1}}{\cancel{35}_{\,1}\times6\times\cancel{4}}=\boxed{\frac{53}{6}}$$

Problema 2

Reducir: $\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\div\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)}{\left(0,5+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{5}\div0,4\right)}$

Resolución

$$\frac{\left(\frac{3+2}{6}\right)\div\left(\frac{5+6}{15}\right)}{\left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{10}}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{5}\div\frac{\cancel{4}}{\cancel{10}}\right)}=\frac{\frac{5}{\cancel{6}}\times\frac{\cancel{15}}{11}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}}{2}\right)}$$

$$\frac{\frac{25}{22}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{25}{22}}{\frac{1}{4}}=\frac{25\times\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{22}_{\,11}}=\boxed{\frac{50}{11}}$$

Problema 3

Reducir: $\dfrac{6}{4-\frac{7}{3-\frac{1}{4}}}$

Resolución

$$\frac{6}{4-\frac{7}{12-1}}=\frac{6}{4-\frac{7}{11}}=\frac{6}{4-\frac{28}{11}}=\frac{6}{\frac{44-28}{11}}$$

$$=\frac{6}{\frac{16}{11}}=\frac{\cancel{6}^{\,3}\times11}{\cancel{16}_{\,8}}=\boxed{\frac{33}{8}}$$

Problema 4

Reducir:

$$\frac{0,45+0,\hat{3}}{1,\hat{4}-1,1\hat{6}}-\frac{1}{0,\hat{8}+\frac{1}{1,\hat{3}-\frac{1}{0,9\widehat{54}}}}$$

Resolución

$$=\frac{\frac{45}{100}+\frac{3}{9}}{\frac{14-1}{9}-\frac{116-11}{90}}-\frac{1}{\frac{8}{9}+\frac{1}{\frac{13-1}{9}-\frac{1}{\frac{954-9}{990}}}}$$

$$=\frac{\frac{9}{20}+\frac{1}{3}}{\frac{13}{9}-\frac{105}{90}}-\frac{1}{\frac{8}{9}+\frac{1}{\frac{12}{9}-\frac{990}{945}}}$$

$$= \frac{\frac{27+20}{60}}{\frac{13}{9}-\frac{7}{6}} - \frac{1}{\frac{8}{9}+\frac{1}{\frac{4}{3}-\frac{22}{21}}}$$

$$= \frac{\frac{47}{60}}{\frac{26-21}{18}} - \frac{1}{\frac{8}{9}+\frac{1}{\frac{28-22}{21}}}$$

$$= \frac{47 \times \cancel{18}^{3}}{\cancel{60}_{10} \times 5} - \frac{1}{\frac{8}{9}+\frac{21}{6}} = \frac{141}{50} - \frac{1}{\frac{16+63}{18}}$$

$$= = \frac{141}{50} - \frac{18}{79} = \frac{11139-900}{3950} = \boxed{\frac{10239}{3950}}$$

Problema 5

Efectuar:

$$\frac{1\frac{1}{3} - 0,\widehat{36}}{0,\widehat{54} \div 0,\widehat{35}} \div \frac{2\frac{1}{4} - 2\frac{3}{5}}{0,5 - 1,\widehat{6}}$$

Resolución

$$= \frac{\frac{4}{3}-\frac{36}{99}}{\frac{54}{99} \div \frac{35-3}{90}} \div \frac{\frac{9}{4}-\frac{13}{5}}{\frac{5}{10}-\frac{16-1}{9}}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}-\frac{4}{11}}{\frac{6}{11} \times \frac{90}{32}} \div \frac{\frac{45-52}{20}}{\frac{1}{2}-\frac{15}{9}} = \frac{\frac{44-12}{33}}{\frac{6 \times 90}{11 \times 32}} + \frac{\frac{-7}{20}}{\frac{-7}{6}}$$

$$= \frac{32 \times \cancel{11}^{1} \times 32}{\cancel{33}_{3} \times 6 \times 90} + \frac{\cancel{7} \times \cancel{6}}{\cancel{20} \times \cancel{7}} = \frac{\cancel{32}^{16} \times 32}{3 \times \cancel{6}_{3} \times \cancel{90}_{9}} \times \frac{1}{\cancel{10}^{1}_{3}} = \boxed{\frac{512}{243}}$$

Problemas

1. Efectuar:

$$\left[\frac{1}{\frac{1}{3}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right] \div \left[\frac{2}{\frac{1}{5}} + \frac{4}{\frac{1}{10}}\right]$$

A) $\frac{1}{20}$ **B)** $\frac{1}{30}$ **C)** $\frac{1}{50}$

D) $\frac{1}{15}$ **E)** $\frac{1}{18}$

2. Efectuar: $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} - \dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$

A) $\frac{10}{3}$ **B)** $\frac{4}{3}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{12}{13}$ **E)** $\frac{13}{12}$

3. Reducir la siguiente expresión

$$\frac{\left(1\frac{1}{3}-\frac{3}{5}\right) \div \left(\frac{4}{3}-1\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2}-\frac{2}{5}}$$

A) 88 **B)** –100 **C)** –132
D) –123 **E)** –121

4. $1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} + \dfrac{2}{1+\frac{2}{1+\frac{2}{3}}}$

A) $2\frac{10}{11}$ **B)** $1\frac{10}{11}$ **C)** $2\frac{7}{11}$

D) $2\frac{9}{11}$ **E)** $2\frac{1}{11}$

5. $\dfrac{0,\widehat{972}\times 1,\widehat{12}}{1,\widehat{63}} - \left(1,\hat{3} + \dfrac{1}{2,5 - \dfrac{1}{0,\hat{6}}}\right)$

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $-\frac{5}{3}$

D) $-\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

6. $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{3}} \div \dfrac{1}{4,8\hat{3} - \dfrac{7}{0,7\hat{2} + \dfrac{1}{0,\widehat{972}}}}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

7. *Reducir:*

$$\sqrt{\frac{0,\hat{3}\times 0,\hat{4}\times 0,43}{1\frac{1}{3}+2\frac{1}{4}}}$$

A) $\frac{1}{21}$ B) $\frac{3}{45}$ C) $\frac{1}{7}$

D) $\frac{3}{105}$ E) $\frac{2}{15}$

8. *Hallar el resultado de*

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}+\frac{6}{\frac{1}{15}}} \div \sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{7}-\frac{1}{7-\frac{1}{5}}}$$

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{4}$

Problema 6

Melquiades es tan metódico que de los 850 soles de su remuneración, siempre asigna 450 soles para su mamá. ¿Qué parte de su remuneración asigna para su madre?

Resolución

El problema es equivalente a preguntar, ¿qué parte de 850 es 450? Aquí, 850 es el todo, que en términos fraccionarios equivale a la unidad y, 450 es la parte.

$850 \rightarrow 1$

$450 \rightarrow x$

$x = \dfrac{450}{850} \quad \therefore \boxed{x = \dfrac{9}{17}}$

La fracción que da respuesta a la pregunta es:

$$\frac{Parte}{Todo}$$

Problema 7

Abelardo ha vendido un televisor a plazos. Al momento de entregar ha recibido 235 soles que equivalen a los $\frac{5}{9}$ del precio pactado.
¿A qué precio ha vendido el televisor?

Resolución

El problema equivale a preguntar, ¿los $\frac{5}{9}$ de qué número es 235? Aquí se conoce la parte y se pide hallar el todo que equivale a la unidad.

$$\begin{array}{rcl} 235 & \rightarrow & \frac{5}{9} \\ x & \rightarrow & 1 \end{array}$$

$$x = \frac{235 \times 1}{\frac{5}{9}} \rightarrow \boxed{x = 423 \text{ soles}}$$

Problema 8

Se ha comprado un artefacto en 480 soles y se ha pagado 360 soles. ¿Qué parte del precio falta cubrir?

Resolución

La parte cubierta es $\frac{360}{480} = \frac{3}{4}$, entonces falta cubrir $\frac{1}{4}$ del precio.

Otro enfoque:
Falta cubrir 480 – 360 = 120, que resulta $\frac{120}{480} = \frac{1}{4}$ del precio del artefacto.

Problema 9

Un trabajador ha avanzado los $\frac{3}{7}$ de la zanja que debe cavar. Si le faltan 16 metros de zanja ¿de qué longitud será la zanja?

Resolución

Si ya cavó $\frac{3}{7}$ de la zanja, le falta cavar los $\frac{4}{7}$ que son los 16 metros faltantes. Queremos saber la longitud total de las zanja. Luego:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{4}{7} & \rightarrow & 16 \\ 1 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{16}{\frac{4}{7}} \Rightarrow \boxed{x = 28\,m}$$

Problema 10

A Benjamín le confiaron una suma de dinero para que lo guardara. Pero, por un apuro, gastó $\frac{1}{5}$ del dinero confiado. El está preocupado de cómo reponer lo gastado y se pregunta, qué parte de lo que queda debe conseguir para reponer lo gastado.

Resolución

*Si estás pensando que si perdió $\frac{1}{5}$ debe reponer con $\frac{1}{5}$, no estás en lo cierto. Este $\frac{1}{5}$ está referido al dinero que le fue confiado. Lo que se pregunta es qué parte del dinero **que queda**, es igual al dinero gastado.*

METODO (1)

Si gastó $\frac{1}{5}$ quedan $\frac{4}{5}$. De estos $\frac{4}{5}$ ¿qué parte es $\frac{1}{5}$?: $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \boxed{\frac{1}{4}}$

METODO (2)

Como no se conoce el monto del dinero, significa que la solución no depende de dicho monto, entonces vamos a suponer que se trata de 50 soles.

Entonces ha gastado $\frac{1}{5}$ de 50 = $\frac{1}{5}$ (50) = 10 y le quedan 40.

¿Qué parte de 40 son los 10 soles que debe reponer? $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

Rpta: $\frac{1}{4}$

Problemas

1. ***Un contratista debe ejecutar 480 metros de carretera y ha avanzado sólo 390 metros. ¿Qué parte de la obra tiene avanzada?***

A) $\frac{4}{12}$ **B)** $\frac{3}{16}$ **C)** $\frac{13}{16}$

D) $\frac{13}{24}$ **E)** $\frac{3}{4}$

2. ***Un comerciante ha perdido en un negocio 3500 soles que equivalen a los siete décimos de su capital.***

¿A cuánto asciende su capital?

A) S/. 5000 B) S/. 4800 C) S/. 5500
D) S/. 4500 E) S/. 4700

3. ***Un automovilista que va de Lima a Huancayo ha recorrido 250 kilómetros, de los 300 kilómetros que tiene que recorrer para llegar a su destino.***
¿Qué parte del trayecto le falta cubrir para llegar a su meta?

A) $\frac{5}{6}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{1}{5}$

D) $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{4}{5}$

4. ***En la construcción de una casa se ha avanzado los $\frac{3}{7}$ de la obra. El ingeniero residente ha calculado que faltan 48 dias para culminar la obra. ¿En cuántos días en total, se construirá la casa?.***

A) 80 días B) 81 días C) 70 días
D) 75 días E) 84 días

5. ***Un recipiente que estaba lleno de agua ha perdido los $\frac{3}{8}$ de su contenido, entonces se le vuelve a llenar con más agua. ¿Qué parte de lo que había quedado representa el agua repuesta?***

A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{3}{8}$ **C)** $\frac{5}{8}$

D) $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{4}{5}$

6. ***Dos cajas de galletas contienen en total 260 galletas. Para que ambas cajas queden con la misma cantidad de galletas, se pasa de la primera los $\frac{3}{8}$ de su contenido a la segunda caja.***
¿Cuántas galletas habían en cada caja?

A) 140 y 120 B) 160 y 100
C) 180 y 80 D) 150 y 110
E) 208 y 52

7. ***Los $\frac{3}{5}$ de una suma equivalen a las***

$\frac{4}{7}$ ***del precio de un artículo. Si la suma aumentara en 12 soles, equivaldría al precio del artículo.***

¿Cuál es la suma?

A) S/. 252 **B)** S/. 248 **C)** S/. 240
D) S/. 242 **E)** S/. 230

Problema 11

Marco tiene los $\frac{3}{5}$ ***de lo que tiene Julián y éste, los*** $\frac{4}{7}$ ***de lo que tiene Andrés. Entre los tres tienen 536 soles, ¿cuál es la diferencia entre lo que tienen Marcos y Andrés?.***

Resolución

METODO (1)

Tomamos lo que tiene Andrés como la unidad.

Entonces Julián tiene $\frac{4}{7}$ *y Marcos* $\frac{3}{5}$ *de* $\frac{4}{7} = \frac{12}{35}$. *Entre los tres tienen* $\frac{12}{35} + \frac{4}{7} + 1 = \frac{67}{35}$ *que equivale a los 536 soles; luego:*

$$\begin{array}{rccc} \text{Total}: & \frac{67}{35} & \rightarrow & 536 \\ \text{Andrés}: & 1 & \rightarrow & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{536}{\frac{67}{35}} \Rightarrow \boxed{x = 280}$$

∴ Andrés tiene 280 y Marcos: $\frac{12}{35}(280) = 96$

La diferencia es: 280 – 96 = ***184 soles***

METODO (2)

Dado que el monto que tiene Andrés tiene séptima parte (por los $\frac{4}{7}$*) y quinta parte (por los* $\frac{3}{5}$*), vamos a suponer que dicho monto es 35 soles. Entonces Julián tiene* $\frac{4}{7}(35) = 20$ *y Marcos* $\frac{3}{5}(20) = 12$.

Entre los 3 tienen: 35 + 20 + 12 = 67 soles. Pero entre los tres tienen 536 y no 67, luego:

Total: 536 → 67 *Total: 536 → 67*

Andrés: x → 35 *Marcos: y → 12*

$$x = \frac{35 \cdot 536}{67} \qquad y = \frac{12 \cdot 536}{67}$$

$\boxed{x = 280}$ $\boxed{y = 96}$

$\therefore$ $\boxed{x - y = 184 \text{ soles}}$

Problema 12

Una pelota cae de 15 metros de altura. En el primer rebote pierde los $\frac{2}{5}$ ***de la altura de donde cayó. ¿Cuál es la altura que alcanza en dicho rebote?***

Resolución

Perder los dos quintos es como si dividiese la altura en 5 partes de las cuales ha perdido 2 partes y sólo le quedan 3 partes, es decir los $\frac{3}{5}$

8. *En la feria, Carmelo ha vendido los* $\frac{3}{8}$ ***de su mercadería.***

¿Qué parte de la mercadería que le queda debe vender para duplicar sus ventas?

A) $\frac{3}{5}$ **B)** $\frac{2}{8}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{3}$

Si pierde los $\frac{2}{5}$ de la altura entonces recupera los $\frac{3}{5}$ de la altura, o sea los $\frac{3}{5}$ de 15 : $\frac{3}{5}(15) =$ **9 metros**

Problema 16

Del dinero que tenía en la mañana, gasté los $\frac{4}{9}$ y más tarde los $\frac{3}{7}$ de lo que me quedó luego del primer gasto. Si aún me quedan 24 soles. ¿Cuántos tenía en la mañana?

Resolución

Al gastar los $\frac{4}{9}$ me quedan los $\frac{5}{9}$. Al gastar los $\frac{3}{7}$ del resto, queda los $\frac{4}{7}$ de dicho resto, o sea, $\frac{4}{7}$ de $\frac{5}{9} = \frac{20}{63}$. Luego:

$$\begin{array}{ccccc} 24 & \rightarrow & \frac{20}{63} & \Rightarrow & x = \frac{24}{\frac{20}{63}} \\ x & \rightarrow & 1 & & \end{array} \Rightarrow \boxed{x = 75{,}6}$$

Problema 17

Si bien Ricoto gana en la mayoría de los negocios en los que invierte, también ha experimentado fracasos muy amargos, aunque con tanto dinero que tiene no le preocupa mucho.

En uno de estos negocios, el primer mes perdió los $\frac{3}{7}$ de su inversión, pero volvió a invertir el capital que quedó y en el segundo mes ganó los $\frac{2}{5}$ de la nueva inversión. Animado, Ricoto, volvió a invertir el capital y la gancia, y volvió a perder esta vez los $\frac{3}{8}$ de su última inversión.

Con tantos altibajos, Ricoto decidió retirar todo su capital que asciende a 680 mil soles. ¿Cuál fue la inversión original de Ricoto?.

Resolución

Ganar los $\frac{2}{5}$ de una inversión es equivalente a dividir la inversión en 5 partes y ganar una suma igual a 2 de estas partes, con lo que la suma ascendería a 7 de estas partes. Esto es, si se gana $\frac{2}{5}$ de la inversión, se obtiene los $\frac{7}{5}$ de la inversión.

Resolución

En el primer mes perdió los $\frac{3}{7}$, entonces le quedó $\frac{4}{7}$, el cual volvió a invertir y ganó los $\frac{2}{5}$, entonces ahora tiene los $\frac{7}{5}$ de $\frac{4}{7} = \frac{4}{5}$. Volvió a invertir perdiendo esta vez los $\frac{3}{8}$ de la última inversión, le quedó entonces los $\frac{5}{8}$ de $\frac{4}{5} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ de la inversión original, que son los 680 mil soles.

∴ La inversión original fue ***1'360 mil soles.***

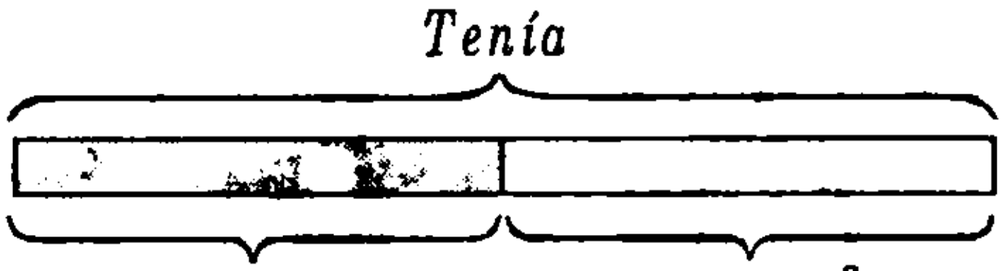
Problema 18

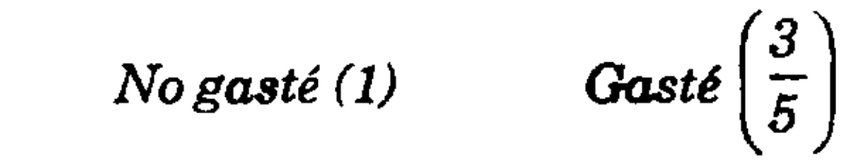
Si gasté las tres quintas partes de lo que no gasté, qué fracción de lo que tenía me queda?

Resolución

METODO (1)

Observa el siguiente esquema:





Del esquema:

Tenía: $1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$. *¿Qué parte de* $\frac{8}{5}$ *es* $\frac{3}{5}$ *?*

Respuesta: $\frac{3}{5}+\frac{8}{5}=$ $\boxed{\frac{3}{8}}$

METODO (2)

Consideremos que no gasté 5 soles entonces gasté $\frac{3}{5}(5)=3$. *Si no gasté 5 y gasté 3 entonces tenía 5 + 3 = 8. ¿Qué parte de 8 es 3?*

Respuesta: $\boxed{\frac{3}{8}}$

Problema 19

Dos personas tienen la misma suma de dinero. El primero pierde los 3/7 de lo que tiene y el otro gana los 2/9 de lo suyo; entonces tienen entre ambos 565 soles. Si ahora, el primero ganara 3/7 de lo que tiene y el segundo perdiera los 2/9 de lo suyo, ¿cuánto tendrían entre ambos?

Resolución

El primero pierde los $\frac{3}{7}$ $\Rightarrow$ *le queda los* $\frac{4}{7}$

El segundo gana los $\frac{2}{9}$ $\Rightarrow$ *tiene* $\frac{11}{9}$.

Entre los dos tienen $\frac{4}{7}+\frac{11}{9}=\frac{113}{63}$, *de donde.*

$$\left.\begin{array}{ccc}\frac{113}{63} & \rightarrow & 565\\ 1 & \rightarrow & x\end{array}\right\} \Rightarrow \quad x=\frac{565}{\frac{113}{63}} \Rightarrow \boxed{x=315}$$

Cada uno tenía 315 soles. Luego:

Si el primero ganara los $\frac{3}{7}$ *tendría* $\frac{10}{7}$ *de* $315 = \boxed{450}$

Si el segundo perdiera los $\frac{2}{9}$ *tendría* $\frac{7}{9}$ *de 315 que es:* $\boxed{245}$. *Luego, entre ambos tendrían:*

$$450 + 245 = \textbf{695 soles.}$$

Rpta.: 695 soles

Problema 20

Dos apostadores en carreras de caballos acudieron al hipódromo, dispuestos a apostar todo el dinero que llevaban. Anatolio, cuya espectativa era ganar los 3/5 de su inversión, llevó los 5/6 de lo que llevó su amigo Bartolo, quien fue con la espectativa de ganar los 9/10 de lo que disponía.

Ambos, sólo lograron cubrir los 2/3 de sus espectativas, aun así retornaron contentos porque habían logrado ganar 476 soles entre los dos. ¿Cuánto llevaron entre los dos?

Resolución

Consideremos que Bartolo llevó 30 soles, entonces su espectativa era ganar $\frac{9}{10}(30) = 27$

y sólo ganó $\frac{2}{3}(27) = 18$ soles.

Anatolio llevó $\frac{5}{6}(30) = 25$, cuya espectativa era ganar $\frac{3}{5}(25) = 15$ y sólo ganó $\frac{2}{3}(15) = 10$ soles. Entre los dos ganaron 18 + 10 = 28 soles, habiendo llevado entre los dos 30 + 25 = 55 soles. Luego:

$$\left.\begin{array}{ccc} 28 & \rightarrow & 476 \\ 55 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{55 \times 476}{28} = 935$$

Rpta.: 935 soles

Problema 21

Un obrero debe hacer una zanja en tres días. El primer día hizo los 3/8 de la obra; el segundo día los 4/5 de lo que hizo el día anterior y le quedaron 26 m de zanja para el tercer día. ¿Qué longitud debe tener la zanja?

Resolución

$$\left.\begin{array}{l} 1° \text{ Día: } \frac{3}{8} \\ 2° \text{ Día: } \frac{4}{5}\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{3}{10} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{En los 2 días} \\ \frac{3}{8} + \frac{3}{10} = \frac{27}{40} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{El 3° día} \\ \frac{13}{40} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 26 & \rightarrow & \frac{13}{40} \\ x & \rightarrow & 1 \end{array}\right\} \quad x = \frac{26}{\frac{13}{40}} \Rightarrow \boxed{x = 80}$$

Rpta.: 80 m

Problemas

1. ***Se tiene 315 caramelos distribuidos en 4 bolsas. La primera bolsa contiene los $\frac{2}{3}$ de lo que contiene la segunda, ésta los $\frac{4}{5}$ de la tercera y ésta los $\frac{6}{7}$ de la cuarta. ¿Cuántos caramelos contiene la segunda bolsa?***

A) 48 **B)** 72 **C)** 90 **D)** 105 **E)** 85

2. ***Un reservorio ha perdido los $\frac{3}{7}$ de la altura hasta donde llegaba el nivel del agua en la mañana. Más tarde volvió a bajar $\frac{4}{9}$ de la nueva altura. Si el nivel del agua aún alcanza 10 metros de altura, ¿a qué altura estaba el nivel original?***

A) 42,5 m **B)** 31,5 m **C)** 63 m
D) 35 m **E)** 32 m

3. ***Festino aprovecha los sábados para jugar en los tragamonedas.***

—Yo voy siempre con una misma suma. Si pierdo todo, me retiro y si voy ganando me quedo hasta media noche- Le comenta a un amigo.

—Ayer gané, al empezar, los $\frac{2}{9}$ de mi di-

nero, luego perdí $\frac{1}{8}$ de la nueva suma, en seguida volví a ganar los $\frac{2}{7}$ de la última suma y me quedé con 33 soles. ¿Con cuánto va Festino a los tragamonedas?

A) 24 soles **B)** 30 soles **C)** 25 soles
D) 33 soles **E)** 40 soles

4. De un recipiente lleno de agua se extrae los $\frac{5}{7}$ de lo que no se extrae. ¿Qué parte de su capacidad queda con agua?.

A) $\frac{5}{12}$ **B)** $\frac{7}{5}$ **C)** $\frac{2}{5}$

D) $\frac{2}{7}$ **E)** $\frac{7}{12}$

5. Clarisa le comenta a su esposo:

—Gasté en el mercado, exactamente los $\frac{5}{7}$ de lo que no gasté y me quedó 21 soles.— ¿Con cuánto dinero fue Clarisa al mercado?

A) 40 soles **B)** 35 soles **C)** 21 soles
D) 15 soles **E)** 36 soles

6. Dos comerciantes han invertido la misma suma de dinero en dos negocios distintos. El primero ganó los $\frac{2}{7}$ de su inversión y el segundo perdió $\frac{1}{10}$ de su inversión. Ambos reinvierten el capital resultante de la primera inversión. Esta vez el primero pierde los $\frac{2}{7}$ de su nueva inversión y el segundo gana $\frac{1}{10}$ de la suya. Reuniendo ambos capitales resultantes de la última reinversión obtienen 18 702 soles. ¿Cuánto dinero invirtieron cada uno al principio?

A) S/. 8 900 **B)** S/. 9 800 **C)** S/. 7 800
D) S/. 8 100 **E)** S/. 6 700

7. Dos artefactos se vendieron en el mismo precio. El primero se rebajó los $\frac{2}{15}$ de su precio de lista y el segundo se vendió en $\frac{2}{15}$ por encima de su precio de lista. La suma de los dos precios de lista es 480 soles.

¿A qué precio se ha vendido cada uno?

A) S/. 240 **B)** S/. 250 **C)** S/. 220
D) S/. 222 **E)** S/. 255

8. De un reservorio de agua se seca cada día los $\frac{2}{5}$ de su contenido al iniciar el día. Un lunes amanece lleno. ¿Qué parte se habrá vaciado al finalizar el día miércoles?

A) $\frac{27}{125}$ **B)** $\frac{9}{125}$ **C)** $\frac{98}{125}$

D) $\frac{9}{25}$ **E)** $\frac{27}{50}$

Problema 22

Parcimonio y Pelancho, dos amigos de siempre, el primero con su hija Lupita y Pelancho con su hijo Piero, se encontraron saliendo de la feria.

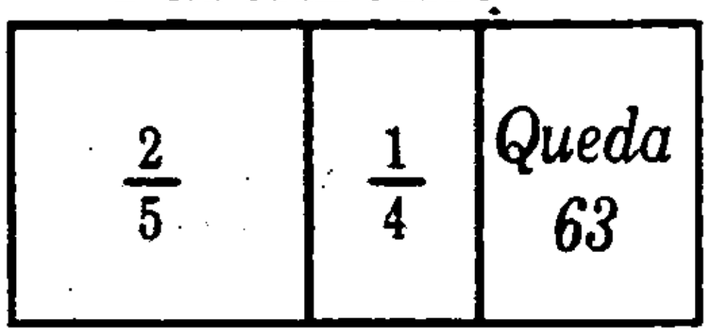
— Con los dos quintos del dinero que traje compré un juguete para Lupita y con la cuarta parte compré un regalo para mi mujer y me quedé sólo con 63 soles. Dijo Parcimonio.

—¡Qué casualidad! —respondió Pelancho— Yo también compré un juguete para Piero con los dos quintos del dinero que traje y, con la cuarta parte del resto, compré un regalo para mi mujer y también me quedé con 63 soles. ¿Con cuánto dinero fueron a la feria Parcimonio y su amigo?

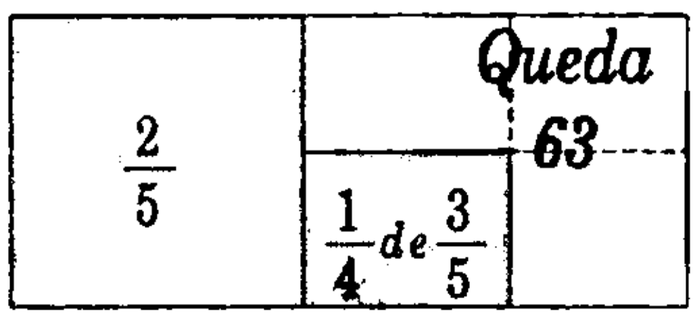
Resolución

¿Ambos han ido con la misma suma de dinero o con sumas diferentes? Representemos gráficamente el dinero con que fueron cada uno y los gastos hechos.

Parcimonio



Pelancho



En el caso de Parcimonio, los dos quintos están referidos al total y también la cuarta parte. Entonces gastó:

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{13}{20}$$

Si gastó $\frac{13}{20}$ *entonces le quedó los* $\frac{7}{20}$ *que equivalen a los 63 soles. Luego:*

$$\left.\begin{array}{ccc}\frac{7}{20} & \rightarrow & 63\\ 1 & \rightarrow & x\end{array}\right\} \Rightarrow \quad x=\frac{1\cdot 63}{\frac{7}{20}}=\frac{63\cdot 20}{7}$$

$$\therefore \boxed{x=180}$$

Parcimonio fue con 180 soles

En el caso de Pelancho, los dos quintos están referidos al total de dinero, mientras que la cuarta parte, a lo que quedó luego del primer gasto. Entonces gastó primero los $\frac{2}{5}$ *y le sobró los* $\frac{3}{5}$ *del dinero.*

Luego gastó $\frac{1}{4}$ *de* $\frac{3}{5}=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{20}$. *En total gastó:* $\frac{2}{5}+\frac{3}{20}=\frac{11}{20}$

Si gastó $\frac{11}{20}$ *le quedó* $\frac{9}{20}$, *que equivalen a*

los 63 soles. Luego:

$$\left.\begin{array}{ccc} \frac{9}{20} & \rightarrow & 63 \\ 1 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = \frac{1 \cdot 63}{\frac{9}{20}} = \frac{63 \cdot 20}{9}$$

$$\therefore \boxed{x = 140}$$

Pelancho fue con 140 soles

Problema 23

Al millonario Ricoto, se le ha dado por disponer cada día una suma para gastarlo ese día. Al finalizar el día, su asistente le rinde las cuentas:

— Los dos novenos fue entregado a tu sobrino Fantoni, del resto, los cuatro onceavos le prestamos a tu amigo Garfio, con los siete décimos del nuevo resto pagamos el sueldo del cocinero y sólo quedó 441 soles.

— ¿Cuánto dispusiste para este día? — Preguntó ricoto.

¿Puedes responder la pregunta de Ricoto?

Resolución

La resolución de este problema puede ser tan simple si consideramos lo siguiente: si gasta dos novenos, quiere decir que el dinero ha sido dividido en 9 partes y se ha gastado 2 de estas partes, quedando las 7 partes restantes. Es decir, si se gasta los $\frac{2}{9}$ quedan los $\frac{7}{9}$.

Primero gasta los $\frac{2}{9}$, entonces queda $\frac{7}{9}$.

Enseguida gasta los $\frac{4}{11}$ pero de los $\frac{7}{9}$ que quedaron, entonces quedan los $\frac{7}{11}$ de $\frac{7}{9}$ o sea $\frac{7}{11} \times \frac{7}{9} = \frac{49}{99}$. Por último gasta los $\frac{7}{10}$ del nuevo resto, quedándole los $\frac{3}{10}$ de dicho resto, es decir, $\frac{3}{10}$ de $\frac{49}{99} = \frac{3 \times 49}{10 \times 99} = \frac{147}{990}$ que equivalen a los 441 soles.

Luego:

$$\left.\begin{array}{ccc} \frac{147}{990} & \rightarrow & 441 \\ 1 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = \frac{1 \times 441}{\frac{147}{990}}$$

$$\boxed{\textit{Rpta.: } x = 2970}$$

Veamos ahora una resolución práctica:

Se observa que, si x es la suma inicial:

$$\left.\begin{array}{lccc} \textit{Gasta}: & \frac{2}{9} & \frac{4}{11} & \frac{7}{10} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \textit{Queda}: & \frac{7}{9} & \frac{7}{11} & \frac{3}{10} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \textit{Queda}: \frac{3}{10} \times \frac{7}{11} \times \frac{7x}{9} = 441$$

$$\frac{147x}{990} = 441$$

$$x = \frac{441 \times 990}{147} = \boxed{x = 2970}$$

3.3 Mezclas y regla del cangrejo

Problema 1

Un recipiente contiene 35 litros de una mezcla de alcohol y agua. Las tres quintas partes es alcohol y el resto, agua. ¿Qué cantidad de agua contiene esta mezcla?

Resolución

De los 35 litros los $\frac{3}{5}$ son de alcohol, entonces el agua es

los $\frac{2}{5}$ de 35 $= \frac{2}{5}(35) =$ **14 litros.**

Problema 2

A una mezcla alcohólica, con las $\frac{3}{4}$ partes de alcohol, se agrega 8 litros de agua hasta que la mezcla contenga tanta agua como alcohol. ¿Cuánto de alcohol contiene esta mezcla?

Resolución

Si los $\frac{3}{4}$ es alcohol, entonces $\frac{1}{4}$ es de agua. Para igualar hay que agregar $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ o sea tanto como la mitad de la mezcla. Esta cantidad son 8 litros. Entonces la mezcla inicial contenía 8 × 2 =16 litros, de los cuales $\frac{3}{4}(16) =$ **12 litros** son de alcohol.

Rpta.: 12 litros

Divertijo 4

Un jardinero perplejo

A mediados de siglo Cecilio Rodríguez, el jardinero mayor del parque del Retiro de Madrid, era famoso por sus conocimientos y por su buen gusto. Un día un bromista o un atrabiliario, no se sabe bien, le lanzó un reto desde las columnas del ABC, el principal diario de la capital. Le pidió que en honor de Madrid, la villa del oso y del madroño, plantara diez madroños en cinco filas rectas de cuatro árboles cada una. Esta petición fue la comidilla en las tertulias de los cafés y en las sobremesas de las familias. La mayoría pensaba que era imposible lo que se solicitaba. Sin embargo, al cabo de dos meses el alcalde inauguraba la Glorieta del Madroño. Cecilio Rodriguez había triunfando. ¿Cómo plantó los árboles?

Divertijo 5

La barra de oro

Un joyero llegó a un pueblo buscando posada para quedarse durante 7 días. Una vez encontrado y como no disponía de efectivo ofreció pagarle con una barra de 7 cm de oro. El posadero aceptó la oferta, pero con la condición de que el pago se efectuara diariamente y por adelantado. ¿Cuántos cortes como mínimo tuvo que realizar el joyero sobre la barra de oro, para efectuar el pago diario?

Problema 3

Un reservorio contiene 48 litros de una mezcla alcohólica cuyos tres octavos es alcohol. Si se extrae los $\frac{2}{3}$ de esta mezcla, ¿qué cantidad de alcohol queda en el reservorio?

Resolución

Al extraer los $\frac{2}{3}$ de la mezcla, se extrae los $\frac{2}{3}$ de alcohol y los $\frac{2}{3}$ de agua. En el recipiente queda $\frac{1}{3}$ del agua que había y $\frac{1}{3}$ del alcohol que había.

La mezcla contiene $\frac{3}{8}(48) = 18$ litros de alcohol y $\frac{5}{8}(48) = 30$ litros de agua. Al extraer $\frac{2}{3}$ de la mezcla, se ha extraído $\frac{2}{3}(18) = 12$ litros de alcohol y ha quedado $\frac{1}{3}(18) =$ **6 litros** de alcohol en el reservorio.

Rpta.: 6 litros

Problema 4

Un depósito contiene 30 litros de vino del cual se extrae 1/5 de su contenido y se reemplaza totalmente por agua. Enseguida se extrae 1/4 de la mezcla y también se reemplaza por agua; por último se extrae 1/3 de la nueva mezcla y también se reemplaza totalmente por agua. ¿Cuántos litros de vino queda ahora en el depósito?

Resolución

Antes de proceder con la resolución, vamos a hacer una anotación:

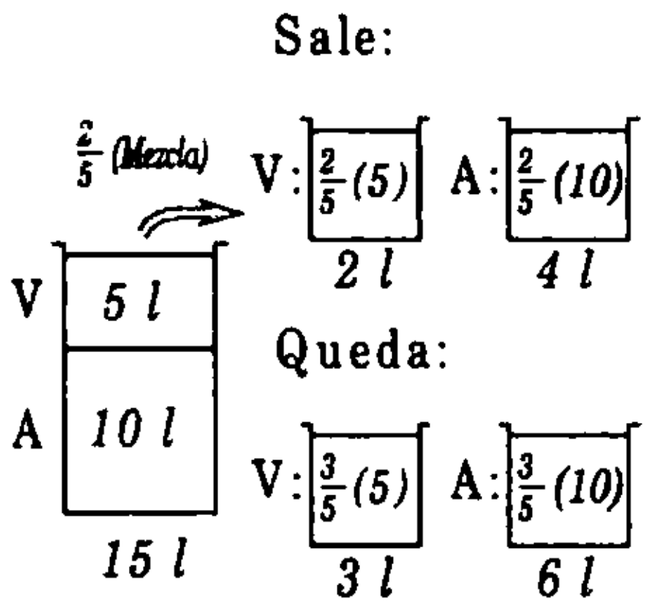
Divertijos 6

Las tres boinas

En una cárcel se hallaban tres presos: uno tenía vista normal, el otro era tuerto y el tercero, ciego. Habiendo decretado el gobierno indultar a uno de cada tres presos, el alcaide decidió conceder esa gracia al que averiguara un enigma. Dijo a los presos que de un conjunto de tres boinas blancas y dos negras, les iba a poner a cada uno de ellos en la cabeza, sin que ellos la vieran, una boina. El que adivinara el color de su boina saldría libre. Apagaron las luces y el alcaide colocó a los tres una boina blanca y escondió las dos negras. Encendió luego la luz y preguntó al preso con vista normal si podía decir cuál era el color de su boina. Confesó que no podía. Hizo la misma pregunta al tuerto y éste confesó también su ignorancia. Como mera formalidad, pero seguro de que el ciego no podría averiguar lo que los videntes no habían podido, repitió la misma pegunta al ciego. Este dejó asombrado al alcaide al responder que,aunque no podía ver las boinas que llevaban los otros presos, sin embargo deducía de lo que ellos habían contestado que él llevaba una boina blanca. ¿Cuál fue su razonamiento?

Supongamos que en un recipiente hay 5 litros de vino y 10 de agua. Hagamos dos experimentos:

1° Extraer 2/5 de la mezcla: *Cuando se extrae 2/5 de la mezcla, se extrae los 2/5 de cada uno de los componentes y queda en el recipiente los 3/5 de cada uno de los componentes.*



2° Reemplazar por agua: *Al reemplazar por agua la mezcla extraída, el vino que quedó permanece igual, sólo la cantidad de agua queda incrementada.*

Para el caso, basta controlar la cantidad de vino que sale y queda:

- Hay 30 l, se extrae $\frac{1}{5}(30)$ queda $\frac{4}{5}(30) = 24\ l$

(Cuando se reemplaza por agua, el vino que quedó no varía)

- Luego se extrae $\frac{1}{4}(24)$ queda $\frac{3}{4}(24) = 18\ l$

- Luego se extrae $\frac{1}{3}(18)$ queda $\frac{2}{3}(18) = 12\ l$.

Rpta.: 12 l

Problema 5

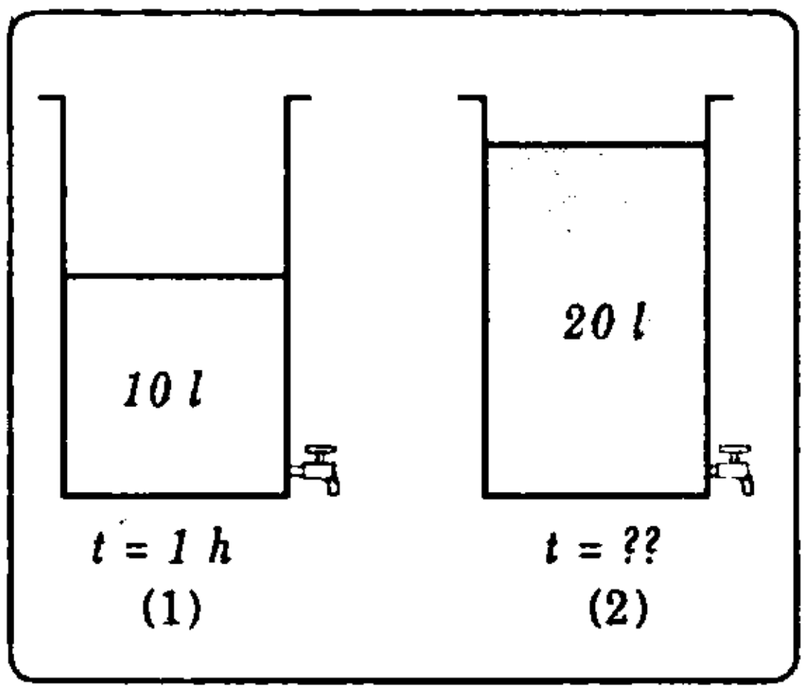
Un depósito contiene 36 litros de vino, de él se extrae 6 litros de vino y se reemplaza por agua, luego se extrae 12 litros de mezcla y también se reemplaza por agua, por último se extrae 9 litros de la nueva mezcla y enseguida se reemplaza por agua. ¿Cuántos litros de vino queda en el depósito?

Resolución

- Se extrae 6 l $\diamond \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ de mezcla $\Rightarrow$ sale $\frac{1}{6}(36)$ y queda, $\frac{5}{6}(36) = 30\ l$

COMENTARIO

Consideramos que el reservorio mostrado tiene capacidad para 20 litros de agua.



En el fondo del reservorio hay un grifo de desagüe.
Estando el reservorio lleno hasta la mitad, abrimos el grifo y tomamos el tiempo hasta que termine de salir todo el agua; supongamos que tardó 5 minutos. Enseguida llenamos completamente el reservorio y acto seguido abrimos el grifo de desagüe y esperamos que salga todo el agua.
¿Cuánto tiempo crees que se demore esta vez? ¿Tardará 10 minutos? ¿Más de 10 minutos o menos de 10 minutos?
Pues, puedes hacer el experimento y comprobarás que no demora 10 minutos. ¡Demora menos de 10 minutos! ¿Porqué? Porque la velocidad con que el agua sale por el grifo no es la misma en todo momento. Es mayor cuánto más agua haya por encima de la ubicación del grifo.
¿De qué otro modo podemos comprobar este fenómeno? Es muy fácil. En un balde viejo o en una lata, haz dos orificios con clavo, uno cerca de la base y otro cerca al borde superior y o luego llénalo de agua; observarás que ocurre lo que muestra la siguiente figura.

• Se extrae 12 l $\diamond \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ de mezcla $\Rightarrow$ sale $\frac{1}{3}(30)$ y queda $\frac{2}{3}(30) = 20l$.

• Se extrae 9l $\diamond \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ de mezcla $\Rightarrow$ sale $\frac{1}{4}(20)$ y queda $\frac{3}{4}(20) = 15\,l$

Rpta.: 15 litros

Problema 6

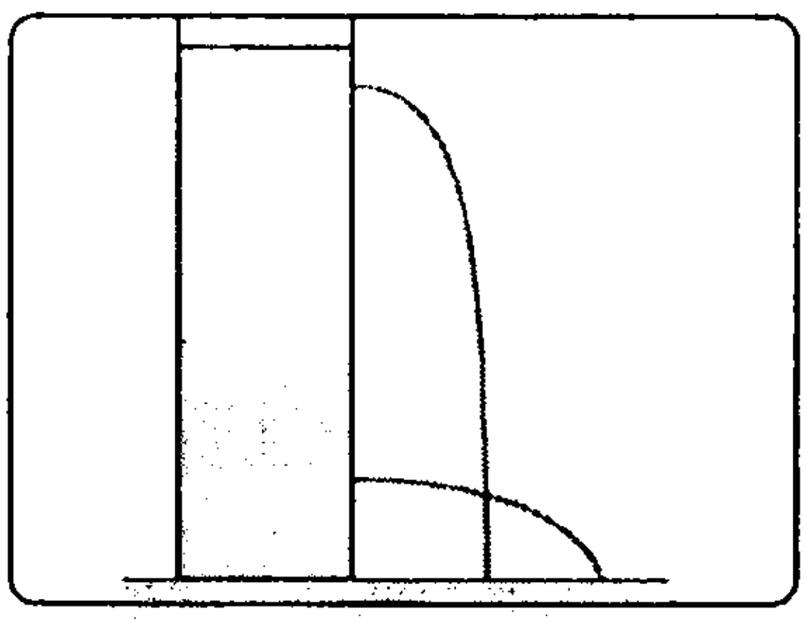
Un panadero tiene cierto número de panes a la venta. Primero vende 1/3 de los panes y 100 panes más, luego vende 3/4 de los que quedaron y 10 panes más. Por último vende la mitad del último resto y aún le quedan 20 panes ¿Cuántos panes vendió?

Resolución

Un modo de abordar la resolución de este problema, es el siguiente: antes de empezar la venta había un número de panes, al término de las ventas este número queda reducido a 20. El proceso mediante el cual se ha llegado obtener 20, es mediante operaciones hechas con el número original. En tal virtud, podemos retornar de 20 hasta el número original, realizando las mismas operaciones pero en forma invertida.

Las operaciones realizadas con el número original para llegar a 20, las llamaremos OPERACIONES DIRECTAS. Las operaciones que haremos con 20 para descubrir el número original, las llamaremos, OPERACIONES INVERSAS.

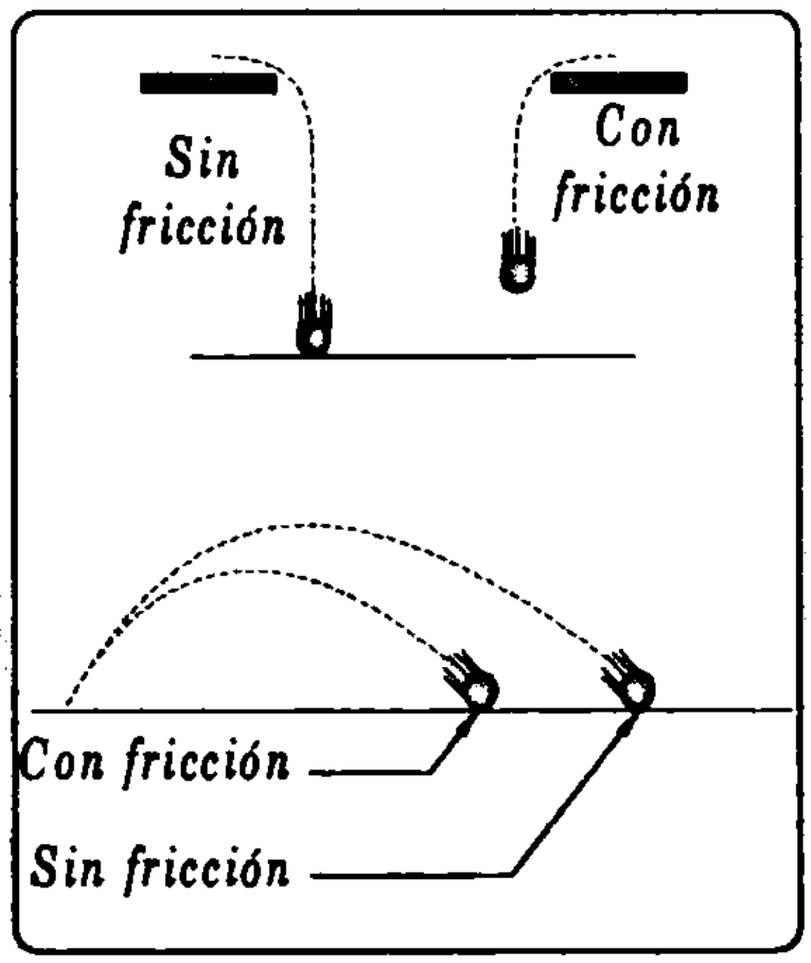
ENUNCIADO	OPERACIONES DIRECTAS	OPERACIONES INVERSAS
1° vende $\frac{1}{3}$	$\times\frac{2}{3}$	$20 \times 2 = 40$
y 100 más	-100	$40 + 10 = 50$
2° vende $\frac{3}{4}$	$\times\frac{1}{4}$	$50 \times 4 = 200$
y 10 más	-10	$200 + 100 = 300$
3° vende $\frac{1}{2}$	$\times\frac{1}{2}$	$300 \times \frac{3}{2} = \boxed{450}$
Queda	20	



De esta observación saca tus propias conclusiones.

APROXIMADO

¿Porqué entonces, en los problemas sobre grifos, consideramos como si el agua saliera del recipiente con la misma velocidad en cada momento?.
Pues en realidad, si queremos ser precisos, los resultados que obtenemos son aproximados.
Pero no es el único caso. Vayamos por ejemplo, a la caída libre o al movimiento parabólico. En los cálculos que se hacen para fines de la enseñanza de la física, no se considera la fricción del aire. ¿Y, porqué no consideramos estos detalles?
Porque la matemática que utilizamos es muy limitada, se requiere de matemáticas más avanzadas para describir con precisión estos fenómenos.



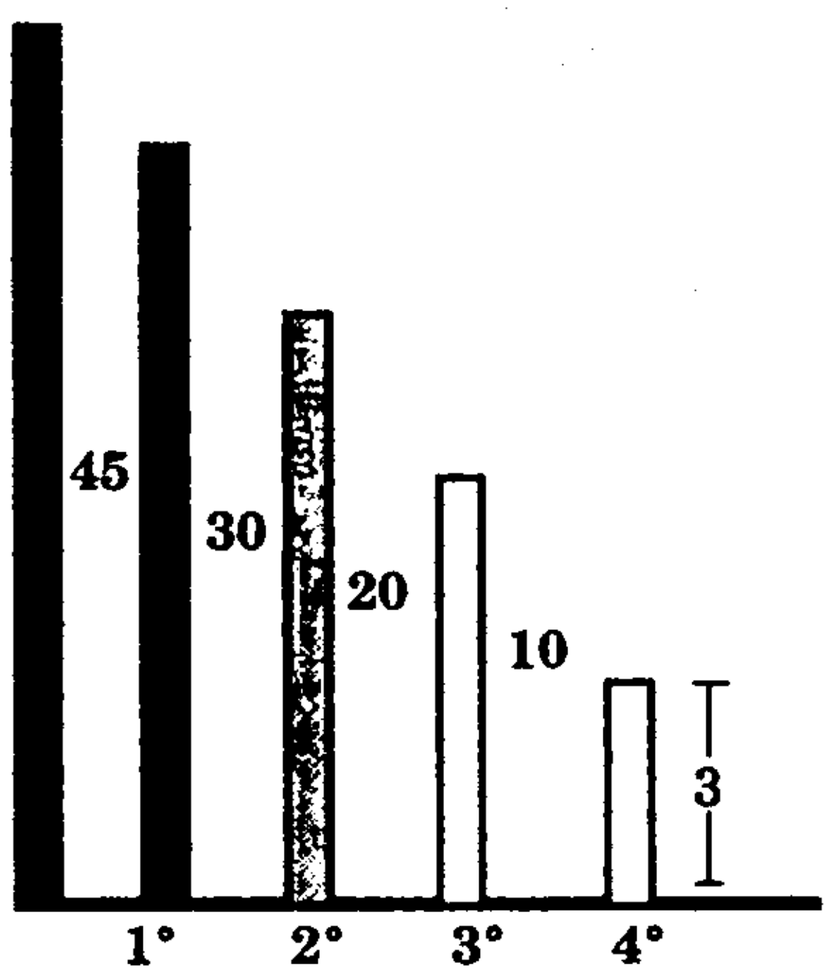
∴ Al empezar tenía 450, como le quedaron 20, entonces vendió 450 – 20 = 430 **Rpta.: 430**

Problema 7

Una pelota que cae de cierta altura, pierde 1/5 de la altura de donde cayó, y 6 m más en el primer rebote. En el segundo rebote pierde 1/5 de la altura de donde cae ahora y 4 m más. En el tercer rebote pierde 1/5 de la altura de donde cae esta vez y 6 m más. En el cuarto rebote pierde 1/5 de la altura de donde cae y 5 m más. Determinar la altura inicial de donde cayó la pelota sabiendo que en el cuarto rebote alcanzó 3 m de altura.

Resolución

ENUCIADOS	OPERACIONES DIRECTAS	OPERACIONES DIRECTAS
		$3 + 5 = 8$
1er rebote	$\times\frac{4}{5}$, -6	$8 \times \frac{5}{4} = 10$
		$10 + 6 = 16$
2do rebote	$\times\frac{4}{5}$, -4	$16 \times \frac{5}{4} = 20$
		$20 + 4 = 24$
3er rebote	$\times\frac{4}{5}$, -6	$24 \times \frac{5}{4} = 30$
		$30 + 6 = 36$
4to rebote	$\times\frac{4}{5}$, -5	$36 \times \frac{5}{4} = 45\ m$
Queda: 3 m		



Rpta.: 45 m

Divertijo 7

Ecuación sencilla

76 = 24

Moviendo las 4 cifras que aparecen en esta falsa igualdad, consigue una igualda verdadera.

Problema 8

Un empresario invierte su capital, del siguiente modo: 1/6 de su capital, en terrenos; 2/7 del resto en maquinarias; 3/5 del nuevo resto en un negocio de computadores, los 5/9 del último resto en acciones de una empresa y los restantes 400 soles, los depositó en el banco. ¿Puedes calcular el capital del empresario?

Resolución

Siguiendo el mismo criterio utilizado en la resolución de los problemas anteriores, se llega a la siguiente solución:

Si C es el capital: $\frac{5}{6}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{5}\times\frac{4C}{9}=400 \Rightarrow C=3780$

Rpta.: S/. 3 780

Problemas

1. A un recipiente que contiene 8 litros de alcohol puro se le agrega 12 litros de agua.

¿Qué parte de la mezcla es alcohol puro?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

2. Se mezclan 12 litros de vino con 16 litros de alcohol puro. Si de la mezcla se extrae la cuarta parte.

¿Cuántos litros de vino quedan?

A) 9 *l* B) 6 *l* C) 8 *l* D) 5 *l* E) 3 *l*

3. Un depósito contiene 30 litros de vino, del cual se extrae 1/5 de su contenido y se reemplaza totalmente por agua. Enseguida se extrae 1/4 de la mezcla y también se reemplaza por agua; por último se extrae 1/3 de la nueva mezcla y también se reemplaza totalmente por agua. ¿Cuántos litros de vino queda ahora en el depósito?

A) 10 litros B) 12 litros C) 15 litros
D) 16 litros E) 18 litros

4. Un depósito contiene 48 litros de vino, de él se extrae 16 litros de vino y se reemplaza por agua, luego se extrae 30 litros de mezcla y también se reemplaza por agua; por último se extrae 8 litros de la nueva mezcla y enseguida se reemplaza por agua. ¿Cuántos litros de vino quedan en el depósito?.

A) 10 *l* B) 15 *l* C) 18 *l* D) 20 *l* E) 24 *l*

5. En un recipiente se tiene una mezcla de 30 litros de alcohol con 10 litros de agua. Se extraen 1/5 de su contenido y se reemplaza por agua, enseguida se extrae 1/3 de la nueva mezcla y se reemplaza por agua, por último se extrae 1/4 de la última mezcla y también se reemplaza por agua. ¿Cuántos litros de alcohol quedan en el recipiente?

A) 6 litros B) 8 litros C) 10 litros
D) 12 litros E) 15 litros

6. Carlitos compró cierta cantidad de caramelos; 1/3 de ellos regaló a su hermanito menor, los 2/5 del resto a su primo Juan y 1/4 del último resto a su prima Marilú, quedándose únicamente con 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos compró Carlitos?

A) 10 caramelos B) 12 caramelos
C) 15 caramelos
D) 16 caramelos E) 18 caramelos

7. *Néstor fue de compras a una feria, primero gastó 1/4 de su dinero en ropa, luego con los 2/3 del resto compró un reloj, más tarde compró un helado de S/. 10, finalmente con los 3/7 del último resto compró un regalo para su mamá. Quedándose únicamente con S/. 16 para el cine. ¿De cuánto disponía Néstor?*

A) S/. 150 B) S/. 152 C) S/. 160
D) S/. 162 E) S/. 170

8. *De un tanque lleno de agua, empieza a disminuir su contenido del siguiente modo: en la primera hora en su cuarta parte y 40 litros más, en la segunda hora se reduce en 3/5 de lo que quedó y se le aumenta 100 litros, y en la tercera hora disminuye en 1/3 de lo que hay ahora, quedando en el tanque 100 litros. ¿Cuál es la capacidad del tanque?*

A) 200 B) 220 C) 280
D) 300 E) 400

3.4 Reducción a la Unidad

Problema 1

En una lancha pueden caber 15 mujeres o bien 10 hombres ¿Cuántas parejas pueden caber en la mencionada lancha?

Resolución

Método (1) Reducción a la Unidad

Al abordar las 15 mujeres, cada una ocupa 1/5 de la capacidad de la lancha. Cuando abordan los 10 hombres cada uno ocupa 1/10. Cuando aborda una pareja, la mujer ocupa 1/15 y el hombre 1/10.

Entre los dos ocupan $\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{2+3}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$. *Si cada pareja ocupa 1/6 de la capacidad de la lancha, significa que en ella caben 6 parejas.*

Rpta.: 6 parejas

Método (2)

Donde caben 15 mujeres caben 10 hombres. Se deduce que, donde caben 3 mujeres caben 2 hombres. Imaginemos que la lancha está ocupada por los 10 hombres. Retiramos 2 hombres para poner 3 mujeres. Realizamos este proceso hasta que queden en parejas. Con la segunda sustitución se consigue 6 hombres y 6 mujeres, o sea, ***6 parejas****.*

Método (3)

Busquemos el menor número que contenga exactamente a 15 y a 10 (MCM). Este número es 30.
*Para transportar 30 hombres necesitaremos 3 lanchas y para transportar 30 mujeres, 2 lanchas. Entonces para transportar 30 hombres y 30 mujeres, o sea 30 parejas, se requiere 3 + 2 = 5 lanchas, lo cual implica que en cada lancha caben 30 ÷ 5 = **6 parejas.***

¿Has entendido los tres métodos? Espero que sí. Los problemas siguientes, intenta resolver por los tres métodos. Nosotros exponemos el método de reducción a la unidad.

Problema 2

Martín puede hacer un obra en 56 días, mientras que Isaac, puede hacer la misma obra en 42 días. Trabajando juntos, ¿qué tiempo les tomara la obra?

Resolución

En 1 día:

Martín hace: $\frac{1}{56}$

Isaac hace: $\frac{1}{42}$

Entre los 2: $\frac{1}{56} + \frac{1}{42} = \frac{1}{24}$

Juntos, en un día hacen $\frac{1}{24}$ de la obra, toda la obra les tomará 24 días.

Rpta.: 24

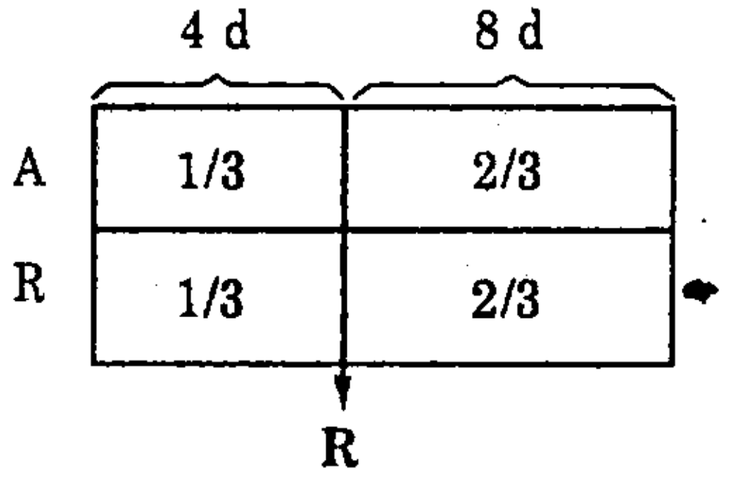
Problema 3

Antonio y Raúl se comprometieron construir un muro en 12 días. Pero, luego de trabajar juntos durante 4 días, Raúl se retiró del trabajo, razón por la cual Antonio entregó la obra con 12 días de retraso. De haberse retirado Antonio, ¿con cuántos días de retraso habría entregado la obra Raúl?

Resolución

Normalmente cada uno haría su parte en 12 días. En 4 días, cada uno ha hecho 1/3 de lo suyo y le resta 2/3

Hagamos un esquema:



Divertijo 8
La herencia

En circunstancias en que regresaba a su pueblo, un campesino fue enterrado por una avalancha de tierra, donde murió junto con su caballo en el que iba montado. Días después, sus tres hijos hallaron un testamento que el precavido padre había dejado. En él dejaba 24 caballos para sus 3 hijos; la mitad para el mayor, un tercio al segundo y un octavo para el menor. Habiendo muerto uno de los caballos ¿cómo lograron repartirse los caballos restantes?

Si Antonio entregó con 12 días de tardanza, es porque éste es el tiempo que le tomó hacer la parte inconclusa que dejó Raúl.

Luego:

Antonio hace en 12 días lo que Raúl haría en 8 días.
Lo que Antonio haría en 8 días, Raúl haría en en x días.

$$x = \frac{8 \times 8}{12} = 5\frac{1}{3}$$

Rpta.: $5\frac{1}{3}$ días

Problema 4

Un cilindro tiene un caño de llenado, el cual puede llenar en 20 minutos y otro caño de vaciado, que puede vaciar totalmente en 36 minutos.

Estando vacío el cilindro, se abre el caño de llenado y 4 minutos más tarde el caño de vaciado. ¿En cuántos minutos se llenará totalmente el cilindro?

Resolución

• En los primeros 4 minutos se llena $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ del cilindro, entonces falta llenar $\frac{4}{5}$ del cilindro.

• En cada minuto siguiente, el primero llena **1/20** y el segundo vacea **1/36** del cilindro, entre los dos llenan:

$$\frac{1}{20} - \frac{1}{36} = \frac{1}{45}$$

• Luego: *en 1 minuto llenan 1/45 del reservorio*
en x minutos los 4/5 que falta

$$x = \frac{4}{5} \times 45 = 36 \text{ min}$$

∴ Todo el cilindro se ha llenado en 36 + 4 = 40 min

Rpta.: 40 min

Problema 5

Tres grifos A, B y C pueden llenar un reservorio en 60, 48 y 80 horas respectivamente. Estando vacío el reservorio, se abren los grifos A, B y C con intervalos de 4 horas. ¿En cuántas horas podrán llenar todo el reservorio?

La muerte de Arquímedes

—Cuando la ciudad de Siracusa fue tomada al asalto por las fuerzas de Marcelo, general romano, se hallaba el geómetra absorto en el estudio de un problema, para cuya solución había trazado una figura geométrica en la arena.

Allí se hallaba el geómetra enteramente olvidado de las luchas, de las guerras y de la muerte.

Sólo le interesaba la investigación de la verdad. Un legionario romano lo encontró y le ordenó que se presentara ante Marcelo. El sabio le pidió que esperara un momento hasta que acabara la demostración que estaba haciendo. El soldado insistió y le cogió del brazo: —cuidado. ¡Mira donde pisas! —le dijo el geómetra—. ¡No me borres la figura! Irritado al ver que no le obedecía inmediatamente, el sanguinario romano, de una puñalada, postró sin vida al mayor sabio de aquel tiempo.

Marcelo que había dado órdenes de que se respetara la vida de Arquímedes, no ocultó el pesar que le causaba la muerte del genial adversario. Sobre la lápida de la tumba que mandó erigirle, hizo grabar una circunferencia inscrita en un triángulo, figura que recordaba uno de los teoremas del célebre geómetra.

(Tomado de Los más grandes del ingenio matemático)

Resolución

- A funciona "t" horas, entonces llena: $\frac{t}{60}$ del reservorio.
- B funciona $(t-4)$ horas, entonces llena: $\frac{t-4}{48}$ del reservorio.
- C funciona $(t-8)$ horas, entonces llena: $\frac{t-8}{80}$ del reservorio.
- Donde: $\frac{t}{60}+\frac{t-4}{48}+\frac{t-8}{80}=1 \Rightarrow t=\frac{71}{3}$ ***Rpta.: 23 h 40 min***

Problemas

1. ***Un albañil puede hacer una obra en 21 días, mientras que su ayudante puede hacer la misma obra en 28 días. Trabajando juntos, ¿en qué tiempo harían dicha obra?***

   A) 49 días **B)** 20 días **C)** 15 días
   D) 12 días **E)** 10 días

2. ***Dos albañiles pueden construir un muro en 20 días; pero trabajando por separado, uno tardaría 9 días más que el otro.***

   ¿Qué tiempo tardaría este otro?

   A) 36 días **B)** 40 días **C)** 45 días
   D) 48 días **E)** 54 días

3. ***Alejandro y su hijo pueden hacer una obra en 10 días. Si después de 8 días de trabajar juntos, se retira el padre y el hijo termina lo que falta de obra en 7 días, ¿en cuántos días puede hacer toda la obra, el padre solo?***

   A) 14 días **B)** 21días **C)** 23 días
   D) 24 días **E)** 25 días

4. ***Un obrero A se demora en hacer la mitad de una obra, tanto como otro obrero B se demora en hacer los 5/6 de la misma obra. ¿Cuánto se demorará A en hacer la obra solo, si entre los dos tardarían 15 días?***

   A) 20 días **B)** 24 días **C)** 36 días
   D) 40 días **E)** 42 días

5. ***Daniel puede hacer una obra en 15 días y Humberto puede hacer la misma obra en 10 días. Daniel empieza a trabajar en la obra y después de 5 días se incorpora Humberto.***

   ¿A los cuántos días de la incorporación de éste concluirán la obra?

   A) A los 2 días **B)** A los 3 días
   C) A los 4 días
   D) A los 5 días **E)** A los 6 días

6. ***Un señor había alquilado un alfalfar para un mulo y un caballo. Cuando los animales habían consumido 1/8 del pasto, retiró el caballo, quedando el mulo por 14 días, hasta terminar el pasto. Si en lugar del caballo hubiera retirado el mulo, el caballo habría terminado el resto del pasto en 21 días. ¿Por cuántos días había alquilado el alfalfar?***

A) 10,5 días **B)** 8,4 días **C)** 9,6 días
D) 8,2 días **E)** 8,6 días

7. ***Dos obreros A y B se comprometieron entregar una obra al cabo de un cierto tiempo; pero A decidió no intervenir en la obra, entonces B tuvo que ejecutar solo, entregando 36 días después de la fecha fijada. Si B hubiera decidido no intervenir en la obra, A habría entregando 25 días tarde. ¿A los cuántos días debían entregar la obra?***

A) 28 días **B)** 30 días **C)** 35 días
D) 40 días **E)** 42 días

8. ***A y B pueden hacer una obra en 15 días, B y C en 12 días y A y C en 10 días. Trabajando los tres juntos, ¿en cuántos días harían dicha obra?***

A) 4 días **B)** 6 días **C)** 8 días
D) 10 días **E)** 5 días

3.5 Tanto por ciento

3.5.1. Tanto por cuanto

Problema 1

De un cajón de 50 manzanas se han malogrado dos de cada cinco. ¿Cuántas manzanas se han desperdiciado?

Resolución

Metodo (1)

De agrupar en grupos de 5 las 50 manzanas, habrían $50 \div 5 = 10$ grupos y en cada uno de ellos encontraremos 2 malogradas. Entonces habrán malogradas $2 \times 10 = 20$.

Metodo (2)

El término 2 de cada 5, que también se suele llamar 2 por 5, es igual a decir los dos quintos $\left(\frac{2}{5}\right)$. *En consecuencia, los dos quintos de las 50 manzanas están malogradas:*

$$\frac{2}{5} \text{ de } 50 = \frac{2}{5}(50) = \boxed{\textbf{20 manzanas malogradas}}$$

Cuando se precisa separar en dos clases, un conjunto muy numeroso de objetos, por ejemplo, las botellas mal llenadas de un lote de 20 000 botellas de vino, resulta muy laborioso revisarlas una por una todas las botellas. Entonces, es conveniente coger una muestra de todo el lote y contar las defectuosas que hay en ella. Digamos que escogemos al azar 40 botellas del lote y encontra-

Truco para adivinar la edad y el dinero que tiene

Un truco basado en el valor relativo de las cifras permite al adivinador del pensamiento decirle a una persona su edad y el dinero que lleva en el bolsillo.
A: Multiplique su edad por 2, sume 5, multiplique el resultado por 50, sume la cantidad de dinero que lleva en el bolsillo (inferior a cien soles), reste en número de días que tiene un año, y dígame el resultado.
(B, que tiene 35 años y lleva 76 soles en el bolsillo va pensando mentalmente. 70, 75, 3 750, 3 826, 3 461.) En voz alta, B: 3 461.
(A le suma 115 a este número y obtiene 3 576). A: Su edad es 35 años, y tiene usted 76 soles en el bolsillo.
B: Efectivamente.
Supongamos que la edad de B, es a, y que el dinero suelto que lleva en el bolsillo es b. Entonces las operaciones indicadas por A dan sucesivamente, $2a$, $2a + 5$, $100a + 250$, $100a + b + 250$, y $100a + b + 250 - 365 = 100a + b - 115$. Si se añade 115 a éste último número el resultado es $100a + b$. Ahora bien, si la edad de A está expresada por un número de dos cifras, entonces $100a + b$ tiene 4 cifras. Las 2 primeras dan el número a, y las 2 últimas el número b.

(Tomado de Paradojas Matemáticas Northrop)

mos tres defectuosas, entonces es probable que de cada 40 hayan 3 defectuosas.

Esto es lo que se conoce como "3 de cada 40" ó "3 por 40", que equivale a decir los 3/40 del lote.

3.5.2 Tanto por ciento

En cálculos similares a los anteriores se suele tomar como referencia el 100 , entonces se denomina "tanto de cada 100" ó "tanto por ciento", que equivale a las **centésimas partes de una cantidad** y se simboliza con %.

Por ejemplo el 30% de 500, significa:

$$\text{los } \frac{30}{100} \text{ de } 500 = \frac{30\times500}{100} = 150 .$$

Como podemos ver, el término 30% es igual a $\frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 0{,}30$; lo que muestra que el 30% se puede expresar como una fracción o como un número decimal. Así para calcular el 30% de 500, bastará multiplicar 0,30 por 500. Observa: 0,30 × 500 = 150.

Dado que el 100 % es $\frac{100}{100} = 1$, o sea el total de la cantidad, el 25% es la cuarta parte: $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Por consiguiente, el 25% de 360, se puede obtener de cualquiera de las tres maneras siguientes:

- $\frac{25}{100}(360) = \boxed{90}$
- $\frac{1}{4}(360) = \boxed{90}$
- $0{,}25 \times 360 = \boxed{90}$

Problema 2

De un lote de 450 chompas, 180 son amarillas y las restantes son blancas. ¿Qué porcentaje de las chompas son amarillas y qué porcentaje son blancas?

Resolución

El total de una cantidad, en términos porcentuales, es el 100%. De modo que en este caso las 450 chompas son el 100%.

EJERCICIOS

1. ¿Cuánto es:

a) el 4 de cada 25 de 200? ☐

b) el 3 de cada 40 de 120? ☐

c) el 2 de cada 15 de 600? ☐

d) el 15 de cada 77 de 1771? ☐

2. Calcular el:

a) 30% de 500 = ☐

b) 60% de 80 = ☐

c) 75% de 24 = ☐

d) 25% de 150 = ☐

e) 45% de 60 = ☐

3. ¿Qué % de 2520 es

a) 180? ☐

b) 240? ☐

c) 21? ☐

d) 45? ☐

e) 90? ☐

4. ¿El 40 % de qué número es:

a) 360? ☐

b) 94? ☐

c) 44? ☐

d) 480? ☐

e) 72? ☐

Metodo (1)

Total: 450 → 100%
Amarillas: 180 → x

$$x = \frac{180 \times 100\%}{450}$$

$$\boxed{x = 40\ \%}$$

Total: 450 → 100%
Blancas: 270 → x

$$x = \frac{270 \times 100\%}{450}$$

$$\boxed{x = 60\ \%}$$

Se observa que habiendo calculado el porcentaje de las amarillas, el porcentaje de las blancas es, 100% – 40%=60%

Metodo (2)

Dado que el porcentaje es una fracción, se calcula la fracción "**parte** entre el **todo**": $\frac{180}{450} = 0,40$ que es el decimal equivalente a 0,40 × 100% = 40%, que son las amarillas y 100% – 40% = 60%, blancas.

La multiplicación por 100% no altera el resultado ya que 100% = $\frac{100}{100} = 1$. Multiplicar por 100% es equivalente a multiplicar por 1.

Problema 3

Una fábrica ha producido un lote de 300 000 latas de sardinas. Para pasar el control de calidad no debe haber más de 30 latas defectuosas por cada 3 600 latas. El departamento de control de calidad, ha muestreado 400 latas y ha encontrado 2 defectuosas. El lote de sardinas, ¿pasará el control de calidad?

Resolución

Porcentaje permisible

$$\frac{30}{3600} = 0,008 = 0,8\%$$

Porcentaje encontrado.

$$\frac{2}{400} = 0,005 = 0,5\%$$

El porcentaje hallado no sobrepasa el límite prohibido.

Rpta.: Sí pasa el control de calidad

Principales Equivalencias

100% = 1 (Todo)

$50\% = \frac{1}{2}$ *(Mitad)*

$25\% = \frac{1}{4}$ *(Cuarta parte)*

$20\% = \frac{1}{5}$ *(Quinta parte)*

200% = 2 (Doble)

300% = 3 (Triple)

Las dos partes de un todo suman 100%

Parte 1	*Parte 2*
20%	*80%*
23%	*77%*
60%	*40%*
25%	*75%*

Ejemplo

Si gasto	*Me queda*
30%	*70%*
60%	*40%*
80%	*20%*
35%	*65%*

El incremento se suma al 100%

Si gano	*Tendría*
20%	*120%*
40%	*140%*
100%	*200%*

Problema 3

Nos hemos propuesto, en este año, cumplir con el 100% de nuestra meta. Esto es, vender 400 000 panetones. Ya hemos alcanzado el 88% de nuestra meta, ¿cuántos panetones nos falta vender para alcanzar nuestra meta?

Resolución

• Se llegó al 88% $\Rightarrow$ falta: 100% – 88% = 12%

$$\Rightarrow \text{falta vender } 12\%(400\,000) = \frac{12}{\cancel{100}}\left(4000\cancel{00}\right) = 48\,000$$

48000 panetones

Problema 4

Un camión cargado de mineral pesa 25 toneladas. Cuándo ha descargado la mitad de su carga, su peso quedó reducido al 60% ¿Cuánto pesa el camión sin carga?

Resolución

Si el camión quedó con el 60% de su peso, quiere decir que se ha descargado el 40%. Pero esta descarga es la mitad de toda la carga, esto implica que la carga es 2×40% = 80% del peso total o sea:

0,80 × 25 = 20 toneladas.

Problema 5

Por término medio, un artefacto se deprecia anualmente el 10% del precio que tenía al iniciar el año. Tras 2 años de uso, una máquina tejedora ha sido valorizada en 162 soles. ¿Qué precio tenía al iniciar su uso?

Resolución

Consideremos que el precio inicial es de 100 soles (estos cien soles se escogen por la comodidad de que los porcentajes calculados resultan enteros).

Al final del primer año su valor es 90% del precio inicial, o sea, 90% de 100 = 90 soles.

Al final del segundo año, los 90 soles se deprecian en 10% y queda en 90% de 90 = 0,9 × 90 = 81 soles.

De fracción a %

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{\cancel{5}_{1}} \times \cancel{100}^{20}\,\% = 60\%$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \cancel{100}^{25}\,\% = 75\%$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{\cancel{8}_{2}} \times \cancel{100}^{25}\,\% = 62{,}5\%$$

De decimal a %

$0{,}20 = 0{,}20 \times 100\% = 20\%$

$0{,}81 = 0{,}81 \times 100\% = 81\%$

$0{,}45 = 0{,}45 \times 100\% = 45\%$

$1{,}20 = 1{,}20 \times 100\% = 120\%$

Tanto por ciento de tanto por ciento

• *30% del 40% de 200*

$$= \frac{30}{100} \times \frac{40}{100} \times 200 = 24$$

• *20% del 20% de 80*

$$= \frac{20}{100} \times \frac{20}{100} \times 80 = 3{,}2$$

Tengo 800 soles. Si gasto el 30% de lo que tengo me queda el 70% de 800. Si gasto el 40% de lo que me queda, tendría:

60% del 70% de 800

$$= \frac{60}{100} \times \frac{70}{100} \times 800 = 336$$

Pero la máquina tejedora ha sido valorizada en 162 soles y no en 81 soles como nos ha resultado. Luego:

Si suponiendo 100 soles de precio inicial, el precio final resulta 81 soles, ¿Cuánto se debe considerar para que el precio final sea 162 soles?

$$\begin{matrix} 100 \rightarrow 81 \\ x \rightarrow 162 \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{162 \cdot 100}{81} \Rightarrow \boxed{x = 200 \text{ soles}}$$

Problema 6

Un empleado gana 30% más de lo que gana su ayudante. El empleado recibió un aumento del 40% de su sueldo y el ayudante, el 20%. Luego de estos aumentos el sueldo de ambos suman S/. 906. ¿Cuánto ganaba el ayudante antes de recibir el aumento de sueldo?

Resolución

		Antes del aumento	Luego del aumento
• Sean:	Ayudante:	100	120%(100) = 120
	Empleado:	130	140%(130) = 182
			Total = 302

• Luego:

$$\begin{matrix} 100 \rightarrow 302 \\ x \rightarrow 906 \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{906 \cdot 100}{302} \Rightarrow \boxed{x = 300 \text{ soles}}$$

Problema 7

De los estudiantes de un salón de clases el número de varones es el 80% de las mujeres. Si el 75% de los varones de este salón se van de paseo con el 40% de las mujeres, ¿Qué porcentaje de los hombres que se quedaron equivale al 10% de las mujeres que no fueron de paseo?

Resolución

• Sean:

$$\#\ Mujeres = 100 \begin{cases} Al\ paseo:\ 40\%(100) = 40 \\ quedan:\ 60\%(100) = 60 \end{cases}$$

$$\#\ Hombres = 80 \begin{cases} Al\ paseo:\ 75\%(80) = 60 \\ quedan:\ 25\%(80) = 20 \end{cases}$$

EJERCICIOS

a) Tengo 900 soles, si gasto el 40% de lo que tengo y gano el 20% de lo que me queda tendría:

120% del 60% de 900:

$$\frac{120}{100} \times \frac{60}{100} \times 900 = 648$$

b) Tengo 720 soles. Si gasto el 30% de lo que tengo y gano el 40% de lo que me queda tendría:

140% del 70% de 720:

$$\frac{140}{100} \times \frac{70}{100} \times 720 = 705{,}6$$

c) Si gano el 20% de lo que tengo y pierdo el 25% de lo que ahora tengo, ¿qué % de lo tenía tendría al final?

Tendría:

El 75% del 120% :

$$\frac{75}{100} \cdot \frac{120}{100} = 0{,}9 = 90\%$$

De otra forma:

$$\frac{75}{100} \cdot 120\% = \frac{75 \times 120\%}{100} = 90\%$$

• *El 10% de las mujeres que no fueron de paseo es 10% (60) = 6.*

Los hombres que quedaron son 20. ¿Qué porcentaje de 20 es 6?:

$$\begin{matrix} 20 \rightarrow 100\% \\ 6 \rightarrow x \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{6 \times 100\%}{20} = 30\%$$

Rpta.: 30%

Problemas

1. ***De 480 bolsas de azúcar se han perdido 36 bolsas. ¿Qué porcentaje de las bolsas se han perdido?***

A) 75% **B)** 7,5% **C)** 20%
D) 15% **E)** 8%

2. ***El 40% de buzos de un lote son azules y los restantes, rojos. Si son 120 rojos, ¿Cuántos buzos hacen el lote?***

A) 180 **B)** 140 **C)** 300
D) 180 **E)** 200

3. ***Una tienda comercial permite que sus clientes puedan llevarse cualquiera de los artefactos de la tienda habiendo pagado el 60% del precio.***

Un cliente quiere llevarse un televisor que cuesta 480 soles y dispone de 200 soles ¿Cuánto le falta para llevarse el televisor?

A) S/. 80 **B)** S/. 88 **C)** S/. 78
D) S/. 90 **E)** S/. 120

4. ***Narda ha comprado un auto cero kilómetros. Luego de dos años de uso quiere venderlo en 30 mil soles. Para la valorización ha considerando una devaluación del 20% en el primer año y 25% en el segundo. ¿A qué precio lo compró?***

A) 50 mil **B)** 40 mil **C)** 40 mil
D) 35 mil **E)** 45 mil

5. ***Una tela al ser lavada se encoge en 10%. Si compró 90 metros de esta tela a 20 soles el metro, ¿a cómo debo vender el metro, después de lavarla, para ganar 468 soles, en la operación?***

A) S/. 24 **B)** S/. 28 **C)** S/. 30
D) S/. 26 **E)** S/. 32

6. ***Festino ha calculado que el 60% de los asistentes a la última fiesta que él organizó fueron mujeres.***

La entrada fue 12 soles para los hombres y 10 soles para las mujeres. Si la recaudación fue de 7776 soles, ¿cuántos hombres asistieron a dicha fiesta?

A) 288 **B)** 144 **C)** 272
D) 172 **E)** 240

7. ***Se ha ejecutado el 45% de una obra. Se estima que para ejecutar el 60% de lo que falta se va requerir 66 días. Calcula, cuántos días de trabajo requiere la ejecución de toda la obra.***

A) 180 días **B)** 150 días **C)** 190 días
D) 200 días **E)** 240 días

8. ***El 80% del 60% de los asistentes a una conferencia se han inscrito para la siguiente conferencia. Si hay 144 inscritos para la próxima conferencia, ¿Cuántos asistieron al evento referido?***

A) 300 **B)** 250 **C)** 320
D) 240 **E)** 350

9. ***Se ha determinado que de las visitas de un museo el 80% son extranjeros, de ellos el 45% son mujeres y de las cuales 60% son mayores de 40 años. Se ha estimado para el próximo mes 5 000 visitantes, ¿cuántas mujeres extranjeras mayores de 40 años espera recibir el próximo mes dicho museo?***

A) 4 032 **B)** 1 080 **C)** 648
D) 864 **E)** 960

10. ***Se ha producido 12 000 toneladas de mineral con 7% de cobre. La planta metalúrgica ha recuperado de este mineral 1 140 toneladas de concentrado con una recuperación del 95%. ¿Cuál es la pureza del concentrado?***

A) 68% **B)** 70% **C)** 72%
D) 75% **E)** 78

Aplicaciones comerciales

Problema 8

Se vendió un artículo en 600 soles ganando el 20% del costo. ¿Cuánto se ganó?

Resolución

Precio de venta: 600 soles → 120%

Ganancia: x → 20%

$$\Rightarrow \quad x = \frac{20\% \times 600}{120\%} = 100$$

Rpta.: S/. 100

Problema 9

Se vende una lavadora en S/. 90 por debajo de su precio de costo. Sabiendo que en esta venta la pérdida es el 30% del precio de venta, ¿cuál fue el costo?

Resolución

Pérdida: S/. 90 → 30%

Precio de C: x → 100%

$$x = \frac{100\% \times 90}{30\%} = 300$$

∴ Precio de costo: 300

Rpta.: S/. 390

Problema 10

Dos artículos se vendieron al mismo precio. El primero ganando el 20% del costo y el segundo perdiendo el 20% también del costo ¿Se ganó o se perdió?

Resolución

• Lo que tienen de igual son los precios de venta, mas no los costos. Puesto que el 20% de ganancia y el 20% de pérdida están aplicados a costos distintos también son distintos. ¿Cuál de ellos es mayor?. Veamos.

• *Sea 100 los precios de venta:*

Los 35 camellos

Hacía pocas horas que viajábamos sin detenernos cuando nos ocurrió una aventura digna de ser relatada, en la que mi compañero Beremiz, con gran talento puso en práctica sus habilidades de eximio cultivador del Algebra.

Cerca de un viejo albergue de caravanas medio abandonado, vimos tres hombres que discutían acaloradamente junto a un hato de camellos.

Entre gritos e improperios, en plena discusión, braceando como posesos, se oían exclamaciones:

—¡Que no puede ser!

—¡Es un robo!

—¡Pues yo no estoy de acuerdo!

El inteligente Beremiz procuró informarse de lo que discutían.

—Somos hermanos, explicó el más viejo, y recibimos como herencia esos 35 camellos.

Según la voluntad expresa de mi padre, me corresponde la mitad, a mi hermano Hamed Namir una tercera parte y Harim, el más joven, sólo la novena parte. No sabemos, sin embargo, cómo efectuar la partición y a cada reparto propuesto por uno de nosotros sigue la negativa de los otros dos. Ninguna de las particio nes ensayadas hasta el momento, nos ha ofrecido un resultado aceptable. Si la mitad de 35 es 17 y medio, si la tercera parte y también la novena de dicha cantidad tampoco son exactas ¿cómo proceder a tal partición?

—Muy secillo, dijo el hombre que calculaba. Yo me comprometo hacer con justicia ese reparto, más antes permítanme que una a esos 35 camellos de la herencia este espléndido animal que nos trajo aquí en buena hora.

En este punto intervine en la cuestión.

Para el primero

Pv : 100 → 120% Costo
Ganancia (G): → 20% Costo

$$\Rightarrow \quad G = \frac{20\% \times 100}{120\%}$$

G = 16,66

Para el segundo

Pv : 100 → 80% Costo
Pérdida (P): → 20% Costo

$$\Rightarrow \quad P = \frac{20\% \times 100}{80\%}$$

P = 25

La pérdida es mayor que la ganancia.

Problema 11

El precio de un artículo se aumenta en 25%. Para volverlo al precio original, ¿en qué porcentaje se debe disminuir?

Resolución

Sean: Precio inicial: 100
aumentando 25% : 125 → 100%
Debe disminuir en: 25 → x

$$x = \frac{25 \times 100\%}{125} = 20\%$$

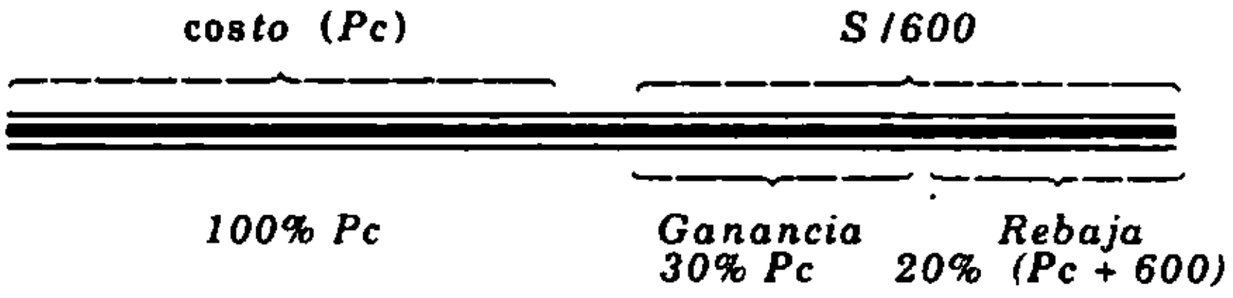
Rpta.: 20%

Problema 12

Para fijar el precio de un artículo, se aumenta el precio de costo en S/. 600, pero en el momento de realizar la venta se rebaja 20% y aún así se vende ganando el 30% del costo. ¿Cuál es el precio de costo del artículo?

Resolución

Esquematizado: (Pc = precio de costo)



Del gráfico: 30%Pc + 20%(Pc + 600) = 600
30 %Pc + 20%Pc + 20% 600 = 600
50% Pc = 80%600
Pc = 960

Rpta.: S/. 960

—¿Cómo voy a permitir semejante locura? ¿Cómo vamos a seguir el viaje si nos quedamos sin el camello?

—No te preocupes Bagdalí, me dijo en voz baja Beremiz. Sé muy bien lo que estoy haciendo. Cédeme tu camello y verás a qué conclusión llegamos.

Y tal fue el tono de seguridad con que lo dijo, que le entregué sin el menor titubeo mi bello jamal, que, inmediatamente, pasó a incrementar la cáfila que debía ser repartida entre los tres herederos.

—Amigos míos, dijo, voy a hacer la división justa y exacta de los camellos que como ahora ven son 36.

Y volviéndose hacia el más viejo de los hermanos, habló así:

—Tendrías que recibir, amigo mío, la mitad de 35, esto es: 17 y medio. Pues bien, recibirás la mitad de 36 y, por tanto, 18. Nada tienes que reclamar puesto que sales ganando con esta división.

Y dirigiéndose al segundo heredero, continuó:

— Y tú, Hamed, tendrías que recibir un tercio de 35 es decir 11 y un poco más. Recibirás un tercio de 36, esto es, 12. No podrás protestar, pues también tú sales ganando en la división.

Y por fin dijo al más joven:

— Y tú, joven Harim Namir, según la última voluntad de tu padre, tendrías que recibir una novena parte de 35, o sea 3 camellos y parte del otro. Sin embargo, te daré la novena parte de 36 o sea, 4. Tu ganancia será también notable y bien podrás agradecerme el resultado.

Y concluyó con la mayor seguridad:

—Por esta ventajosa división que a todos ha favorecido, corresponde 18 camellos al primero, 12 al segundo y, 4 al tercero, lo que da un resultado de 18 + 12 + 4 de 34 camellos. De

Descuentos y Aumentos sucesivos

Problema 13

El descuento único equivalente a 2 descuentos sucesivos del 20% más el 30% es:

Resolución

Consideremos 100 soles el precio inicial

Primer Dcto : 20% 100 ⇒ queda : 80% 100 = 80
Segundo Dcto : 30% (80) ⇒ queda : 70% 80 = 56

∴ Descuento total: 100 – 56 = 44 <> 44% (A1)

Rpta.: 44%

Problema 14

El precio de un artículo ha sufrido 3 aumentos sucesivos del 10%, 20% y 30% y luego 3 descuentos sucesivos también del 10%, 20% y 30%. ¿Cómo ha variado el precio de este artículo?

Resolución

Sea S/. 100 el precio inicial. El precio final resulta:

$$\frac{70}{100}\times\frac{80}{100}\times\frac{90}{100}\times\frac{130}{100}\times\frac{120}{100}\times\frac{110}{100}\times 100 = 86,49$$

∴ Dismunuye en: 100 – 86,49 = 13,51 <> 13,51%

Rpta.: 13,51%

Variaciones Porcentuales

Problema 15

Si el lado de un cuadrado aumenta en 20%, ¿en qué tanto por ciento aumenta el área?

Resolución

Sean:

	Inicial	Final
Lado :	10	12
Area :	100	$12^2 = 144$

∴ Aumenta en 144 – 100 = 44 <> 44%. (A2)

Rpta.: 44%

los 36 camellos sobran por lo tanto dos. Uno, como saben pertenece al Bagdalí mi amigo y compañero; otro es justo que me corresponda, por haber resuelto a satisfacción de todos el complicado problema de la herencia.

— Eres inteligente, extranjero, exclamó el más viejo de los tres hermanos, y aceptamos tu división con la seguridad de que fue hecha con justicia y equidad.

Y el astuto Beremiz —el hombre que calculaba — tomó posesión de uno de los más bellos jamales del hato, y me dijo entregándome por la rienda el animal que me pertenecía:

— ahora podrás, querido amigo continuar el viaje en tu camello, manso y seguro. Tengo otro para mi especial servicio.

Y seguimos camino hacia Bagdad.

Tomado de El hombre que calculaba de Malba Tahan

(A1) Descuento Unico

Luego de dos descuentos del 20% más el 30%, queda:

$$70\%80\% = \frac{70}{100}\cdot 80\% = 56\%$$

Entonces el descuento único equivalente es

$$100\% - 56\% = 44\%$$

(A2)

La variación porcentual del área sólo depende de la variación porcentual del lado y no de la longitud del lado.

Se puede tomar cualquier medida para el lado, si el aumento porcentual es de 20%, el aumento porcentual del área, es del 44%.

Problema 16

En la expresión a^2b, a aumenta en 10% y b disminuye en 20%. Entonces el valor de la expresión varía en:

Resolución

Sean:		Inicial	Final
	a	10	11
	b	10	8
	ab^2	1000	$11\times8^2 = 704$

$\therefore$ Disminuye en $1000 - 704 = 296$; donde

$1\,000 \rightarrow 100\%$

$\Rightarrow \quad 296 \rightarrow \quad x = 29{,}6\%$

Rpta.: Disminuye en 29,6%

Problema 17

Si la base de un triángulo aumenta en 25%, ¿en qué % debe disminuir la altura relativa a dicha base, para que no varíe el área?

Resolución

Sean:	Inicial	Final	
Base :	*20*	*25*	
Altura :	*10*	x	$\Rightarrow 100 = \frac{25\times x}{2}$
Area :	*100*	*100*	

$x = 8$

• La altura disminuyó en $10 - 8 = 2$

Luego: $10 \rightarrow 100\%$

$$2 \rightarrow \quad x = \quad \frac{2\times100\%}{10} = 20\%$$

Rpta.: 20%

Aplicaciones en Problemas de Mezclas

Problema 18

Una mezcla alcohólica de 10 litros, contiene alcohol al 60%. Averiguar, cuántos litros de agua contiene esta mezcla.

Resolución

Si el alcohol constituye el 60% de la mezcla, el agua resulta el 40% de la mezcla.

O sea, 40% de 10 = 0,4(10) = 4 litros de agua.

Problema 19

Una mezcla contiene 18 litros de alcohol y 42 litros de agua. ¿Cuál es la concentración de esta mezcla?

Resolución

La concentración porcentual de una mezcla alcohólica está dada por el porcentaje de alcohol puro que contiene la mezcla. La mezcla contiene 18 + 42 = 60 litros. El alcohol puro es $18 \div 60 = 0{,}30$, o sea el 30% de la mezcla.

Rpta.: 30%

Problema 20

¿Cuántos litros de agua se debe agregar a 300 litros de alcohol al 40%, para disminuir su concentración al 30%?

Resolución

Al agregar agua a la mezcla, los litros de alcohol puro no varían. La concentración sí varía, porque aumenta el volumen de la mezcla.

La mezcla contiene 40%(300) = 120 litros de alcohol puro. Estos 120 litros de alcohol puro debe ser el 30% de la nueva mezcla.

$$\begin{matrix} 120\ l \rightarrow & 30\% \\ x \rightarrow & 100\% \end{matrix} \quad \Rightarrow x = \frac{120 \times 100}{30}$$

$= 400$ *litros*

∴ Es necesario agregar 400 – 300 = 100

Rpta.: 100 litros de agua

Problema 21

Se desea aumentar la concentración de 35 litros de una mezcla alcohólica de 20% al 30%, mediante la adición de alcohol puro. ¿Cuántos litros de alcohol se debe adicionar?

Resolución

Al agregar alcohol puro, el contenido de agua de la mezcla no varía. En la nueva mezcla, el alcohol puro es el 30%, entonces, el agua será el 70% de la mezcla.

La mezcla contiene 20%(35) = 7 litros de alcohol puro y 80%(35) = 28 litros de agua. Esta agua será el 70% en la nueva mezcla. Luego:

$$\begin{matrix} 28\ l \rightarrow & 70\% \\ x \rightarrow & 100\% \end{matrix} \quad \Rightarrow x = \frac{28 \times 100}{70}$$

$= 40$ *litros de mezcla*

∴ *Hay que agregar 40 – 35 = 5 litros de alcohol puro.*

Rpta.: 5 litros de alcohol puro

Problema 22

Un recipiente A contiene 10 litros de alcohol al 20%. Otro recipiente B contiene 40 litros de alcohol al 10%. Si todo el contenido de B se vierte en A, ¿cuál es la concentración de la mezcla?

Resolución

El recipiente A contiene 20%(10) = 2 litros de alcohol puro y 10 – 2 = 8 litros de agua.

El recipiente B contiene 10%(40) = 4 litros de alcohol puro y 40 – 4 = 36 litros de agua.

La nueva mezcla contendrá 2 + 4 = 6 litros de alcohol puro y 8 + 36 = 44 litros de agua. Esto es 6 + 44 = 50, litros de mezcla con 6 litros de alcohol puro, ¿qué % de los 50 litros son los 6 litros de alcohol puro? La respuesta a esta pregunta nos da la concentración.

Es decir: 6 ÷ 50 = 0,12 que es el 12%

Rpta.: 12%

Problema 23

Se desea aumentar la concentración del 20% al 28%, de 30 litros de una mezcla alcohólica, agregándole otra mezcla alcohólica al 40% ¿Cuántos litros de la mezcla más concentrada hay que adicionar para alcanzar lo deseado.

Resolución

Los 30 litros de alcohol al 20% contiene 20%(30) = 6 litros de alcohol y 30 – 6 = 24 litros de agua.

Si agregamos x litros de mezcla al 40% de alcohol, se agrega 40% x de alcohol puro. Con lo que habría $(30 + x)$ litros de mezcla conteniendo $(6 + 40\%\, x)$ de alcohol puro. De donde la nueva concentración es:

$$\frac{6 + 40\%x}{30 + x} = 28\%$$

$$6 + 0{,}4x = 0{,}28 \times 30 + 0{,}28\, x$$

$$0{,}4x - 0{,}28x = 8{,}4 - 6$$

$$0{,}12x = 2{,}4 \Rightarrow \boxed{x = 20}$$

∴ *Hay que agregar 20 litros de alcohol al 40%.*

Problemas

1. ***Un artículo que costó 450 soles se vendió en 558. ¿Qué porcentaje del precio de costo se ha ganado?***

   A) 20% **B)** 23% **C)** 24%
   D) 25% **E)** 28%

2. ***Un televisor se ofrece en 640 soles. Pero se vende con un descuento del 20%. Si, a pesar de la rebaja se gana el 28% del precio de costo; hallar el precio de costo.***

   A) S/. 400 **B)** S/. 380 **C)** S/. 500
   D) S/. 420 **E)** S/. 380

3. ***Se ha vendido una mercadería perdiendo el 36% del precio de costo. Si esta pérdida asciende a 450 soles, ¿a qué precio se ha vendido?***

   A) S/. 950 **B)** S/. 960 **C)** S/. 890
   D) S/. 980 **E)** S/. 940

4. ***Una camioneta se ha cotizado en 18 mil soles. Sin embargo se vende con un descuento del 15%. El comprador desea venderla ganando el 40% de su inversión. ¿Qué precio debe fijar para la venta?***

   A) S/. 21 400 **B)** S/. 20 500
   C) S/. 20 420 **D)** S/. 21 500
   E) S/. 21 420

5. ***El precio de un artículo se rebaja en 20%. Para volverlo al precio original, el nuevo precio se debe incrementar en:***

   A) 20% **B)** 25% **C)** 15%
   D) 24% **E)** 30%

6. ***Para fijar el precio de venta de un artículo, se incrementa el precio de costo en 120%. En el momento de la venta se rebaja el 25% del precio ofrecido, así se vende con una ganancia de 260 soles. ¿Cuál es el precio de costo?***

   A) S/. 400 **B)** S/. 350 **C)** S/. 360
   D) S/. 450 **E)** S/. 500

7. ***Un número se aumenta en su 20%, el resultado se reduce en su 20%, luego el número original queda:***

   A) Aumentado en su 4%
   B) Disminuido en su 4%
   C) Aumentado en su 1%
   D) Igual
   E) Disminuido en su 1%

8. ***El precio de un artículo sube en 20%, luego en 30% sobre el nuevo precio. ¿Cuál es el porcentaje de aumento real sobre el precio inicial?***

   A) 44% **B)** 50% **C)** 49%
   D) 52% **E)** 56%

9. ***Si el precio de un artículo sufre tres aumentos sucesivos del 20%, 25% y 24%. ¿Cuál es el incremento porcentual del precio original con los tres aumentos?***

   A) 40% **B)** 69% **C)** 72%
   D) 86% **E)** 68%

10. ***Dos descuentos sucesivos del 20% y 30% equivalen a uno solo del:***

    A) 50% **B)** 44% **C)** 54%
    D) 56% **E)** 60%

11. ***El precio de un artículo sufre tres aumentos sucesivos del 10%, 20% y 25% y luego tres descuentos sucesivos del 28%, 25% y 20%. ¿En qué porcentaje ha aumentado o disminuido el precio original?***

A) Aumentado en su 30%
B) Aumentado en su 28,72%
C) Disminuido en su 28,72%
D) Aumentado en su 32,42%
E) Aumentado en su 28,5%

12. Si el lado de un cuadrado se aumenta en 25%, ¿en qué porcentaje aumenta el área de dicho cuadrado?

A) 50% B) 56,25% C) 54,52%
D) 56,30% E) 55,24%

13. Si el radio de un círculo aumenta en 30%, ¿en qué porcentaje aumenta el área del circulo?

A) 60% B) 56% C) 60%
D) 69% E) 70%

14. Mediante una disposición municipal se ha ordenado que los lados de un parque cuadrado debía incrementarse en 20% de su longitud. Con ello se pretende que el área aumente en:

A) 44% B) 42% C) 40%
D) 38% E) 41%

15. Si el ancho de un rectángulo se aumenta en 20% y el largo se reduce en 20%, entonces el área del rectángulo.

A) No varía
B) Aumenta en 10%
C) Disminuye en 10%
D) Aumenta en 4%
E) Disminuye en 4%

16. En la expresión AE^2, A disminuye en 20% y E aumenta en 20%. El valor de la expresión AE^2:

A) Aumenta en 20%
B) Aumenta en 15,2%
C) Disminuye en 12,5%
D) Aumenta en 4%
E) No varía

17. La base de un triángulo se ha aumentado en 25%. ¿En qué porcentaje hay que reducir la altura relativa a dicha base para que el área del triángulo no varíe?

A) 20% B) 25% C) 24%
D) 15% E) 23%

18. ¿Cuántos ml de agua debe agregarse a 15 ml de una mezcla que contiene 75% de NaCI para reducirla a una mezcla que contenga el 50% de NaCI?

A) 25 *ml* B) 12,5 *ml* C) 10 *ml*
D) 7,5 *ml* E) 2,5 *ml*

19. Se tiene 5 litros de alcohol al 80%. ¿Cuántos litros de agua se necesitan aumentar para rebajarlo al 25%?

A) 8 litros B) 10 litros C) 11 litros
D) 12 litros E) 13 litros

20. A 80 litros de alcohol al 60% se le adiciona 40 litros de agua. ¿Cuántos litros de alcohol puro debo agregar a esta nueva mezcla para obtener la concentración inicial?

A) 30 litros B) 40 litros C) 60 litros
D) 50 litros E) 80 litros

21. Dos recipientes contienen alcohol al 40% y 60% respectivamente y cuyos volúmenes están en la relación de 8 a 5. Se agrega a cada recipiente igual número de litros de agua y resulta que tienen la misma concentración de alcohol. ¿Cuál es esta concentración?.

A) 33,3% B) 20% C) 5,8%
D) $6\frac{2}{3}\%$ E) 8,5%

Problemas Resueltos

Problema 1

¿Qué fracción de 35 es 14?

Resolución

$$35 \rightarrow 1$$

$$14 \rightarrow x = \frac{14}{35} \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

Rpta.: $\frac{2}{5}$

Problema 2

Los $\frac{2}{3}$ ***de los*** $\frac{4}{5}$ ***de 18 equivalen a los*** $\frac{7}{9}$ ***de los*** $\frac{8}{11}$ ***de:***

Resolución

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot 18 = \frac{7}{9}\cdot\frac{8}{11}\cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{594}{35}$$

Rpta.: $16\frac{34}{35}$

Problema 3

Al tesorero de un club le falta 1/8 del dinero que se le entregó. ¿Qué fracción de lo que aún le queda, restituirá lo perdido?

A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{6}{7}$

Resolución

Si tuviera 8 soles perdería 1 sol y le quedarían 7 soles. ¿Qué parte de 7 es 1?. La respuesta es $\frac{1}{7}$

Rpta: $\frac{1}{7}$

Problema 4

¿Cuál es la fracción que le falta a 3,45555 ... para ser igual a la fracción 3,555 ... ?

Resolución

$$3,4555... = 3,4\widehat{5} = \frac{345-34}{90} = \frac{311}{90}$$

$$3,5555... = 3,\widehat{5} = \frac{35-3}{9} = \frac{32}{9}$$

A $\frac{311}{90}$ le falta para $\frac{32}{9}$ la diferencia:

$$\frac{32}{9} - \frac{311}{90} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Rpta.: 0,1

Problema 5

Si han transcurrido del día los $\frac{5}{7}$ ***de lo que falta transcurrir, ¿qué hora es?***

Resolución

Si faltasen 7 horas por transcurrir, las transcurridas serían 5 y el día sería de **7 + 5 = 12** horas. Pero el día es de 24 horas (2 veces 12), entonces las horas transcurridas son 5×2 = 10 h.

Rpta: 10 h.

Problema 6

Una persona debía hacer una obra en 3 días, el primer día hizo los $\frac{3}{8}$ ***de la obra, el segundo día los*** $\frac{4}{5}$ ***de lo que hizo el día***

anterior y le quedaron 26 metros de obra para el tercer día. ¿De cuántos metros consistía toda la obra?

Resolución

En los dos días ha hecho:

$$\frac{3}{8}+\frac{4}{5}\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{27}{40}$$

Entonces queda $1-\frac{27}{40}=\frac{13}{40}$ de la obra. Luego:

$$\frac{13}{40} \rightarrow 26\,m$$

$$1 \rightarrow x=\frac{26}{\frac{13}{40}} \Rightarrow \boxed{x=80}$$

Rpta.: 80 m

Problema 7

Mariano y Carlos se comprometieron a construir un muro en 15 días; pero luego de trabajar 3 días juntos, Mariano se retiró del trabajo, por lo que Carlos entregó la obra con 15 días de retraso. ¿Con cuántos días de retraso habría entregado Mariano de haberse retirado Carlos?

Resolución

Luego de trabajar tres días les faltaba 12 días para terminar el muro.

Si Carlos se retrasó 16 días es porque hizo lo que debió haber hecho Mariano en los 12 días.

De haberse retirado Carlos, Mariano se habría retrasado haciendo lo que debió haber hecho Carlos en 12 días. Luego:

Carlos		**Mariano**
$16\,d$	$\rightarrow$	$12\,d$
$12\,d$	$\rightarrow$	$x=\frac{12\cdot 12}{16}=9$

Rpta.: 9 días

Problema 8

Una persona es triple de eficiente que la otra; si entre las dos pueden hacer la obra en 6 días, ¿en cuántos días podrán hacer la misma obra cada uno por separado?

Resolución

Si dividiéramos la obra en 4 partes, uno haría 1 parte y el otro, tres partes por ser triple de eficiente.

Luego, para el menos eficiente:

Si para hacer $\frac{1}{4}$ demora 6 días

para hacer 1 demora $x=\frac{6}{\frac{1}{4}}=\boxed{24\,d}$

El triple de eficiente hará en $24\div 3 = 8$ días

Rpta: 24 d y 8 d

Problema 9

Si a los dos términos de la fracción $\frac{5}{9}$ le sumamos dos números que se diferencian en 48, se obtiene otra fracción equivalente. Hallar el mayor de los números.

Resolución

Para obtener otra fracción equivalente, los números que se agregan deben guardar la misma relación que guardan el numerador con el denominador. El numerador es como 5, el denominador como 9 y la diferencia como 4. Si 48 es como 4, (12 veces 4) entonces 9 es como $9 \times 12 = 108$.

Rpta.: 108

Problema 10

Un grupo de obreros pueden hacer una obra en 56 días, mientras que un grupo

de jóvenes pueden hacer la misma obra en 42 días. Se desea saber, el tiempo que tardarían en hacer dicha obra, trabajando juntos, ambos grupos.

Resolución

En un día ambos grupos juntos hacen

$$\frac{1}{56}+\frac{1}{42}=\frac{1}{24} \text{ de la obra.}$$

∴ Toda la obra hacen en 24 días.

Rpta: 24 días

Problema 11

"A" ha gastado $\frac{1}{3}$ de su dinero; B, $\frac{1}{4}$ de lo suyo y C, $\frac{1}{5}$ también de lo suyo. Entre los tres gastaron S/. 5200. Si el dinero de A era los $\frac{2}{3}$ de lo de B y el de éste los $\frac{4}{5}$ de lo de "C". ¿Cuánto gastó C?

Resolución

Asumamos que el dinero de C es 15k. (15 = MCM (3;5)), donde 3 y 5 son los denominadores de $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$).

Luego:

Dinero de C: 15k Gasta: $\frac{1}{5}(15k)$

Dinero de B: $\frac{4}{5}(15k)=12k$ Gasta: $\frac{1}{4}(12k)$

Dinero de A: $\frac{2}{3}(12k)=8k$ Gasta: $\frac{1}{3}(8k)$

Donde: $\frac{1}{3}(8k)+\frac{1}{4}(12k)+\frac{1}{5}(15k)=5200$

$k = 600$

Entonces el gasto de C es:

$$\frac{1}{5}(5k)=\frac{1}{5}(5\times 600)=600$$

Rpta.: S/. 600

Problema 12

Dos grifos A y B pueden llenar un estanque en 6 horas. El grifo A, funcionando solo, puede llenar en 15 horas. Estando vacío el estanque, se abre el grifo B. ¿En cuántas horas lo llenará?

Resolución

• En 1 hora ambos grifos llenarán $\frac{1}{6}$ del estanque.

• En 1 hora, "A" llenaría $\frac{1}{15}$ del reservorio.

Luego: en 1 hora, B llenaría: $\frac{1}{6}-\frac{1}{15}=\frac{1}{10}$ del estanque, entonces para llenar todo el estanque, demorará 10 horas.

Rpta: 10 h.

Problema 13

Tres grifos A, B y C pueden llenar un reservorio en 60; 48 y 80 horas respectivamente. Estando vacío el reservorio, se abren los grifos A, B y C con intervalos de 4 horas. ¿En cuántas horas llenarán todo el reservorio?

• A funciona "t" horas ⇒ llena $\frac{t}{60}$

• B funciona $(t-4)$ horas ⇒ llena $\frac{t-4}{48}$

• C funciona $(t-8)$ horas $\Rightarrow$ llena $\frac{t-8}{80}$

Donde: $\frac{t}{60}+\frac{t-4}{48}+\frac{t-8}{80}=1 \quad \Rightarrow \quad t=23\frac{2}{3}\,h$

Rpta.: 23 h 40 min

Problema 14

Un director gana 40% más de lo que gana un profesor. El sueldo del director ha sido aumentado en 20% y el del profesor en 10%. Luego de estos aumentos, el sueldo de ambos suman 1251. ¿Cuál era el sueldo del profesor, antes del aumento?

	Sin aumento	con aumento
Director:	140	120% (40) = 168
Profesor:	100	110% (100)= 110
		Total = 278

Luego:

$100 \rightarrow S/.\ 278$

$x \rightarrow S/.\ 1251 \Rightarrow \frac{1251\times100}{278}$

Rpta.: S/. 450

Problema 15

En una reunión se encuentran 20 hombres adultos, 30 mujeres adultas y 75 niños. ¿Qué porcentaje de los reunidos no son niños?

Resolución

• Total reunidos: 125 $\rightarrow$ 100%
• No son niños: 50 $\rightarrow$ x

$$x=\frac{50\times100\%}{125} \quad \Rightarrow \quad x=40\%$$

Rpta.: 40%

Problema 16

La producción de un tubérculo es de 20 toneladas por hectárea. En un terreno de 40 hectáreas, se ha incrementado el área de cultivo en 25% y la producción por hectárea se ha incrementado en 10%, ¿Cuántas toneladas de este tubérculo se espera cosechar?

Resolución

$$\frac{110}{100}\times\frac{125}{100}\times40\times20=1100$$

Rpta.: 1 100 t

Problema 17

Las ventas de una empresa aumentan en 20% y como consecuencia su utilidad se ha incrementado es 700 soles. ¿A cuánto ascienden las ventas de la empresa, si las utilidades representan el 35% de las ventas.

Resolución

Al incrementarse las ventas en **20%**, las utilidades también se incrementan en **20%**. Luego:

$20\% \rightarrow S/.700$

$100\% \rightarrow x=\frac{7000\times100}{20} \Rightarrow \boxed{x=3500}$

Las utilidades representan el **35%** de las ventas:

$35\% \rightarrow S/.3500$

$100\% \rightarrow y=\frac{3500\times100\%}{35\%} \Rightarrow \boxed{y=10000}$

Rpta.: S/. 10 000

Problema 18

En una reunión de 150 personas, las mujeres constituyen el 60% de los presentes. ¿Cuántas parejas deben llegar a esta reunión, para que el número de hombres constituya el 45% de todos los asisten-

tes?

Resolución

Mujeres: **60% (150) = 90** ⇒ hombres: 60

La diferencia es 30 y esta diferencia se mantiene cuando llegan las parejas. Cuando llegan las parejas la diferencia porcentual entre hombres y mujeres es 55%-45%=10%

Luego:

$$30 \rightarrow 10\%$$
$$x \rightarrow 100\% \Rightarrow \boxed{x = 300}$$

Como habían 150, entonces llegaron 150 personas en 150÷2 = 75 parejas.

Rpta: 75

Problema 19

De los estudiantes de un salón de clases, el número de varones es el 80% del de las mujeres. Si el 75% de los varones de este salón se van de paseo con el 40% de las mujeres, ¿qué porcentaje de los hombres que se quedaron constituyen el 10% de las mujeres que no fueron de paseo?

Resolución

$$N° \text{ mujeres} = 100 \begin{cases} \text{Al paseo} : 40\% \ (100) = 40 \\ \text{No fueron} : 60\% \ (100) = 60 \end{cases}$$

$$N° \text{ hombres} = 80\% \ (100) \begin{cases} \text{Al paseo} : 75\% \ (80) = 60 \\ \text{No fueron} : 25\% \ (80) = 20 \end{cases}$$

10% (60) = 6; luego:

$$20 \rightarrow 100\%$$
$$6 \rightarrow x = \frac{6 \times 100\%}{20} = 30\%$$

Rpta.: 30%

Problema 20

Se vende una lavadora en 60 soles por debajo de su precio de costo. Sabiendo que esta venta ocasionó una pérdida del 30% del precio de venta, ¿cuál fue su costo?

Resolución

Perdida 60 soles → 30% del Pv

Pv x → 100% de Pv

$$x = \frac{100\% \cdot 60}{30\%} = 200$$

Costo = 200 + 60 = 260

Rpta.: S/. 260

Problema 21

Mary compró una radio de segunda y después de hacerlo reparar, vendió ganando el 40% del costo. Más tarde, después de revisar sus gastos en la reparación, se dio cuenta de que realmente había ganado sólo el 30% de su costo. Sabiendo que vendió la radio en S/. 588. ¿Cuánto gastó en su reparación?

Resolución

La ganancia bruta es **40%** del costo. Dado que la ganancia neta es **30%**, entonces la reparación equivale al **10%** del costo.

$$Pv: 140\% \rightarrow 588$$
$$Rep: 10\% \rightarrow x = \frac{588 \cdot 10\%}{140\%} = 42$$

Rpta.: S/. 42

Problema 22

Dos artículos se vendieron al mismo precio. En el primero se ganó el 20% del costo y en el segundo el 10% del precio de venta. Si uno de estos artículos costó S/. 40 más que el otro. ¿A qué precio se vendió cada artículo?

Resolución

Consideremos que se vendieron en 100 soles cada uno:

1° artículo	2° artículo
$Pv : 100 \rightarrow 120\%$	$Pv : 100 \rightarrow 100\%$
$Pc_1 : x \rightarrow 100\%$	$Pc_2 : x \rightarrow 90\%$
$x = \frac{100 \times 100}{120}$	$x = \frac{100 \times 90\%}{100\%}$
$x = \frac{250}{3} = Pc_1$	$x = 90 = Pc_2$

La diferencia de costo es: $90 - \frac{250}{3} = \frac{20}{3}$

Luego:

Pv	Dif. costos	
$100 \rightarrow$	$\frac{20}{3}$	$x = \frac{40 \times 100}{\frac{20}{3}} = 600$
$x \rightarrow$	40	

Rpta.: S/. 600

Problema 23

Ganar el 20% del precio costo, equivale a ganar, ¿qué porcentaje del precio de venta?

Resolución

Si el costo fuera 100, el precio de venta sería S/. 120 ¿Qué % de 120 es 20?

$120 \rightarrow 100\%$

$20 \rightarrow x = \frac{20 \times 100\%}{120} = 16,66\%$

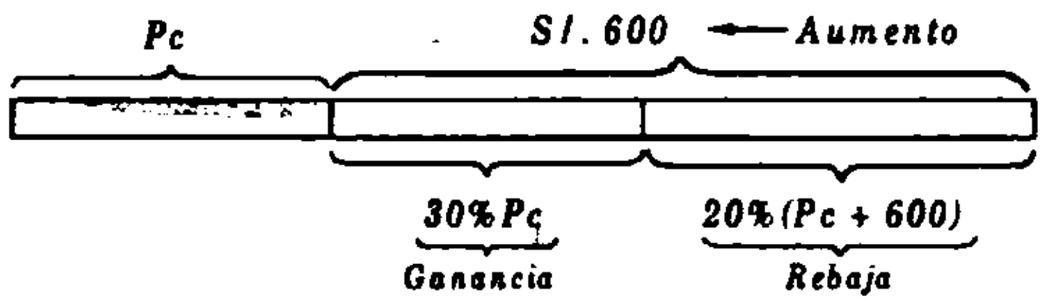
Rpta.: 16,66%

Problema 24

Para fijar el precio de venta de un artículo, se aumenta el precio de costo en S/. 600, pero al momento de realizar la venta se rebaja en un 20% y aún así se vende ganando el 30% del costo. ¿Cuál es el precio de costo del artículo?

Resolución

Graficando de acuerdo a los datos:



De la figura:

$30\% Pc + 20\% (Pc + 600) = 600$

$30\% Pc + 20\% Pc + 20\%600 = 100\% 600$

$50\% Pc = 80\%600 \rightarrow Pc = 960$

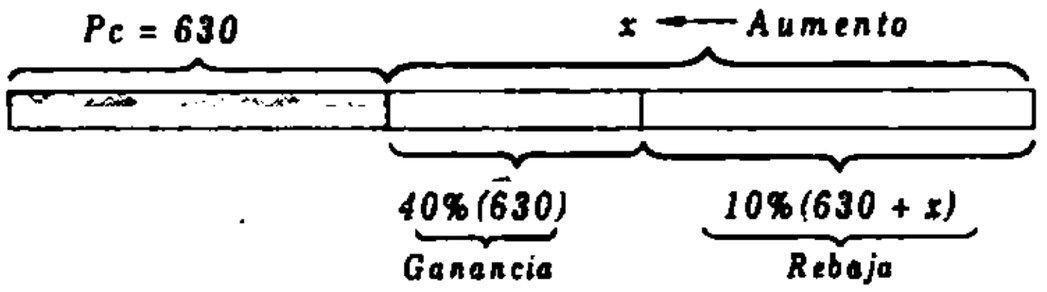
Rpta: S/. 960

Problema 25

Compré una grabadora en S/. 630. ¿En cuánto debo aumentar este precio, para que durante la venta haga una rebaja de 10% y aún así gane el 40% del costo?

Resolución

Grafiquemos de acuerdo al enunciado:



Del gráfico:

$40\%(630) + 10\%(630 + x) = x$

$40\%630 + 10\%630 + 10\%x = 100\%x$

$50\%630 = 90\%x \rightarrow x = 350$

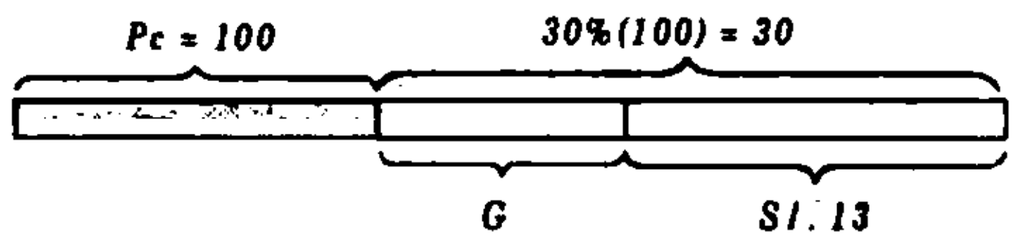
Rpta: S/. 350

Problema 26

Para fijar el precio de venta de un artículo se aumentó su costo en 30%. Pero al venderse, se hizo una rebaja del 10% de este precio fijado. ¿Qué tanto por ciento del costo se ganó?

Resolución

- Supongamos que el costo es S/.100
- Graficando:



Del gráfico:

$G + 13 = 30$

$G = S/.\ 17$

$Pc = S/.\ 100 \rightarrow 100\%$

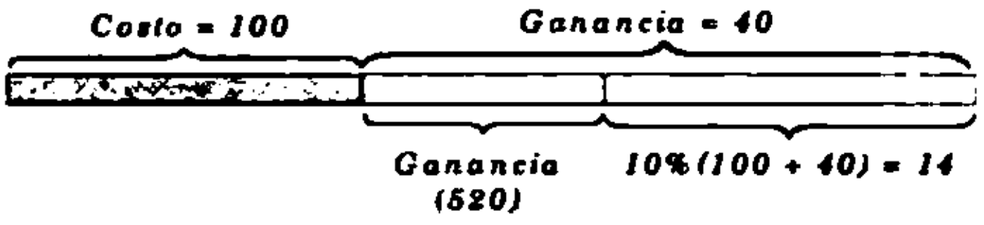
$G = S/.\ 17 \rightarrow x = 17\%$

Rpta: 17 %

Problema 27

Un televisor se vende ganado el 40% del costo, si se hubiese hecho un descuento del 10% del precio de venta, se habría ganado sólo S/. 520. Hallar el precio de costo del televisor.

Resolución



De la figura:

Ganancia: $40 - 14 = 26$, luego:

Ganancia: $26 \rightarrow S/.520$

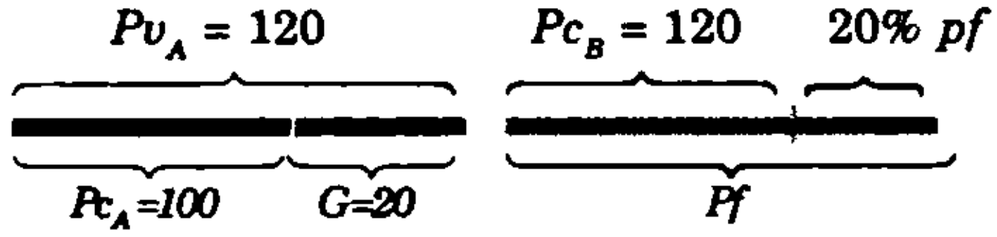
$$\text{Costo: } 100 \rightarrow x = \frac{520 \times 100}{26} = 2000$$

Rpta: S/. 2 000

Problema 28

Un comerciante vende un objeto "A" en igual número de soles al que compró otro objeto "B". Si "A" se vende ganando el 20% de su costo y "B" se compró con un descuento del 20% sobre el precio fijado. ¿Cuánto costó "A", si el precio fijado de "B" es superior en S/.100 al precio de costo de "A"?

Resolución



Para el objeto B: $80\%\ Pf = 120 \Rightarrow \boxed{Pf = 150}$

Diferencia entre $pf - Pc_A = 150 - 100 = 50$

Luego:

Diferencia : $50 \rightarrow S/.\ 100$

$$Pc_A : 100 \rightarrow x = \frac{100 \times 100}{50} = 200$$

Rpta.: S/. 200

Problema 29

En la compra de una corbata obtuve una rebaja del 20%, cuando me disponía a pagar, el cajero de la tienda resultó ser un viejo amigo, quien me hizo una rebaja adicional del 10% sobre el precio descontado. ¿Qué tanto por ciento de descuento obtuve en total?

Resolución

Sea 100 el precio de la corbata. Tras los dos descuentos el precio queda en $90\% \times 80\%\ 100 = 72$. Entonces el descuento fue de $100 - 72 = 28$ que equivale al 28% del precio original.

Rpta: 28%

Problema 30

Si a un número se le hacen tres aumentos sucesivos del 15%, 20% y 32% luego tres descuentos sucesivos también del 10%, 25% y 36%, entonces el número:

Resolución

El número original, es 100%. Luego de los

aumentos y descuentos resulta:

$$\frac{64}{10}\times\frac{75}{100}\times\frac{90}{100}\times\frac{132}{100}\times\frac{120}{100}\times\frac{115}{100}\times 100\% = 78{,}69\%$$

∴ Disminuye en 100% – 78,69% = 21,31%

Rpta: Disminuye en 21,31%

Problema 31

Si el largo de un rectángulo se aumenta en 20% y su ancho se reduce también en 20%, entonces el área del rectángulo:

Resolución

Método I

A) ***Antes de la variación***

Largo inicial = 20 m

Ancho inicial = 5 m

Area inicial = $20 \times 5 = 100\ m^2$

B) ***Luego de la variación***

Largo final = 120%(20) = 24 m

Ancho final = 80%(5) = 4 m

Area final = $24 \times 4 = 96\ m^2$

∴ Disminuyó en: $100 - 96 = 4\ m^2$ <> 4% del área inicial.

Rpta: Disminuye en 4%

Problema 32

Si la base de un triángulo aumenta en 10% y la altura relativa a dicha base, se disminuye en un 10%; entonces el área del triángulo:

Resolución

A) ***Antes de la variación***

Base inicial = 20 m

Altura inicial = 10 m

$$\text{Area inicial} = \frac{20\times 10}{2} = 100\,m^2$$

B) ***Luego de la variación***

Base final = 110%(20) = 22 m

Altura final = 90%(10) = 9 m

$$\text{Area final} = \frac{22\times 9}{2} = 99\,m^2$$

∴ Disminuye en: $100 - 99 = 1m^2$ <> 1% del área inicial

Rpta: Disminuye en 1%

Problema 33

Un mineral tiene una concentración de 25%. ¿Qué cantidad de este mineral se deberá tomar para obtener una tonelada (1000 kg) de mineral de 95% de pureza?

Resolución

Una tonelada de mineral al 95% de pureza, contiene 0,95 toneladas de mineral puro.

En el mineral con 25% de concentración:

En 100 t → 25 t puro

x → 0,95 t

$$x = \frac{0{,}95\times 100}{25} = 3{,}8\,t$$

Rpta.: 3,8 t

Problema 34

La base de un rectángulo disminuye en un 10%, en qué porcentaje debe aumentarse la altura para que el área aumente en un 8%?

Resolución

	Antes	Después
BASE	20	18
ALTURA	10	(12)
ÁREA	200	216

De 10 a 12 aumentó en 20%

Rpta.: 20%

Problema 35

Un día de sol, se dejó una botella destapada, que contenía 850 cc de alcohol al 80% de concentración; más tarde se encontró solamente 300 cc de alcohol al 60%. ¿Cuánto del alcohol se había vaporizado?

Resolución

Inicialmente teníamos 80% (850) = 680 cc de alcohol, al final tenemos 60% 300 = 180 cc, entonces se vaporizar: 680 – 180 = 500 cc.

Rpta.: 500 cc

Problema 36

Cada uno de los lados de un cubo se aumenta en un 50%, el porcentaje de aumento del área del cubo es:

Resolución

La variación porcentual no depende de la medida de la arista del cubo, por ende, vamos a asumir que la arista mide 10.

- Superficie original: $6(10)^2 = 600$
- Nueva superficie: $6(15)^2 = 1350$
- Incremento: $1350 - 600 = 750$

Luego:

$$600 \rightarrow 100\%$$

$$750 \rightarrow x = \frac{750 \times 100\%}{600} = 125\%$$

(Aumento porcentual del área)

Rpta.: 25 %

Problema 37

Las facturas de ventas llevan:

Sub total	
IGV 18%	
Total	

Donde el 18% de IGV se aplica sobre el "Sub Total". Sin embargo un contribuyente descuidado aplicaba sobre el "Total". ¿Ganaba o perdía?

Resolución

Total > Subtotal

$\Rightarrow$ 18% Total > 18% Subtotal

IGV sobre el "Total"	>	IGV sobre el "SubTotal"
⇓		⇓
Paga más impuesto		Paga menos impuesto
⇒ Pierde		⇒ Pierde menos

$\therefore$ Al cometer el error, pierde.

Rpta.: Pierde

Problema 38

El gerente de una empresa ahorra 30% más de lo que ahorra el subgerente, pero éste ahorra el 40% de su sueldo, mientras que aquél, el 35% de lo suyo. Si el gerente gana 1 040 soles por mes. ¿Cuál es el sueldo del subgerente?.

Resolución

El gerente ahorra $\frac{35}{100} \times 1040 = 364$ por mes

- Para el subgerente, 364 soles representa 130% de su ahorro, luego:

$$130\% \rightarrow 364 \text{ soles}$$

$$100\% \rightarrow x = \frac{364 \times 100\%}{130\%} = 280 \text{ soles}$$

- Los 280 soles representan el 40% del sueldo del subgerente, luego:

$40\% \rightarrow 280$ soles

$$100\% \rightarrow y = \frac{100\% \times 280}{40\%} = 700$$

Rpta.: 700 soles

Problema 39

De mi sueldo, el 60% gasto en alimentación. Si el precio de los víveres se ha incrementado en 5% y mi sueldo no ha variado, ¿qué % de mi sueldo representa ahora mis gastos de alimentación?

Resolución

Sea mi sueldo 100 ⇒ Gastos de alim. 60

Con el incremento:

Gastos de Alim.: 105%(60) = 63

∴ Sueldo: 100 → 100%

Gatos Alim: 63 → x = 63%

Rpta: 63%

Problema 40

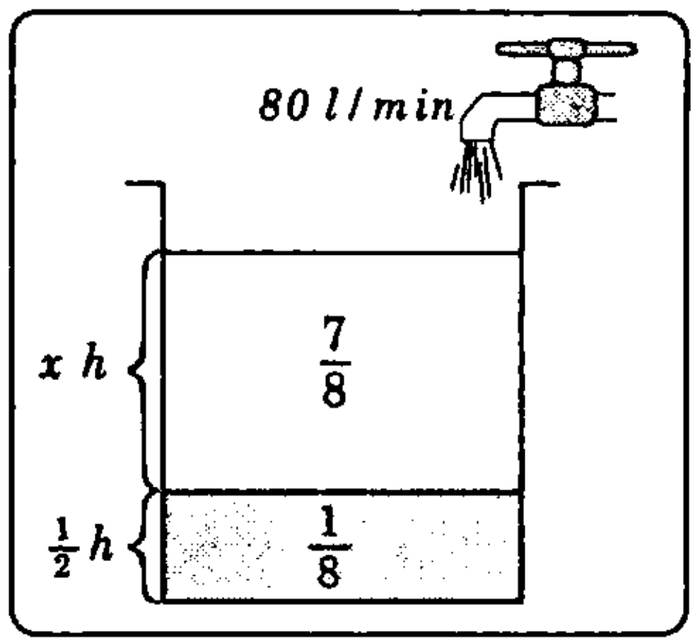
Un caño que vierte agua a razón de (80 l/min) ha llenado en media hora la octava parte de la capacidad de un tanque. ¿Cuánto tardará en llenar lo que falta vertiendo al mismo caudal?

En $\frac{1}{2}h$ llena $\frac{1}{8}$

En "x" llena $\frac{7}{8}$

$$x = \frac{7}{2} = 3{,}5h$$

$= 3h\ 30\ min$



Rpta.: 3 h 30 min

Problemas Propuestos

1. ¿Qué fracción de a es b'

A) $\frac{a}{b}$ **B)** $\frac{b}{a}$ **C)** $\frac{1}{a}$ **D)** $\frac{1}{b}$ **E)** $a-b$

2. Calcular los $\frac{2}{3}$ ***de los*** $\frac{3}{5}$ ***de los*** $\frac{15}{41}$ ***de 82***

A) 6 **B)** 12 **C)** $\frac{3}{128}$ **D)** 2 **E)** 8

3. ¿Qué parte de 21 es los $\frac{3}{4}$ ***de los*** $\frac{2}{7}$ ***de 28?***

A) $\frac{2}{7}$ **B)** $\frac{3}{7}$ **C)** $\frac{6}{7}$ **D)** $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{4}{3}$

4. ¿De qué número 240 representa sus $\frac{3}{5}$ ***más?***

A) 120 **B)** 150 **C)** 50
D) 30 **E)** 1200

5. ¿De qué número, 350 representa sus $\frac{2}{9}$ ***menos?***

A) 360 **B)** 70 **C)** 630
D) 450 **E)** 360

6. ¿Qué parte de las $\frac{4}{5}$ ***de*** $\frac{9}{8}$ ***es el inverso de los*** $\frac{5}{3}$ ***de 3,5?***

A) $\frac{4}{21}$ B) $\frac{8}{43}$ C) $\frac{7}{15}$ D) $\frac{3}{10}$ E) $\frac{17}{15}$

7. Luego de simplificar:

$$\frac{3\frac{1}{5}+2\frac{3}{4}+5\frac{2}{3}}{5\frac{3}{4}+3\frac{2}{3}+2\frac{1}{5}} \div \frac{20}{41}+\frac{1}{2}$$

Resulta

A) 1 B) $\frac{8}{43}$ C) 2,5 D) 2,55 E) 1,5

8. ¿Cuál es la fracción que debo sumar a 0,878787 ... para que sea igual a 1, 212121 ...

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{5}{9}$

9. Luego de simplificar:

$$\frac{2,2+4,4+6,6+8,8}{2,\bar{2}+4,\bar{4}+6,\bar{6}+8,\bar{8}}$$

Resulta

A) 0,9 B) 1,01 C) 1 D) 0,99 E) 9

10. En una asamblea participaron 50 hombres y 40 mujeres; más tarde, llegaron cierto número de hombres de modo que los 5/7 del número de hombres resultó igual a los 5/12 de los reunidos. ¿Cuántos hombres llegaron a la asamblea?

A) 5 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

11. Gasté los 3/5 de lo que no gasté y aún me quedan S/. 60 más de lo que gasté. ¿Cuánto tenía?

A) 150 B) 190 C) 200
D) 250 E) 240

12. De un grupo de postulantes ingresan a la universidad 3/4 de los que no ingresan. ¿Qué fracción de los postulantes ingresan?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{4}{7}$

13. De un recipiente que está la mitad de lo que no está lleno, se extrae un tercio de su contenido. ¿Qué fracción del depósito queda con contenido?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{2}{9}$

14. Se ha vendido 2/5 de una mercancía a S/. 480, ganando 20% del costo. El resto de la mercadería se ha vendido con un beneficio del 30%. ¿A qué precio se vendió esta parte?

A) S/. 60 B) S/. 640 C) S/. 720
D) S/. 780 E) S/. 800

15. Tres socios se reparten un beneficio, al primero le toca las 2/5 partes, al segundo a 3/7 y al tercero el resto. Dígase, ¿cuál es la cantidad mayor que le tocó a uno de los socios, si se sabe que el segundo recibió 120 más que el primero?

A) S/. 2700 B) S/. 1600 C) S/. 9000
D) S/. 1750 E) S/. 1800

16. Al tesorero de una empresa, le falta 1/9 del dinero que se le entregó. ¿Qué fracción de lo que aún le queda, restituirá lo perdido?

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{1}{6}$

17. En los tres quintos de un mes se consumen los 4/25 del contenido de agua de un tanque. Cuando en el tanque

queden sólo los 9/25 del agua que había, ¿cuántos meses habrán transcurrido?

A) 2 **B)** 2,4 **C)** 2,5 **D)** 3 **E)** 3,5

18. Una persona alquila una máquina en los 3/14 del precio que le costó, con los 7/12 del importe del alquiler compra un cuadro y el resto que son S/. 300 lo coloca al banco. ¿Con cuánto compró la máquina?

A) S/. 300 **B)** S/. 320 **C)** S/. 3260
D) S/. 3360 **E)** S/. 3490

19. Una persona pierde y gana alternadamente en un juego: 1/3, 2/5, 3/4, 2/7 y 3/8 de lo que le va quedando ¿Qué parte del total aún le queda?

A) $\frac{30}{16}$ **B)** $\frac{3}{16}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{3}{17}$ **E)** $\frac{2}{9}$

20. Juan y Pedro están jugando a apuestas entre sí. En la primera partida, Juan pierde 1/5 de lo que tiene y Pedro gana 1/5 de lo que tiene; en la segunda partida Juan gana 3/10 de lo que le quedaba y Pedro pierde 1/5 de lo que tenía después de la primera partida. Si al inicio, cada uno tenía 250 soles, ¿con cuánto terminó Juan?

A) S/. 260 **B)** S/. 24 **C)** S/. 250
D) S/. 130 **E)** S/. 390

21. Un tonel A tiene 8 l de vino puro y 4 l de agua; un segundo tonel B, tiene 9 l de vino puro y 6 l de agua. Se sacan 3 l de las mezclas de cada tonel y se hace el intercambio respectivo. ¿Cuánto más de vino hay en uno que en el otro tonel?

A) 2,4 *l* **B)** 1,4 *l* **C)** 1,8 *l*
D) 3,6 *l* **E)** 1 *l*

22. Un obrero gasta en alimentos y pasajes los 2/5 de lo que gana; los 5/8 de lo que le resta lo destina a otras necesidades. Si en 8 semanas tiene ahorrados S/. 1089, ¿cuánto gana semanalmente?

A) 600 **B)** 605 **C)** 610
D) 650 **E)** 660

23. Se vende un televisor al contado, con los 2/3 del importe se compra una plancha y con los 3/7 del resto, un juguete; lo que queda se deposita en el banco. ¿Cuánto se deposita en el banco, si la plancha y el juguete juntos costaron 765?

A) 150 **B)** 160 **C)** 180
D) 185 **E)** 196

24. Con los dos quintos de la recaudación de la rifa de un cuadro se cancela el valor de éste, con los 3/4 del resto se compra juguetes para los niños pobres; con lo que queda del resto y S/. 350 más se compra otro cuadro similar al anterior y al mismo precio. ¿Cuánto se gastó en la compra de los juguetes?

A) S/. 560 **B)** S/. 568 **C)** S/. 624
D) S/. 630 **E)** S/. 648

25. Un tanque está lleno hasta sus dos terceras partes. Luego se agrega la tercera parte de lo que hay en el tanque para luego extraer los 5/8 de lo que hay hasta ese momento. Si al final quedan 21 litros de agua, ¿cuál es la capacidad del tanque en litros?

A) 126 *l* **B)** 63 *l* **C)** 36 *l*
D) 84 *l* **E)** 26 *l*

26. Un cilindro tiene un caño de llenado el cual puede llenar en 20 minutos y otro caño de vaciado, el cual puede vaciar totalmente en 36 minutos.

Estando vacío el cilindro se abre el caño de llenado y 4 minutos más tarde, el caño de vaciado. ¿En cuántos minutos, se habrá llenado totalmente el cilindro?

A) 36 minutos **B)** 40 minutos **C)** 45 minutos
D) 44 minutos **E)** 46 minutos

27. Dos grifos A y B pueden llenar un tanque en 15 horas, en cambio A sólo lo puede llenar en 40 horas. ¿Cuántas horas menos que A, se demoraría en llenar B solo?

A) 8 horas **B)** 16 horas **C)** 20 horas
D) 24 horas **E)** 21 horas

28. Si a los términos de 2/5 le aumentamos 2 números que suman 700, resulta una fracción equivalente a la original. ¿Cuáles son los números?

A) 100 y 600 **B)** 150 y 550
C) 200 y 500 **D)** 250 y 450
E) 300 y 400

29. Una persona vende panes de la siguiente manera: en cada venta, la mitad de lo que tiene y medio pan más. Si luego de las 4 ventas sucesivas le queda un pan, ¿cuánto tenía al principio?

A) 30 **B)** 31 **C)** 63 **D)** 33 **E)** 35

30. Una electrobomba demora 2 horas, 30 minutos para llenar un reservorio, cuando el tanque está lleno hasta 1/5 se malogra y su rendimiento disminuye en 1/3. ¿Cuánto tiempo tardará la bomba para terminar de llenar el reservorio.

A) 4 h **B)** 3 h **C)** 3 h 30 min
D) 4 h 30 min **E)** 6 h

31. Una persona es triple de eficiente que la otra; si entre los dos pueden hacer una obra en 3 días. ¿En cuántos días podrán hacer la misma obra cada uno por separado?

A) 4d y 12 d **B)** 1d y 3d **C)** 2d y 6d
D) 3d y 9d **E)** $\frac{1}{4}$ d y $\frac{3}{4}$ d

32. A hace un trabajo en 6 días, B hace el mismo trabajo en 4 días y C en 3 días; si trabajan juntos, ¿en qué tiempo harán solamente los 3/8 del mismo trabajo?

A) $\frac{1}{2}$ d **B)** 1 d **C)** $1\frac{1}{2}$ d
D) 2 d **E)** $2\frac{1}{2}$ d

33. A y B pueden hacer un trabajo en dos días, B y C en 4 días, y A y C en 2 2/5 días. Entonces el número de días que A necesita para hacer el doble de dicho trabajo es:

A) 2d **B)** 3d **C)** 4d **D)** 6d **E)** 8d

34. Un depósito contiene 30 litros de vino, del cual se extrae 1/5 de su contenido y se reemplaza por agua, enseguida se extrae 1/4 de la mezcla y también se reemplaza por agua; por último se extrae 1/3 de la nueva mezcla y también se reemplaza por agua. ¿Cuántos litros de vino queda en el depósito?

A) 10 l **B)** 11 l **C)** 12 l
D) 13 l **E)** 15 l

35. Una pelota es lanzada hacia arriba, alcanzando una altura máxima de 20, si al caer, en cada rebote alcanza 1/3 de la altura desde donde

va cayendo. ¿Cuál es la suma de los espacios que recorre hasta detenerse teóricamente?

A) 60 m **B)** 80 m **C)** 100 m
D) 120 m **E)** 160 m

36. Un grifo puede llenar un reservorio en 20 minutos, mientras que otro grifo puede vaciar el mismo reservorio en 25 minutos. Se abre el primer grifo y luego de 5 minutos, el segundo grifo. ¿A los cuántos minutos de haber abierto el segundo grifo; habrán llenado, los dos, el reservorio?

A) 1 hora 40 minutos
B) 1 hora 30 minutos
C) 1 hora 15 minutos
D) 1 hora 20 minutos
E) 1 hora 10 minutos

37. Un tanque puede ser llenado en 20 horas por un grifo A. Este tanque tiene un grifo de vaciado B colocado a media altura del tanque, el cual puede vaciar su parte en 15 horas. Estando abierto el grifo B y vacío el tanque, se abre el grifo A. ¿Al cabo de cuánto tiempo se llenará el tanque?

A) 30 horas **B)** 35 horas **C)** 40 horas
D) 45 horas **E)** 50 horas

38. Se abre un grifo A y se observa que en 3 minutos ha llenado 1/7 del reservorio, en ese momento se abre un grifo B de vaciado, por lo que el reservorio se ha llenado en 9 minutos antes del tiempo que habría tardado en llenarse si se hubiese abierto el grifo B junto con A. ¿Cuántos minutos ha demorado en llenarse?

A) 54 **B)** 72 **C)** 63 **D)** 57 **E)** 78

39. Si de un almacén que está lleno los 3/5 de lo que no está lleno se retira los 2/3 de lo que no se retira. ¿Qué fracción del almacén quedará vacío?

A) $\frac{3}{25}$ **B)** $\frac{9}{40}$ **C)** $\frac{31}{40}$
D) $\frac{9}{15}$ **E)** $\frac{22}{25}$

40. Sabiendo que perdí 2/3 de lo que no perdí, luego recuperé 1/3 de lo que no recuperé y tengo entonces 42 soles. ¿Cuánto me quedaría luego de perder 1/6 de lo que no logré recuperar?

A) S/. 41 **B)** S/. 39 **C)** S/. 36
D) S/. 40 **E)** S/. 32

41. Al vender un artículo pensé ganar la mitad de lo que me costó, pero al momento de vender tuve que rebajar la mitad de lo que pensé ganar, por lo que gané S/. 600 menos de lo que me costó. ¿Cuánto me costó?

A) S/. 600 **B)** S/. 900 **C)** S/. 800
D) S/. 1000 **E)** S/. 1200

42. He gastado los 5/6 de mi dinero, si en lugar de gastar los 5/6 hubiera gastado 1/4 de mi dinero, tendría ahora 7a soles más de lo que tengo. ¿Cuánto no gasté?

A) 16 a **B)** 8 a **C)** 4 a **D)** 2 a **E)** a

43. Nueve lapiceros cuestan tanto como 2 cuadernos, 3 cuadernos tanto como 5 borradores y 2 borradores tanto como 3 tajadores; entonces, 9 lapiceros cuestan tanto como:

A) 2 tajadores **B)** 3 tajadores
C) 4 tajadores **D)** 5 tajadores
E) 6 tajadores

44. Un caño llena un tanque en "t" horas y un desagüe lo vacía en la mitad del tiempo. Si el depósito estuviera

lleno en sus dos terceras partes y se abrieran simultáneamente caño y desagüe. ¿En cuánto tiempo quedaría vacío el tanque?

A) $\frac{1t}{3}$ h **B)** $\frac{2t}{5}$ h **C)** $\frac{2t}{3}$ h

D) $\frac{1t}{4}$ h **E)** $\frac{1t}{3}$ h

45. Si a los términos de una fracción ordinaria irreductible se le suma el denominador y al resultado se le resta la fracción, resulta la misma fracción. ¿Cuál es la suma de los términos de dicha fracción?

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 7

46. Si se cumple:

$$\frac{0,\overline{ab}}{0,\overline{ba}} = 1,\overline{72}$$

Calcular: (a+b), si además: a – b = 2

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

47. Un recipiente lleno de agua puede vaciarse mediante dos grifos A y B; uno de ellos está situado en el fondo del recipiente y el otro a una cierta altura. El grifo A vaciará el recipiente en 8 horas, y el grifo B vaciará lo que le corresponde en 4 horas. Si se abren simultáneamente. ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse el recipiente?

A) 3 h **B)** 4 h **C)** 5 h **D)** 6 h **E)** 7 h

48. Una liebre perseguida por un perro lleva ya adelantados 90 saltos y da 5 saltos mientras que el perro da 4 y como 7 saltos de la liebre equivale a 5 del perro, se desea saber ¿cuántos saltos tendrá que dar este para alcanzarla?

A) 500 **B)** 600 **C)** 400
D) 300 **E)** 450

49. Se abre una llave a razón de 20 litros por minuto, hasta que éste llene 2/5 de un tanque, luego se cierra. Enseguida se abre otra llave durante el mismo tiempo que el primero y se observa que lo ha llenado completamente el tanque. ¿Cuántos litros por minuto vierte la segunda llave?

A) 20 *lt*/min **B)** 25 *lt*/min **C)** 24 *lt*/min
D) 30 *l*/min **E)** 36 *l*/min

50. Dos personas A y B debían extraer de un pozo 3 556,8 litros de agua, en 24 horas. Luego de trabajar juntos durante 9 horas, A se retira, entonces B completa la extracción demorándose 13 horas y media más de lo que se habría demorado A. Quedándose solo, ¿cuántos litros por hora extrae A?

A) 60 *l* / h **B)** 80 *l* / h **C)** 90 *l* / h
D) 120 *l* / h **E)** 135 *l* / h

51. Un camión sale de A a las 6 p.m. y llega a B, a las 9 a.m. del otro día. Un ómnibus sale de A a las 8 p.m., llega a B a las 8 a.m. del siguiente día. ¿A qué horas, el ómnibus habrá alcanzado al camión?

A) 2 a.m. **B)** 4 a.m. **C)** 3 a.m.
D) 5 a.m. **E)** 6 a.m.

52. Antonio y Raúl se comprometieron a construir un muro en 12 días; pero luego de trabajar juntos durante 4 días, Raúl se retiró del trabajo, por lo que Antonio entregó la obra con 12 días de retraso. Si se hubiera retirado Antonio, ¿con cuántos días de retraso habría entregado la obra Raúl?

A) 6 días B) 7 días C) $5\frac{1}{3}$ días

D) $6\frac{1}{3}$ días E) $7\frac{1}{3}$ días

53. ***Una lancha va en 6 horas de A a B río abajo y demora 30 horas en regresar de B hacia A río arriba. Una balsa que se deja llevar por el río de A a B, ¿en cuánto tiempo llegará?***

A) 15 horas B) 20 horas C) 10 horas
D) 12 horas E) 21 horas

54. ***Una pelota que se deja caer de cierta altura, pierde en cada rebote 1/4 de la altura de donde cae. Si recorrió 70 metros de espacio, hasta el momento de detenerse. ¿De qué altura se dejó caer?***

A) 8 metros B) 9 metros
C) 10 metros
D) 11 metros E) 15 metros

55. ***Una persona ahorra 1/5 de su salario. Ahora que ha recibido un aumento de "a" soles, ahorra 1/6 de su nuevo salario; si en 5 meses, después del aumento, ha ahorrado 6 soles más de lo que habría ahorrado en este tiempo sin recibir el aumento. Calcular el salario original.***

A) $5a - 36$ soles B) $5a - 30$ soles
C) $3a - 60$ soles
D) $3a - 46$ soles E) $5a + 30$ soles

56. ***Una persona que es dueña de los 2/3 de una fábrica, ha recibido "n" soles de 1/4 de las utilidades que le corresponden. ¿Cuál fue la utilidad de la compañía?***

A) 5 n soles B) 4 n soles C) 8 n soles
D) 6 n soles E) 12 soles

57. ***¿Qué porcentaje del doble del 60% de un número es el 30% del 20% de los 2/5 del mismo número?***

A) 1% B) 2% C) 10%
D) 40% E) N.A.

58. ***César es 25% más eficiente que Guillermo. Si Guillermo puede hacer una obra en 18 días. ¿En cuántos días podrán hacer juntos la obra?***

A) 8 días B) 10 días C) 12 días
D) 20 días E) 13,5 días

59. ***Dos profesores agasajaron al Director, con un almuerzo, cubriendo uno el 40% y el otro el 60% del gasto total.***

El Director en agradecimiento, otro día los premió con un plato de salchipapas a los dos. ¿Qué porcentaje de las salchipapas le corresponde al primero?

A) 10% B) 20% C) 30%
D) 40% E) 50%

60. ***Pochita tiene mil soles, va al mercado y gasta 400 soles. ¿Qué porcentaje de lo que gastó no gastó?***

A) 120% B) 100% C) 80%
D) 140% E) 150%

61. ***El porcentaje de ganancia sobre el precio de costo y el porcentaje de ganancia sobre el precio de venta están en la relación de 5 a 4. Entonces el porcentaje de ganancia sobre el precio de venta es?***

A) 10% B) 20% C) 15%
D) 30% E) 25%

62. ***Un vendedor recarga el precio de sus artículos en el 25% de su valor. ¿Cuál es el máximo descuento que se puede hacer sin ganar ni perder?***

A) 20% B) 25% C) 24%
D) 28% E) 30%

63. A un recipiente que contiene cierta cantidad de vino, se le adiciona 240 cc de agua, luego se extrae el 20% de esta mezcla y se reemplaza totalmente por agua y resulta que la cantidad de vino de la nueva mezcla constituye el 48% de la mezcla. ¿Cuántos litros de vino contenía el recipiente?

A) 140 cc **B)** 200 cc **C)** 150 cc
D) 300 cc **E)** 360 cc

64. Un barril contiene 4 litros de vino por cada 5 litros de agua. Se empieza adicionar al barril simultáneamente vino razón de 6 litros por minuto y agua a razón de 4 litros por minuto, hasta que la mezcla contenga 50% de vino y se observa que en este tiempo, la cantidad de líquido que ha entrado al barril es inferior en 24 litros a lo que había inicialmente. ¿Cuál es el contenido final de mezcla del barril?

A) 80 litros **B)** 54 litros **C)** 30 litros
D) 24 litros **E)** 84 litros

65. Un recipiente A contiene 250 cc de alcohol al 64% y otro recipiente B contiene 200 cc de alcohol al 80%, ¿Cuántos cc de agua tendríamos que agregar a cada recipiente, de modo que al final haya igual cantidad de mezcla en cada recipiente y de la misma concentración de 40%?

A) 10 cc, 150 cc **B)** 150 cc, 200 cc
C) 200 cc, 250 c **D)** 250 cc, 300 cc
E) 150 cc, 210 cc

66. Al comprar 38 camisas pagué 1 425 soles, pero esta suma no cubría el importe, por lo que tuve que devolver una camisa y el vendedor me devolvió tanto como me faltaba para cubrir el valor de las 38 camisas. Hallar el precio de cada camisa.

A) 32 soles **B)** 34 soles **C)** 36 soles
D) 38 soles **E)** 30 soles

67. Un recipiente A contiene una mezcla de 3 litros de guinda con 5 de coca cola y otro B contiene una mezcla de las mismas bebidas pero en igual cantidad. Cuando se vierte todo el contenido de B en A, resulta que por cada 3 litros de guinda hay 4 de coca cola. ¿Cuántos litros de mezcla contenía B?

A) 2 litros **B)** 3 litros **C)** 4 litros
D) 5 litros **E)** 6 litros

68. Se sabe que una tela de cierta calidad se encoge después de lavada en un 20% en el largo y 10% en el ancho. Se vende dicha tela después de lavarla, en S/. 50 el metro cuadrado, ganando el 20% del costo. ¿Cuánto costó cada m² de tela?

A) S/. 16 **B)** S/. 20 **C)** S/. 24
D) S/. 30 **E)** S/. 36

69. El largo de un rectángulo aumenta en 20% y el ancho disminuye en 20%, entonces el área del rectángulo varía en 160 m². ¿Cuál era el área inicial?

A) 200 m² **B)** 400 m² **C)** 2000 m²
D) 4000 m² **E)** 1600 m²

70. Cuando el lado de un cuadrado se incrementa en 20%, resulta que el área aumenta en 176 m². Calcular el lado inicial del cuadrado.

A) 10 m **B)** 12 m **C)** 20 m
D) 16 m **E)** 15 m

71. El ancho de un rectángulo se aumenta en 25%; si deseamos mantener igual el área del rectángulo, ¿en qué

porcentaje debe disminuir el largo de dicho rectángulo?

A) 10% B) 20% C) 25%
D) 30% E) 505

72. *Un comerciante compra una mercadería por S/. 400 y vende el 20% de esta mercadería con una pérdida del 10%. ¿Qué tanto por ciento debe ganar en el resto de la mercadería, para recuperar lo perdido y aún ganar el 30% de toda la mercadería?*

A) 20% B) 15% C) 30%
D) 35% E) 40%

73. *Arturo compró una calculadora, para venderla recargó al precio que le costó en 30%. Al momento de venderla a su amiga Carmen, le hizo una rebaja del 30%, pensando que con esta rebaja iba a vender al precio que había comprado, pero sin embargo quedó perjudicado en S/. 54. ¿A qué precio lo vendió?*

A) S/. 465 B) S/. 654 C) S/. 645
D) S/. 546 E) S/. 564

74. *Gasté el 60% de lo que no gasté. ¿Cuánto tenía sabiendo que no gasté S/. 120 más de lo que gasté?*

A) 180 B) 240 C) 360
D) 480 E) 560

75. *Un automóvil demora normalmente un cierto tiempo para llegar de A a B; pero llegaría en 2 horas menos si variase su velocidad en un 40%. ¿Cuánto tarda este automóvil en llegar normalmente de A a B?*

A) 4 horas B) 5 horas C) 6 horas
D) 7 horas E) 8 horas

76. *Un balde lleno de agua pesa 5 kg; cuando se extrae la mitad del agua, el peso inicial queda reducido en un 40%. ¿Cuál es la capacidad del balde?*

A) 2 litros B) 4 litros C) 3 litros
D) 1 litro E) 5 litros

77. *Un comerciante compró un objeto y lo vendió ganando el 30%, con la ganancia de la venta más S/. 500 pagó su deuda y con el resto del importe de la venta compró otro objeto, la que vende con una utilidad del 80% ganando en esta venta igual que su deuda. ¿Cuánto le costó el primer objeto?*

A) S/. 600 B) S/. 700 C) S/. 750
D) S/. 800 E) S/. 1000

78. *Un comerciante vendió un artículo y parte del importe lo invirtió en la compra de otro artículo, la que vendió con una utilidad del 40%. Esta utilidad equivale al resto del importe de la venta. Si el importe de la venta del primer artículo y el costo del segundo artículo suman S/. 2 400, ¿cuánto ganó en la segunda venta?*

A) S/. 400 B) S/. 600 C) S/. 450
D) S/. 500 E) S/. 350

79. *Al vender un artículo pensé ganar la mitad de lo que me costó, pero al momento de vender tuve que rebajar la mitad de lo que pensé ganar, por lo que gané S/. 600 menos de lo que me costó. ¿Cuánto me costó?*

A) S/. 400 B) S/. 600 C) S/. 800
D) S/. 1200 E) S/. 900

80. *Un negociante vende un artefacto ganando S/. 600, con el importe compra 2 artefactos similares, en la misma tienda donde había comprado el artefacto anterior, pero en esta oportunidad con un descuento del 20%. Si estos 2 artefactos los vende ganando*

el mismo porcentaje que en la venta anterior, ¿cuál es su ganancia en esta última venta?

A) 600 **B)** 120 **C)** 960
D) 690 **E)** 480

81. Un comerciante compró un artículo y vendió con un beneficio del 15% del costo. Si hubiera ganado el 15% sobre el precio de venta, habría ganado S/. 36 más. ¿A qué precio vendió dicho artículo?

A) S/. 1564 **B)** S/. 1456 **C)** S/. 1364
D) S/. 1458 **E)** S/. 16541

82. Ganar 60% del costo, equivale a ganar qué porcentaje del precio de venta.

A) 28.5% **B)** 30.5 % **C)** 40.0%
D) 37.5 % **E)** 32.5%

83. Una persona retira S/. 1649 luego de haber perdido el 15%. ¿Cuánto invirtió?

A) S/. 1940 **B)** S/. 1490 **C)** S/. 1860
D) S/. 1920 **E)** S/. 1880

84. Una camisa cuesta 5 veces lo que una corbata. Si compro ambos artículos, me rebajan la camisa en 30% y la corbata en 20%, así quedaría beneficiado con una rebaja de S/. 357. ¿Cuál es el precio de la corbata?

A) S/. 200 **B)** S/. 210 **C)** S/. 220
D) S/. 240 **E)** S/. 230

85. Un fertilizante contiene 20% de nitrato y el 20% de nitrato es nitrógeno. Si el contenido que no es nitrato excede en 1,52 kg al contenido de nitrógeno, ¿cuántos gramos de nitrato no es nitrógeno?

A) 0.320 **B)** 32 **C)** 400
D) 320 **E)** 3.2

86. Alberto compró un televisor en una tienda, y se lo vendió a Susy ganando 20% y Susy a Carlos también ganando el 20%. Por último Carlos se lo vendió a Alberto perdiendo el 40%. Asumiendo que uno gana, al comprar un objeto por debajo de su precio en la tienda, Alberto ganó en total S/. 110,88 en esta operación. ¿Cuál es el costo del televisor en la tienda?

A) S/. 300 **B)** S/. 330 **C)** S/. 500
D) S/. 400 **E)** S/. 450

87. Se vende un edificio en "a" soles; con el 10% del importe se compra una casa con un descuento del 20%. ¿Cuál es el costo de un departamento sabiendo que se puede comprar con el precio de la casa sin descuento?

A) $\frac{a}{8}$ **B)** $\frac{3a}{10}$ **C)** $\frac{a}{10}$

D) $\frac{4a}{20}$ **E)** $\frac{3a}{40}$

88. He vendido un objeto ganando el 25% y con este dinero compro otro y lo vendo en S/. 166,50 perdiendo el 10%. ¿Cuánto me costó el primer objeto?

A) S/. 186 **B)** S/. 184 **C)** S/. 186
D) S/. 148 **E)** S/. 166

89. Una casa y un auto se vendieron en la misma cantidad, la casa se vendió ganando el 13% y el auto perdiendo el 13%. En esta operación:

A) Se ganó
B) Se perdió
C) Depende de los precios de la casa y el auto
D) No se gana ni se pierde
E) N.A.

90. Al vender un objeto ganando el 32% del costo se ganó 240 soles más que si

se hubiera vendido ganando sólo el 12% del costo. ¿Cuánto costó el objeto?

A) 10 000 **B)** 12 000 **C)** 1 200
D) 240 **E)** N.A.

91. El cajero de una compañía ha perdido el 20% del dinero a su cargo. ¿Qué % de lo que le queda restituiría lo perdido?

A) 20% **B)** 25% **C)** 30%
D) 10% **E)** 12,5%

92. ¿A cómo vendo lo que me costó 140 soles para ganar el 30% del precio de venta?

A) 182 soles **B)** 192 soles
C) 195 soles
D) 200 soles **E)** 210 soles

93. Un fabricante encuentra que el 0,4% de su producción es defectuosa y no puede enviarse al mercado. ¿Cuántos artículos de cada diez mil producidos serán rechazados?

A) 4 **B)** 14 **C)** 40 **D)** 140 **E)** 400

94. El 15% de alumnos de un colegio han sido desaprobados en matemática, de ellos el 40% son mujeres. ¿Cuántos alumnos tiene el colegio, sabiendo que son 108 los varones desaprobados en matemática?

A) 900 **B)** 600 **C)** 840
D) 1080 **E)** 1200

95. Un vendedor de autos gana 10% de comisión sobre las ventas. En el momento de vender un automóvil ha rebajado el 4% del precio de venta, importe que le será descontado de su comisión. Sí recibió 720 soles de comisión, ¿en cuánto vendió el auto?

A) 15 000 soles **B)** 14 000 soles
C) 12 000 soles
D) 10 000 soles **E)** 8 400 soles

96. Tenía 640 soles, con el 20% compré un regalo, con el 30% un juego de ollas y con el 10% una mesa. ¿Cuánto dinero me queda?

A) 240 soles **B)** 344 soles
C) 360 soles
D) 250 soles **E)** 256 soles

97. Al comprar un artefacto me rebajaron 18%; con lo que ahorré de la rebaja me alcanzó para una camisa, donde también me rebajaron, esta vez el 10%. De este modo aún me quedaron 18 soles. ¿Cuánto pagué por el artefacto?

A) 720 soles **B)** 800 soles
C) 820 soles
D) 840 soles **E)** 860 soles

CLAVES DE RESPUESTAS

PÁGINA 149-150	1	2	3	4	5	6	7	8
	C	B	A	A	C	A	E	D

PÁGINA 152-153	1	2	3	4	5	6	7	8
	C	A	B	E	D	E	C	A

PÁGINA 156-157	1	2	3	4	5	6	7	8
	B	B	A	E	E	B	E	C

PÁGINA 165-166	1	2	3	4	5	6	7	8
	E	A	B	A	D	A	B	B

PÁGINA 169-170	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	A	A	D	C	C	B	C

PÁGINA 175	1	2	3	4	5	6	7	8
	B	E	B	A	B	A	D	A
	9	10						
	B	B						

PÁGINA 181-182	1	2	3	4	5	6	7	8
	C	A	C	E	B	A	B	E
	9	10	11	12	13	14	15	16
	D	B	C	B	D	A	E	B
	17	18	19	20	21			
	A	D	C	C	D			

PROBLEMAS PROPUESTOS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	A	B	D	A	D	B	D	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
E	D	E	D	E	C	B	D	B	A
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	B	C	D	B	A	B	C	B	E
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	A	D	C	A	C	C	A	C	B
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	D	D	C	B	D	D	B	D	C
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
B	C	A	C	A	D	B	A	B	E
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
B	A	E	E	B	D	E	D	D	C
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
B	E	D	D	D	B	E	A	E	C
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
A	D	A	B	D	B	A	D	B	C
91	92	93	94	95	96	97			
B	D	C	E	C	E	C			

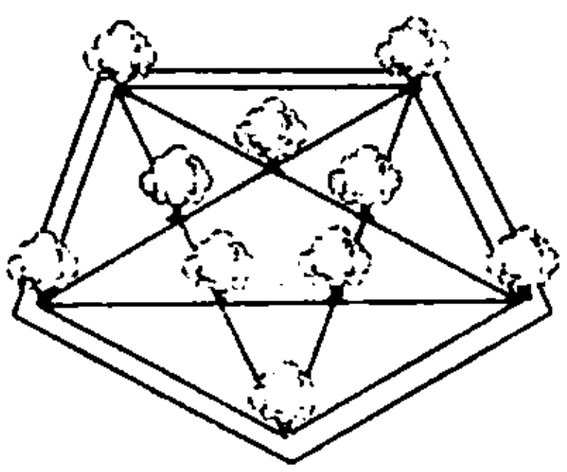
Retos al ingenio

1. Sí. Entre Valencia y Bagdad hay tres horas de diferencia horaria. Cuando en Bagdad son las 11 h, en Valencia son las 8 h.

2. Pesa 100 kg

3. Tiene 21 libros. Número menor que 30 que tiene tercera y séptima partes.

4.



5. Dos cortes, en tres partes de 1 cm, 2 cm y 4 cm.

6. De haber visto el primero, dos boinas negras en los otros dos habría dicho que él tenía blanca, entonces vio dos blancas o una blanca y otra negra.

De haber visto el segundo, una boina negra en la cabeza del ciego, habría dicho que él tiene blanca, entonces vio blanca.

7. $7^2 = 49$

8. Se prestaron un caballo. El primero recibió 12, el segundo 8 y el tercero 3; que hacen $12 + 8 + 3 = 23$ caballos. Luego devolvieron el caballo prestado.

Évariste Galois

Nació el 25 de Octubre de 1811 en Bourg La Reine, París, Francia

Su actividad científica, de un lustro escaso de vida, se entremezcló con una actividad política de ardiente revolucionario en los turbulentos días del París de 1830. A los 16 años, buen conocedor de la matemática de entonces, sufre su primera decepción al fracasar en su intento de ingreso en la Escuela Politécnica. Siguen las decepciones cuando una memoria, presentada a la Academia y puesta en manos de Cauchy, se extravía, y cuando un segundo fracaso le cierra las puertas de la Politécnica.

En 1829 y 1830 hace conocer sus primeros trabajos sobre fracciones continuas, cuestiones de análisis, teoría de las ecuaciones y teoría de números, así como un resumen de una segunda memoria presentada a la Academia para optar al gran premio de matemática, el que también se pierde. En 1831, envuelto en los acontecimientos políticos, se le expulsa de la escuela normal, donde entonces estudiaba, y con el propósito de dedicarse a la enseñanza privada, anuncia un curso de álgebra superior que abarcaría "Una nueva teoría de los números imaginarios, la teoría de las ecuaciones resolubles por radicales, la teoría de números y la teoría de las funciones elípticas, tratadas por álgebra pura". El curso no tuvo oyentes y Galois ingresa en el ejército, a la vez que redacta una memoria, la última, hoy llamada "Teoría de Galois", que remite a la Academia y que Poisson califica de "incomprensible".

Más tarde es detenido y pasa casi un año en la cárcel. Al recobrar la libertad se ve envuelto en una cuestión de honor por una "infame coqueta" y muere en el duelo consiguiente.

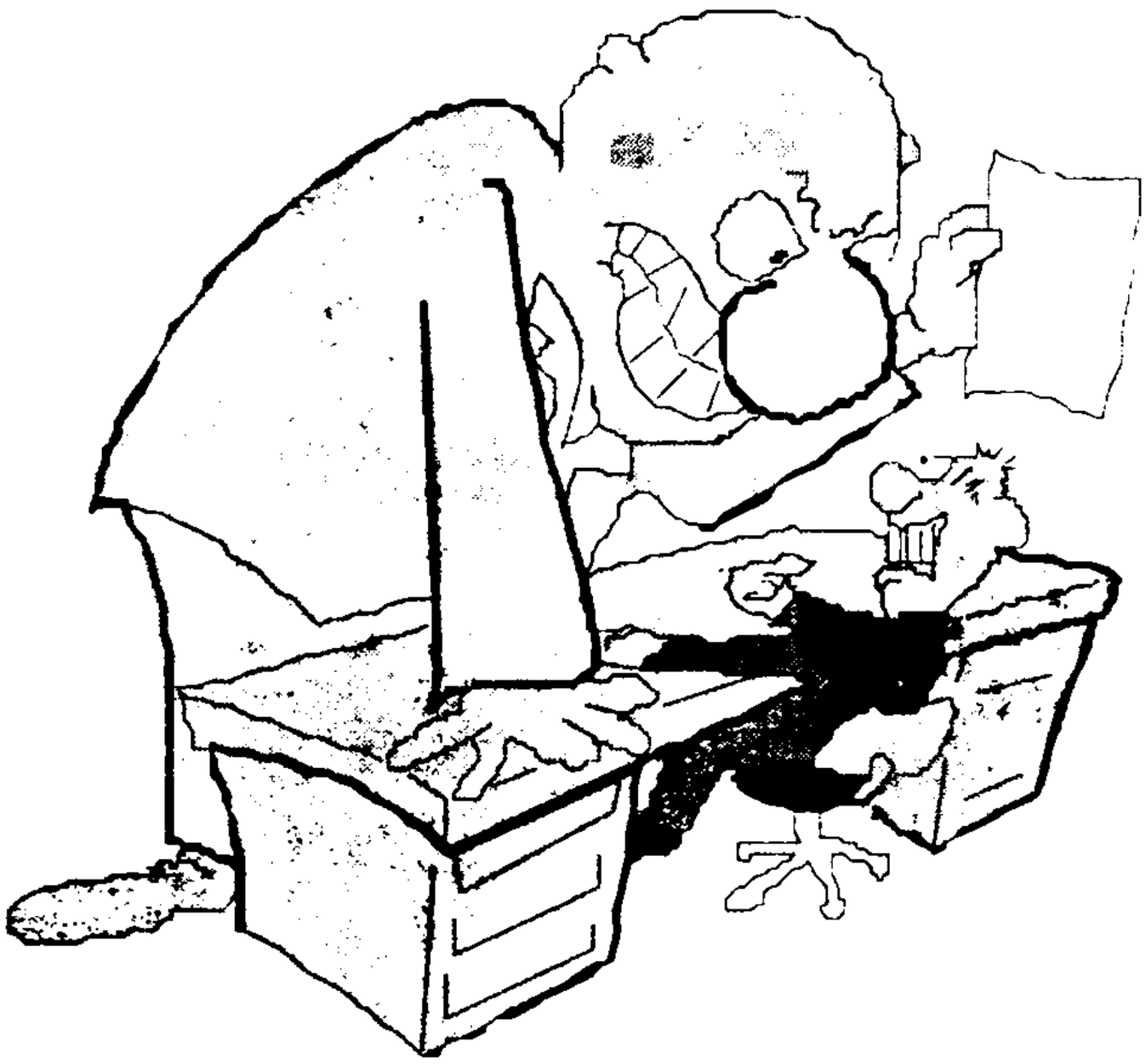
En vísperas del duelo, al legar a un amigo en notas apresuradas su testamento científico, le pide que, si su adversario vence, haga conocer sus descubrimientos a Gauss o Jacobi para que den una opinión "no respecto de la verdad, sino de la importancia de los teoremas". Espero que más tarde alguien encuentre provechoso descifrar todo este lío. Este lío es hoy la "Teoría de Grupo".

Sólo en 1846 se conoció gran parte de los escritos de Galois por obra de Joseph Liouville , y completó la publicación de sus escritos Jules Tannery a comienzos de este siglo (1908). En ellos asoma ya la idea de "cuerpo", y que luego desarrollan Riemann y Richard Dedekind, y que Galois introduce con motivo de los hoy llamados "imaginarios de Galois", concebidos con el objeto de otorgar carácter general al teorema del número de raíces de las congruencias de grado n de módulo primo. Es en estos escritos donde aparecen por primera vez las propiedades más importantes de la teoría de grupos (nombre que él acuño) que convierten a Galois en su cabal fundador.

Sin duda que la noción de grupo, en especial de grupo de substituciones que constituye el tema central de Galois, estaba ya esbozada en los trabajos de Lagrange y de Alexandre Théophile Vendermonde del siglo XVIII, y en los de Gauss, Abel, Ruffini y Cauchy del XIX, implícita en problemas de teoría de las ecuaciones, teoría de números y de transformaciones geométricas, pero es Galois quién muestra una idea clara de la teoría general con las nociones de subgrupo y de isomorfismo.

Falleció el 31 de Mayo de 1832 en París, Francia.

4 PROPORCIONALIDAD



Introducción

La proporcionalidad es una herramienta muy útil en las diversas aplicaciones de la matemática. El diseño a escala, las razones trigonométricas, los planos topográficos, la interpolación, etc., están basados en la proporcionalidad.

El principio de la proporcionalidad es la analogía.

En este capítulo expondremos algunas estrategias de resolución de problemas mediante la aplicación de las propiedades de los números proporcionales.

Dentro de este tema, aprovecharemos para abordar los problemas de reparto proporcional, escalas y la regla de tres.

Conocimientos previos

Es necesario saber las operaciones con fracciones. No es imprescindible pero es conveniente repasar. Para la resolución de algunos problemas se hará uso de ecuaciones elementales, que te sugiero que le des una revisión breve sobre cómo resolverlas.

4. PROPORCIONALIDAD

4.1 Proporción Geométrica

¿Qué significa la frase "dos números están en la relación de 5 a 3"? ¿Será que uno de los números es 5 y el otro es 3?

No necesariamente. Quiere decir que si el primero es 50 (diez veces 5), el segundo es 30 (diez veces 3). Si el primero es 20 (cuatro veces 5), el segundo es 12 (cuatro veces 3), etc.

Los números 50 y 30 están en la relación de 5 a 3. Igualmente los números 20 y 12, también están en la relación de 5 a 3.

Si a y b son dos números que están en la relación de 5 a 3, entonces:

$$\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$$ También: $$\frac{a}{5}=\frac{b}{3}$$

Obviamente hay infinitos números que están en la relación de 5 a 3.

También se dice que a es proporcional a 5 y b proporcional a 3.

Si $a = 50$ y $b = 30$, entonces: $\frac{50}{30}=\frac{5}{3}$, se observa que a es 10 veces 5 y b es 10 veces 3. Lógicamente, si a es 8 veces 5, se concluye que b es 8 veces 3.

Veamos algunos problemas.

Problema 1

Dos números están en la relación de 5 a 3. Si el mayor de ellos es 35, ¿Cuál es el menor?

Resolución

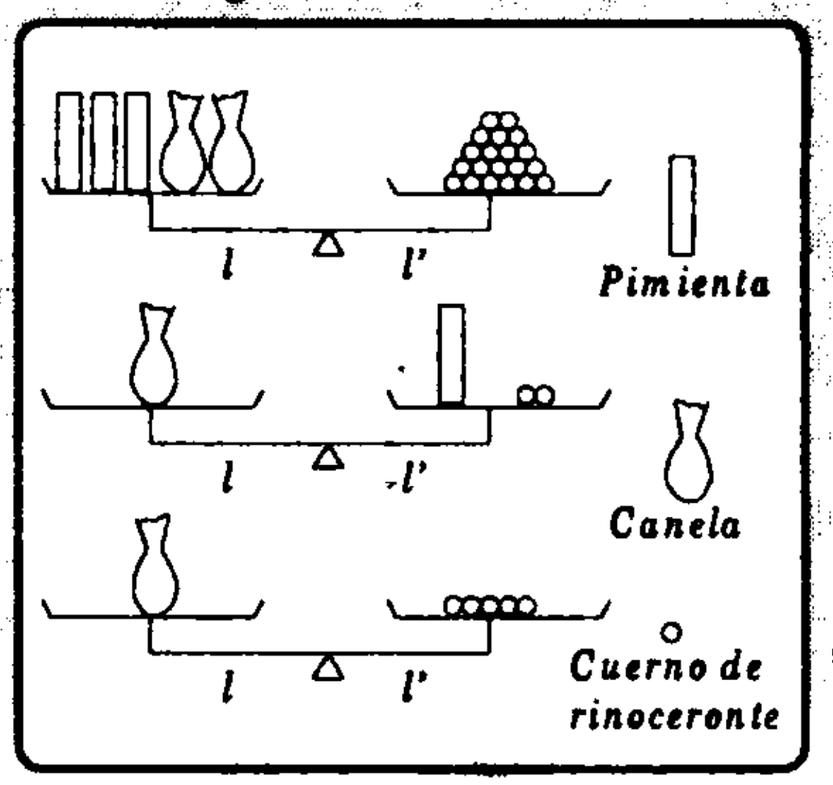
Dado que 35 es el mayor entonces es proporcional a 5 y el menor es proporcional a 3. Además, 35 es 7 veces 5, entonces el menor es 7 veces 3, o sea, $7 \times 3 = 21$

Rpta.: 21

Reto al ingenio 1

Escándalo de Macao

Cuando un individuo turbio se introduce en una comunidad, por honesta que sea, no tarda en corromperla.
El señor Ming, que en Macao estaba entregado al mismo negocio que el señor Yang, no tardó que su deshonesto competidor había amañado su balanza. Primero se indignó. Luego al comprobar que gracias a su fraude Yang había podido bajar los precios y le quitaba sus clientes, se resignó a emplear el mismo procedimiento.
A continuación se dan tres pesadas realizadas por el señor Ming. ¿Puedes decir quién de los dos, Yang o Ming era más ladrón, sabiendo que la relación de los brazos de la balanza del señor Yang es de 10 a 11?



TEN PRESENTE

Son equivalentes las frases:

"Están en relación de 5 a 3"

"Están en la proporción de 5 a 3"

"Son entre sí como 5 y 3"

"Uno es como 5 y el otro como 3"

Problemas

1. ***Dos números están en la relación de 9 a 7. Si el mayor de ellos es 36, ¿Cuál es el menor?***

   A) 28 **B)** 21 **C)** 42 **D)** 27 **E)** 35

2. ***Dos números están en la relación de 13 a 9. Si el menor de ellos 459, ¿Cuál es el mayor?***

   A) 650 **B)** 663 **C)** 702
   D) 624 **E)** 611

3. ***Los lados de un rectángulo están en la proporción de 12 a 17. Hallar el largo del rectángulo si el ancho mide 60 cm.***

   A) 102 cm **B)** 75 cm **C)** 68 cm
   D) 80 cm **E)** 85 cm

4. ***En un salón de clase, por cada 5 niñas hay 4 varones. Si hay 20 niñas, ¿Cuántos varones hay en dicho salón?***

   A) 16 **B)** 20 **C)** 12
   D) 18 **E)** 8

5. ***Los ahorros mensuales de Joaquín y Nacho, están en la relación de 13 a 16. Joaquín ahorra mensualmente 117 soles, ¿Cuál es el ahorro mensual de Nacho?***

   A) S/. 716 **B)** S/. 160 **C)** S/. 184
   D) S/. 164 **E)** S/. 144

6. ***Mauricio cada vez que va al mercado con su esposa Marucha, ella tiene la curiosa manía de gastar 5 soles por cada 4 soles que gasta Mauricio. ¿Cuánto gasta Marucha si Mauricio gasta 64 soles?***

   A) S/. 72 **B)** S/. 80 **C)** S/. 75
   D) S/. 85 **E)** S/. 90

Los números 50 y 30 están en la relación de 5 a 3. Ambos son 10 veces sus respectivos números proporcionales. La suma de **5 + 3 = 8** y la suma de **50 + 30 = 80**, que también es 10 veces 8. La diferencia **5 – 3 = 2** y la diferencia de **50 – 30 = 20**, que también es 10 veces la diferencia de 5 y 3.

Podemos concluir entonces, que si dos números guardan una relación con 5 y 3, entonces tanto la suma como la diferencia de los números guardan la misma relación con la suma y diferencia de 5 y 3.

Problema 2

Dos números están en la relación de 5 a 3. Hallar la suma de dichos números, si el menor de ellos es 156.

Resolución

El menor es proporcional a 3. Este es **156 ÷ 3 = 52** veces 3. Entonces, la suma de los números es 52 veces 5 + 3. Esto es, **52×8 = 416**

Rpta.: 416

Reto al ingenio 2

El señor Tong

¡Ay! el señor Tong, comerciante de especias en Macao, no tardó en reparar en las maniobras fraudulentas de sus competidores Yang y Ming. También él se ve obligado a renegar de su tradicional probidad. Solo que se le va la mano. Juzgue el lector por sí mismo observando las dos pesadas siguientes.

¿Puede usted decir cuánto gana fraudulentamente cada uno de los tres comerciantes en la venta de una onza de cuerno de rinoceronte cuyo precio de venta es de 180 dólares de Macao la onza? (suponiendo que no hayan engañado a su proveedor en la compra)

(Fig. Sgte. pág.)

Problema 3

Dos números están en la relación de 5 a 3. Hallar el menor de ellos, si la suma de los números es 488.

Resolución

La suma 488 es **488 ÷ 8 = 61** veces la suma de 5 y 3. Entonces el menor de los números es 61 veces 3. Es decir: **61 × 3 = 183**

Rpta.: 183

Problema 4

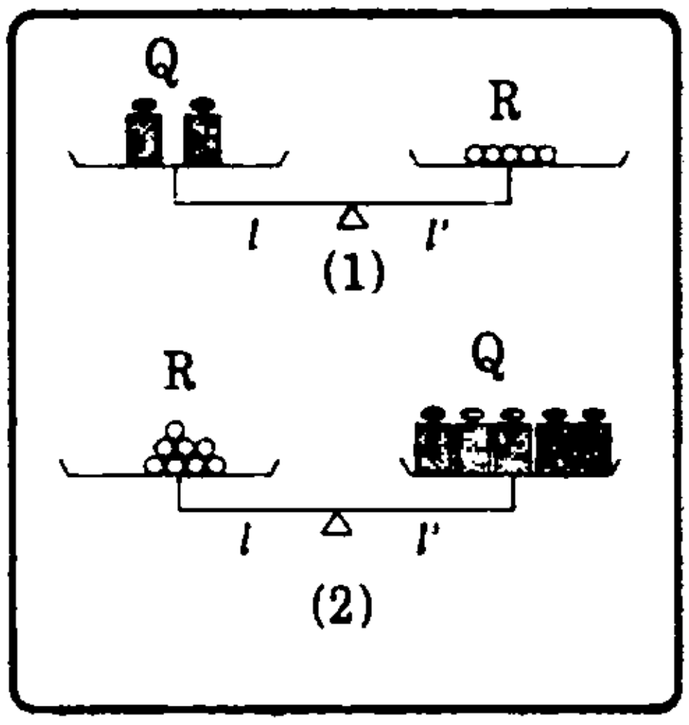
Dos números que están en la relación de 5 a 3 difieren en 124. Hallar la suma de dichos números:

Resolución

La diferencia de 5 y 3 es 2. La diferencia (dato) de los números es 124 que es 62 veces 2. Entonces, la suma de los números es 62 veces **5 + 3 = 8**. Esto es **62 × 8 = 496**.

Rpta.: 496

ESTA FIGURA CORRESPONDE AL RETO DE INGENIO ANTRIOR



Problemas

1. ***Dos números están en la relación de 9 a 5. Si la suma de los números es 350, el menor de ellos es:***

   A) 215 **B)** 250 **C)** 150
   D) 225 **E)** 125

2. ***Dos números están en la relación de 11 a 15. Hallar el mayor de ellos si la diferencia es 144.***

   A) 540 **B)** 450 **C)** 640
   D) 140 **E)** 240

3. ***Hay 48 monedas en dos montones. Si las monedas del primer montón es como 7 y las del segundo montón es como 5, ¿cuántas monedas hay en el segundo montón?***

   A) 15 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 24

4. ***Un número de estudiantes se divide en 3 grupos cuyos números son proporcionales a 5; 7 y 10. En los dos primeros grupos hay 36 alumnos, ¿Cuántos hay en el tercer grupo?***

   A) 20 **B)** 30 **C)** 40 **D)** 50 **E)** 60

5. ***Si 5 lapiceros cuestan tanto como 8 lápices y se ha comprado 364 útiles entre lápices y lapiceros, pagando por ambos la misma suma. ¿Cuántos de los útiles son lápices?***

   A) 140 **B)** 224 **C)** 150
   D) 220 **E)** 280

6. ***La suma y diferencia de dos números están en la relación de 13 a 5. Hallar el mayor de los números, si el menor de ellos es 36.***

   A) 54 **B)** 63 **C)** 72 **D)** 81 **E)** 90

Problema 5

Las alturas de dos edificios están en la relación de 5 a 3. El más alto mide 40 metros. ¿Cuánto mide el más bajo?

Resolución

Método (1)

• *Altura del edificio:*

más alto: 40
más bajo : x $\Rightarrow \quad \frac{40}{x} = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 24}$

Rpta.: 24 m

Método (2)

• *Altura del edificio:*

Edif. alto: $5\,k = 40\,m \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 8}$

Edif. bajo: $3\,k \Rightarrow 3\,k = 3(8) = 24\,m$

Rpta.: 24 m

Método (3)

• *Altura del edificio:*

8 veces

Edif. alto: $5 \leftarrow 40\,m$

Edif. bajo: $3 \rightarrow 3\times 8 = 24\,m$

$\times\, 8$

Rpta.: 24 m

Problema 6

Anita y Berta coleccionan llaveros. Los llaveros que tiene Anita y los que tiene Berta, están en la proporción de 7 a 6; pero Anita tiene 8 llaveros más que Berta. ¿Cuántos tiene cada una?

Resolución

Método (1)

 # Llaveros

Anita: $7k$
Berta: $6k$ $\Rightarrow$ DATO: $7k - 6k = 8 \Rightarrow \boxed{k = 8}$

$\therefore\ 7k = 7(8) = \mathbf{56}$ y $6k = 6(8) = \mathbf{48}$

Rpta: Tienen respectivamente 56 y 48 llaveros

EJERCICIOS

Si el edificio más alto mide 120 m hallar las altura del más bajo, sabiendo que están en la relación de:

a) *5 a 4* ***d)*** *12 a 5*

b) *5 a 3* ***e)*** *15 a 7*

c) *10 a 7* ***f)*** *24 a 13*

TEN PRESENTE

La frase "Anita tiene 8 llaveros más que Berta" significa que la diferencia entre el número de llaveros que tienen es 8.

EJERCICIOS

Si los llaveros que tienen están en la relación de 8 es a 5, hallar los que tiene cada una, sabiendo que:

a) Anita tiene 12 llaveros más que Berta

b) Entre ambas tienen 39 llaveros

c) Berta tiene 15 menos que Anita.

Método (2)

 # Llaveros

Anita: 7 DATO: Anita tiene: 7×8 = 56 llaveros

Berta: 6 ↓ Berta tiene: 6×8 = 48 llaveros

Diferencia: 1 <> 8

8 veces

Problema 7

De cada 20 postulantes a una universidad, sólo ingresan 3. ¿Cuántos se quedarán sin alcanzar vacantes, si se presentan 24 000 al examen de admisión.

Resolución

1200 veces

Postulantes: 20 ← 24 000

Ingresan: 3 ↑

No ingresan: 17 DATO

Por el dato, los postulantes son 24 000, que es 1200 veces el correspondiente número proporcional. Entonces los que no ingresan son 1200 veces 17.

∴ No alcanzan vacantes: 17 × 1200 = 20 400

Rpta.: 20 400

La proporcionalidad ¡Lo hace fácil!

Si has entendido la resolución de los problemas anteriores, ya estás en la capacidad de aplicar este concepto a otros problemas. Verás que la proporcionalidad simplifica muchos problemas engorrosos.

Problema 8

Gasté 4 veces lo que no gasté y me quedan 60 soles. ¿Cuánto tenía antes de gastar?

Resolución

No gasté : 1

Gasté : 4

⇒ Tenía : 5

*Lo que **me queda** es lo que **no gasté** que es 60 . Que es 60 veces 1.*

Por lo tanto

Lo que tenía es 60 veces 5:

5 × 60 = 300

TEN PRESENTE

Para saber cuántas veces 20 es 24 000:

$$\frac{24\,000}{20} = 1\,200 \text{ veces}$$

Reto al ingenio 3

Una decisión objetada del gobernador de Macao

Como consecuencia del escándo que había estallado en la corporación de los mercaderes de especias a causa de las maniobras de los señores Yang, Ming y Tang, y no disponiendo de un servicio de verificación de pesas y medidas, el gobernador de Macao decretó que las especias vendidas fueran pesadas dos veces, una vez en el platillo de la derecha de la balanza y la otra vez en el platillo de la izquierda y que el peso facturado al cliente sería el promedio de los dos pesos obtenidos.

Persuadido de haber tomado una sabia medida, el gobernador se sorpendió mucho al recibir la protesta del presidente de la corporación que le reprochó favorecer a los comerciantes deshonestos con sus balanzas preparadas.

¿Tenía fundamento esa protesta?

TEN PRESENTE

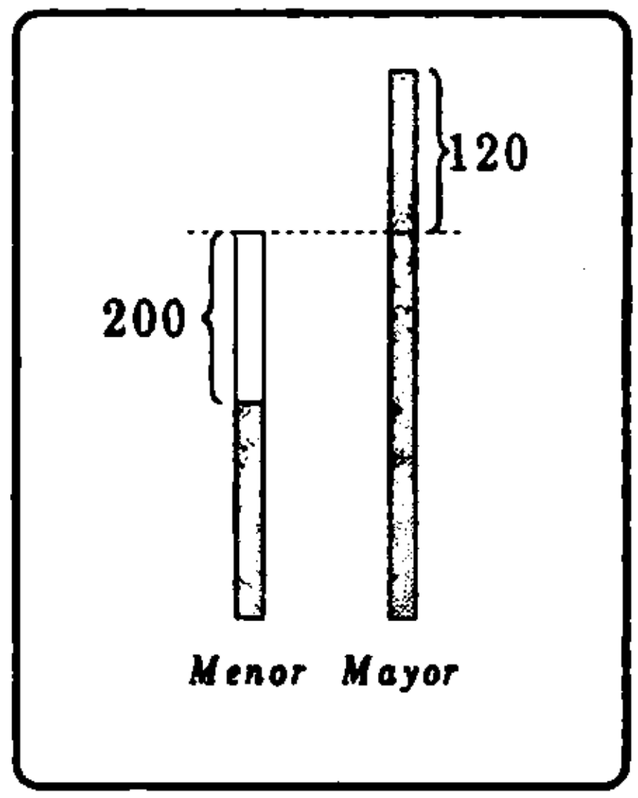
*Lo que **gasté** y lo que **no gasté** deben sumar lo que tenía antes de gastar.*

NOTA:

¿Entiendes por qué he puesto los números 1; 4 y 5?. Pues si gasté 4 veces lo que no gasté, entonces asumo que ***lo que no gasté*** *es como 1, en consecuencia lo que gasté es como 4 y lo que tenía es la suma, o sea como 1 + 4 = 5.*

Problema 9

Dos números son entre sí como 5 a 9, si al menor de ellos se le suma 200 y al mayor se le resta 120, ambos resultan iguales. Los números son:



Resolución

• Se deduce que la diferencia entre los números es: **200 + 120 = 320**

Mayor: 9
Menor: 5 $\Longrightarrow$ *Los números son:* *Mayor: 9×80 = 720* *Menor: 5×80 = 400*

Diferencia : 4 ← 320
80 veces

Rpta.: 720 y 400

Problema 10

Dos números son entre sí como 13 es a 8, si al menor se le suma 240, ¿Cuánto se le debe sumar al mayor para mantener la relación de 13 a 8?

Resolución

• Para no alterar la relación de 13 a 8; los aumentos deben guardar la misma relación que los números originales. Luego:

30 veces
Aumento del menor: 8 ← 240
Aumento del mayor: 13 DATO

Aumento del mayor:
$13 \times 30 = 390$

Rpta.: 390

Reto al ingenio 4

Un tanque lleno de agua pesa seis veces el tanque vacío. El mismo tanque lleno de otro líquido pesa 69 veces el tanque vacío. ¿Cuál es ese otro líquido?

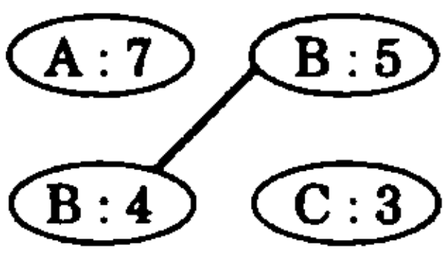
A) *Kerosene* ***B)*** *Boro*
C) *Bromo* ***D)*** *Mercurio*
E) *Acido sulfúrico*

Problema 11

Tres fábricas A, B y C fueron intervenidas por la SUNAT*. Los impuestos de A y B eran entre sí como 7 es a 4, y las de B y C como 5 es a 3. La fábrica C canceló el importe total de sus impuestos con 300 soles, mientras que A pagó 700 soles a cuenta. ¿Cuánto le falta pagar?

Resolución

• Planteamiento:



Según la primera condición B es como 4 y según la segunda condición B es como 5. ¿Qué hacer?

• Para que a B le corresponda el **mismo número proporcional**, multiplicamos por 5 los números de la primera columna y por 4, los de la segunda. La multiplicación no altera la relación que guardan los números. Este proceso se llama HOMOGENIZACIÓN.

$A : 7 \times 5 = 35$ $\quad B : 5 \times 4 = 20$ $\quad$ DATO ↓

$B : 4 \times 5 = 20$ $\quad C : 3 \times 4 = 12 \leftarrow 300$

25 veces

Se deduce que A debe pagar 25 veces 35, o sea $25 \times 35 = 875$. Como A pagó sólo 700, falta pagar $875 - 700 = 175$ soles.

Rpta.: 175 soles

4.2 Problemas con edades

Muchos problemas de edades se pueden resolver aplicando el concepto de proporcionalidad. Para ello es conveniente tener en cuenta un concepto adicional: **la diferencia de edades de dos personas siempre es la misma por más que pasan los años**; por ejemplo, si Mario nació en 1980 y Pepe en 1985, la diferencia entre sus edades siempre va ser 5. Observa:

* Superintendencia Nacional de Administración Tributaria.

Reto al ingenio 5

¿Cuál es más barata?

Dos naranjas casi perfectamente esféricas están a la venta. La primera de 4 cm de radio, cuesta 40 céntimos y la segunda de 3 cm de radio cuesta 30 céntimos. ¿Cuál de ellas es más barata que la otra?

Reto al ingenio 6

El comercio fraudulento del señor Yang

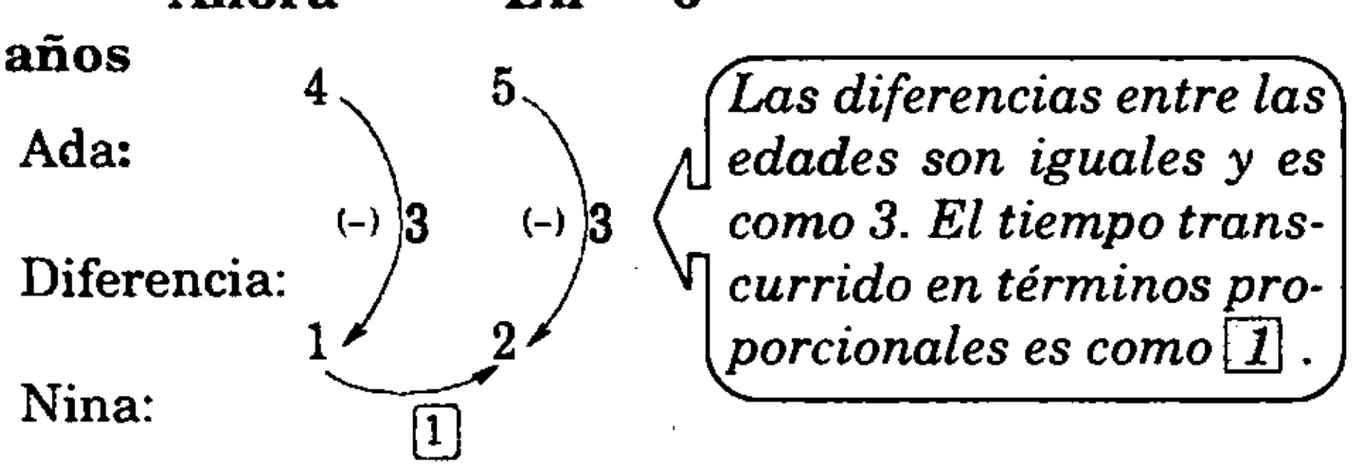
El señor Yang, comerciante de asta de rinoceronte, vende su producto con un margen del 50% en relación con el precio que paga a su proveedor, lo cual es mucho, y además el hombre no es muy honesto: uno de los brazos del astil de su balanza es más corto que el otro de manera que el proveedor, cuando le lleva su mercancía, debe colocar 1 100 gramos en un platillo para equilibrar el kilo que coloca el señor Yang en el otro platillo. En cambio, cuando se presenta un comprador, no tiene en su platillo los 1 000 gramos que deberían equilibrar el kilo que el señor Yang coloca en el otro platillo. En la última entrega que recibió, el señor Yang obtuvo así un súper beneficio fraudulento de 63 dólares. ¿Cuánto había pagado el señor Yang por esa partida?

Año	1980	1985	1997	2001
Edad de Mario:	5	10	17	21
Edad de Pepe:	0	5	12	16
Diferencia:	5	5	5	5

Problema 12

La edad de Ada es el cuádruple de la de Nina, sin embargo, dentro de 6 años estarán en la razón de 5 a 2. La edad de Ada es:

Resolución



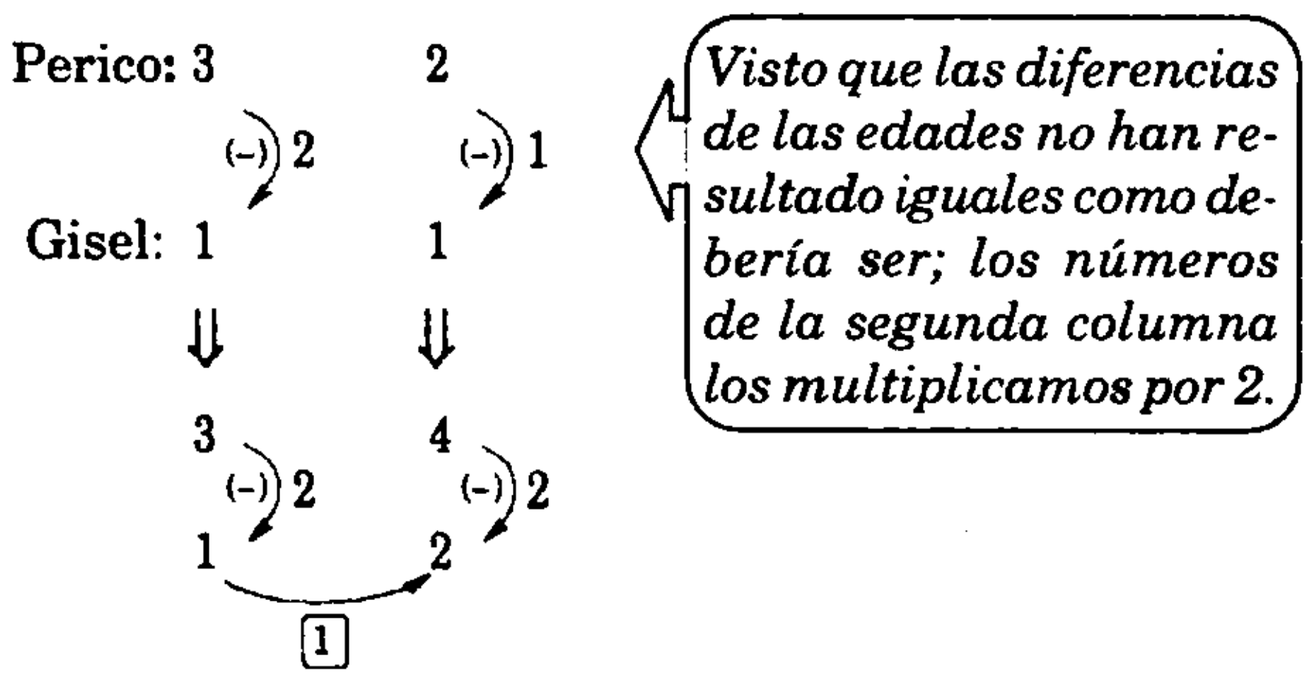
Luego: Si el tiempo transcurrido como 1 es 6 años (6 veces 1), entonces la edad de Ada, que es como 4, es 6 veces 4, o sea **6 × 4 = 24** años.

Rpta.: 24 años

Problema 13

Dos niños comentan de sus respectivas edades. Perico tiene el triple de la edad que tiene Gisel. Dentro de 4 años sólo será el doble de la edad de ella. ¿Qué edad tendrá ella dentro de 11 años?

Resolución



Reto al ingenio 7

La edad del Tío (1)

En cierta película, el actor Charles Coburn representaba el personaje de un "tío" ya mayor al que se le reprochaba el casarse con una chica a la que triplica la edad. A lo que él respondía con agudeza:
– Sí, pero dentro de veinte años , sólo se la doblaré.
¿Qué edad tenía el "tío" hace 10 años?

(1) Tomado de Matemática Recreativas de Michael Holt

Reto al ingenio 8

Si a usted le gustan los espárragos ...

Una vendedora de legumbres tenía la costumbre de atar sus espárragos con un bramante de 30 centímetros de longitud y formaba así manojos que vendía a 8 soles cada uno.
Como esos manojos le parecían demasiado pequeños, dio en utilizar bramantes de doble longitud y, en consecuencia, vendía sus manojos de espárragos a 16 soles cada uno.
¿Calculaba bien esa verdulera? ¿Qué precio debería pedir por cada manojo?

Por lo tanto: El tiempo transcurrido como $\boxed{1}$ es 4 años (4 veces 1), en consecuencia, la edad actual de Gisel que también es como $\boxed{1}$, será igualmente 4 años. Dentro de 11 años, ella tendrá **11 + 4 = 15** años.

Rpta.: 15 años

Problema 14

Julián le dice a su hijo Wálter: "nuestras edades actuales son como 7 a 2, pero dentro de 22 años serán como 5 a 3". Hallar la suma de las edades actuales.

Resolución

	Actual	**En 22 años**
Julián:	7	5
	(-)5	(-)2
Wálter:	2	3
	⇓×2	⇓×5
	14	25
	(-)10	(-)10
	4	15
Suma:	18	$\boxed{11}$

En vista que las diferencias de edades no son iguales, como debería ser, multiplicamos los números de las 2 columnas por 2 y 5 respectivamente.

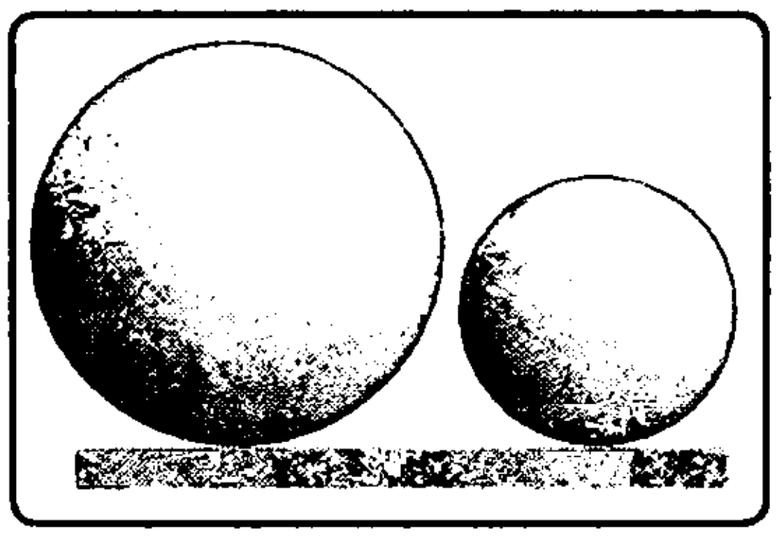
Luego: El tiempo transcurrido es como $\boxed{11}$ es 22 años (2 veces 11), entonces la suma de edades como $\boxed{18}$ es 2 veces 18, o sea **2 × 18 = 36** años.

Rpta.: 36 años

Reto al ingenio 9

La esfera pintada

Un vendedor de billares tiene como insignia de su negocio dos esferas desiguales, sólidas y hechas de la misma madera. La mayor pesa 27 kg y la pequeña 8 kg.
El comerciante se propone volver a pintar las insignias. Si le hacen falta 900 gramos de pintura para pintar la esfera mayor, ¿cuántos gramos de pintura necesita para pintar la pequeña? (La cantidad de pintura necesaria es proporcional a la superficie que hay que pintar.)



Problemas

1. ***En una mezcla de concreto, por cada 3 bolsas de cemento entran 5 carretillas de hormigón. El albañil dispone de 147 bolsas de cemento que los va gastar en la mezcla. ¿Cuántas toneladas de hormigón debe pedir para preparar el concreto, si cada carretilla pesa 60 kilogramos?***

   A) 16,5 t **B)** 18,0 t **C)** 15,4 t
   D) 14,7 t **E)** 15,7 t

2. ***Dos países han decidido invertir en el Perú. El país A, ha prometido que por cada 5 dólares que invierta el país B en el Perú, A invertirá 8 dólares. El país B, estima que invertirá unos 3485 millones de dólares. De cumplir su promesa, ¿cuánto invertirá el país A en el Perú? (En millones de dólares)***

   A) 5567 **B)** 5576 **C)** 5487
   D) 5580 **E)** 5570

3. ***Gasté 5 veces lo que no gasté y me quedan 35 soles. ¿Cuánto tenía?***

   A) S/. 210 **B)** S/. 217 **C)** S/. 235

D) S/. 147 E) S/. 240

4. ***Cuando Ricoto va al hipódromo no permite que sus empleados apuesten más que él. Su asistente Vladimico se atrevió apostar una fuerte suma, entonces Ricoto apostó 10 veces lo de Vladimico. La apuesta de los dos alcanzó los 891 soles. ¿Cuánto apostó Vladimico?***

A) S/. 81 B) S/. 72 C) S/. 54
D) S/. 63 E) S/. 90

5. ***Dos números son entre sí como 13 es a 7. Si el mayor se disminuye en 220 y el menor se incrementa en 722, ambos resultan iguales. Hallar el menor de los números.***

A) 2041 B) 1099 C) 1054
D) 2040 E) 1082

6. ***Los sueldos de Benjamín y Armando están en la relación de 13 a 8. Armando ha recibido un aumento de 196 soles, con lo que la nueva relación es de 15 a 13. ¿Cuál es el sueldo de Benjamín?***

A) S/. 750 B) S/. 754 C) S/. 772
D) S/. 778 E) S/. 780

7. ***Dos números están en la relación de 15 a 8. Si al mayor se le resta 240 soles, ¿Cuánto hay que restarle al menor para que conserven la relación?***

A) 256 B) 224 C) 136
D) 128 E) 240

8. ***Tres gerentes de una empresa tienen sueldos distintos, el sueldo del gerente general al del gerente técnico es como 15 a 12. El del gerente técnico es al del gerente de ventas como 8 a 9. Si en el sueldo de los tres gerentes la empresa desembolsa la suma de 6642 soles. ¿Cuál es el sueldo del gerente técnico?***

A) 1946 B) 1968 C) 1948
D) 1648 E) 1986

9. ***Se ha visto que de los postulantes a una carrera de ingeniería, por cada 7 hombres sólo 2 son mujeres. Se ha hecho una campaña para que postulen más mujeres y se ha logrado que la relación sea de 8 a 5, con un incremento de 1121 mujeres y hombres. ¿Cuántos postulantes son mujeres luego de la campaña?***

A) 1850 B) 1475 C) 1129
D) 1825 E) 1484

10. ***Las edades actuales de dos personas están en la relación de 7 a 5. Dentro de 10 años, la suma de sus edades será 80 años. ¿Cuál es la diferencia de edades?***

A) 5 B) 10 C) 15 D) 12 E) 13

11. ***Hace ocho años las edades de dos hermanos estaban en la relación de 5 a 4. Actualmente sus edades están en la relación de 7 a 6. ¿Cuál es la edad actual del mayor?***

A) 21 años B) 28 años C) 27 años
D) 35 años E) 30 años

12. ***Las edades actuales de dos personas son 24 y 16 años. ¿Dentro de cuántos años sus edades estarán en la relación de 9 a 7?***

A) 12 años B) 8 años C) 10 años
D) 15 años E) 14 años

13. ***Para Mariela la diferencia de edades es muy importante en las relaciones conyugales.***

— No te puedo aceptar Mario. Tu edad triplica la mía.

*— Pero dentro de 15 años, sólo será el doble —contesta Mario. ¿Qué edad tiene Mariela?***

A) 15 años B) 16 años C) 17 años
D) 18 años E) 20 años

4.3 Reparto proporcional

Problema 1

Repartir 540 en partes directamente proporcionales a 7, 12 y 17. Determinar cada una de las partes.

Resolución

Una división es aquella en que todas las partes obtenidas son iguales. Sin embargo, se puede dividir una cantidad en partes que no sean iguales, en tal caso se tiene que indicar de algún modo el tamaño de cada parte. Un modo de indicar el tamaño de las partes es haciendo que sean directa o inversamente proporcionales a ciertos números.

Las partes son como 7; 12 y 17; entonces el total es como **7 + 12 + 17 = 36**. La cantidad a repartir es **540 ÷ 36 = 15** veces 36. Entonces cada parte es 15 veces los números proporcionales.

Partes: $7 \times 15 = \boxed{105}$ $12 \times 15 = \boxed{180}$ $17 \times 15 = \boxed{255}$

Problema 2

Cuatro hermanos se han repartido una suma de dinero en partes proporcionales a sus edades que son 18; 20, 24 y 29 años. Si el mayor recibió 88 soles más que el menor, ¿Cuánto recibieron los dos intermedios juntos?

Resolución

El mayor le lleva por **19 – 18 = 11** años al menor.
Los 88 soles son **88 ÷ 11 = 8** veces 11, entonces lo que reciben los dos intermedios es 8 veces **20 + 24 = 44**:

$8 \times 44 =$ (352 soles)

Problema 3

Tres empresarios han invertido en un negocio: 3 600; 4 800 y 5 600 soles respectivamente. Luego de un período comercial, los socios han obtenido una utilidad de 1 295 soles y han decidido repartirse en partes proporcionales a sus respectivas inversiones. ¿Cuánto le corresponde al que invirtió más que los otros dos?

Reto de ingenio 10

El paseo

Adela, Carmen y Néstor fueron de paseo al campo. Adela y Carmen llevaron 5 y 4 panes respectivamente. Ellas compartieron con Néstor en partes iguales. Él, en agradecimiento las retribuyó con 9 soles. ¿Cuánto le correspondió a cada uno?

A) 5 soles y 4 soles
B) 4,5 soles y 4,5 soles
C) 7 soles y 2 soles
D) 6 soles y 3 soles
E) 8 soles y 1 sol

Reto de ingenio 11

El abuelo machista

Don Joaquín era un hombre muy machista. Carito, su única hija, nunca tuvo la oportunidad de tener novio debido a la actitud celosa del padre ya maduro, Carito salió embarazada. Don Joaquín al ver que su hija sería una madre soltera, le dejó su fortuna de 350 mil soles en las siguientes condiciones: si nace varón, las dos terceras partes para él y el resto para la madre. En cambio, si nace mujer, las dos terceras partes para la madre y el resto para la niña. Tras la muerte del padre, Carito dio a luz mellizos, un hombre y una mujer. ¿Cómo se repartieron la fortuna?

Resolución

Los capitales invertidos son: 9×400; 12×400 y 14×400, es decir, son como los números 9; 12 y 14. En consecuencia basta repartir los 1295 soles, en partes proporcionales a estos números.

Los capitales invertidos son como 9; 12 y 14, por consiguiente las utilidades serán proporcionales a estos números. Los 1 295 soles es proporcional a 9 + 12 + 14= 35 y es **1295 ÷ 35 = 37** veces 35, entonces la utilidad pedida es 37 veces 14 = **518 soles**.

Rpta.: 518 soles

Problemas

1. Repartir 516 en partes proporcionales a 12; 13 y 18. Indicar la parte intermedia.

A) 164 **B)** 146 **C)** 118
D) 148 **E)** 156

2. Repartir 288 proporcionalmente a los números 300, 400 y 900. Indicar el mayor de las partes.

A) 171 **B)** 162 **C)** 180
D) 189 **E)** 163

3. Al repartir una suma en partes proporcionales a 7; 10; 12 y 17, se encuentra que la mayor parte es 578. ¿Cuál es la menor parte?

A) 238 **B)** 248 **C)** 246
D) 230 **E)** 280

4. Tres personas se han repartido una suma de dinero proporcionalmente a los números 13; 17 y 18. Al que recibió la mayor parte le correspondió 55 soles más que al que recibió la menor parte. ¿Cuánto le correspondió al que recibió la parte intermedia?

A) 170 **B)** 180 **C)** 187
D) 190 **E)** 220

5. Tres hermanos que se habían repartido 477 soles proporcionalmente a sus edades que son 15; 18 y 20, decidieron repartirse en partes iguales. ¿Cuánto devolvió el mayor y con cuánto más se benefició el menor?

A) S/. 21 y S/. 24 **B)** S/. 21 y S/. 26
C) S/. 22 y S/. 24 **D)** S/. 20 y S/. 24
E) S/. 20 y S/. 21

6. Cuatro personas se han repartido la utilidad obtenida en un negocio, proporcionalmente a los números 13; 15; 18 y 26. De haberse repartido en forma equitativa, uno de ellos se habría perjudicado con 284 soles. ¿Cuál fue la suma repartida?

A) S/. 2665 **B)** S/. 2655 **C)** S/. 2556
D) S/. 2650 **E)** S/. 2560

7. A tres trabajadores se les asignó un premio para que se repartan proporcionalmente a 7; 10 y 15. Pero por equivocación fue repartido proporcionalmente a 15; 10 y 7, de modo que uno quedó beneficiado con 168 soles. ¿Cuánto recibió el que no fue beneficiado ni perjudicado con la equivocación?

A) S/. 420 **B)** S/. 80 **C)** S/. 210
D) S/. 240 **E)** S/. 260

8. ***Tres comerciantes A, B y C han invertido 2 520 soles, 3 240 soles y 4 680 soles respectivamente, en la compra de un lote de artículos. Luego de vender el lote han obtenido una utilidad de 696 soles. ¿Cuánto le corresponde a cada uno, si deciden repartirse proporcionalmente a sus inversiones? Dar como respuesta la parte correspondiente a B.***

A) 216 soles **B)** 218 soles **C)** 207 soles
D) 243 soles **E)** 236 soles

9. ***Ricoto ha decidido premiar a 4 de sus empleados por su fidelidad y las atenciones prestadas. Ha designado 4 925 soles para los premios. El cocinero recibió el triple de lo que le tocó al chofer, los 3/5 de lo que recibió éste equivalen a los 2/7 de lo que recibió el cajero. El premio del cajero y del jardinero están en la relación de 9 a 2. ¿Cuánto recibió el cocinero?***

A) S/. 2 255 **B)** S/. 2 200 **C)** S/. 1 575
D) S/. 750 **E)** S/. 2 250

4.4 Escalas

Al diseñar la arquitectura de una casa es necesario dibujar los detalles en un papel. Este dibujo se llama **plano de arquitectura**. Lógicamente, el tamaño del dibujo no puede ser del mismo tamaño de la casa. Entonces es necesario fijar qué longitud del plano representa una longitud dada de la casa.

Más precisamente qué relación debe haber entre la longitud representada en el dibujo con la verdadera longitud, esto es lo que se conoce como ESCALA.

Por ejemplo, si el ancho de la casa mide 8 metros, y este ancho se representa en el plano con 8 cm, entonces, la escala del dibujo es:

$$\frac{8\ cm}{8\ m} = \frac{8\ \cancel{cm}}{800\ \cancel{cm}} = \frac{1}{100} \quad \text{6 } 1 : 100 \text{ (Se lee : escala 1 en 100)}$$

Lo cual quiere decir que 1 cm del dibujo representa 100 cm en el terreno.

Problema 1

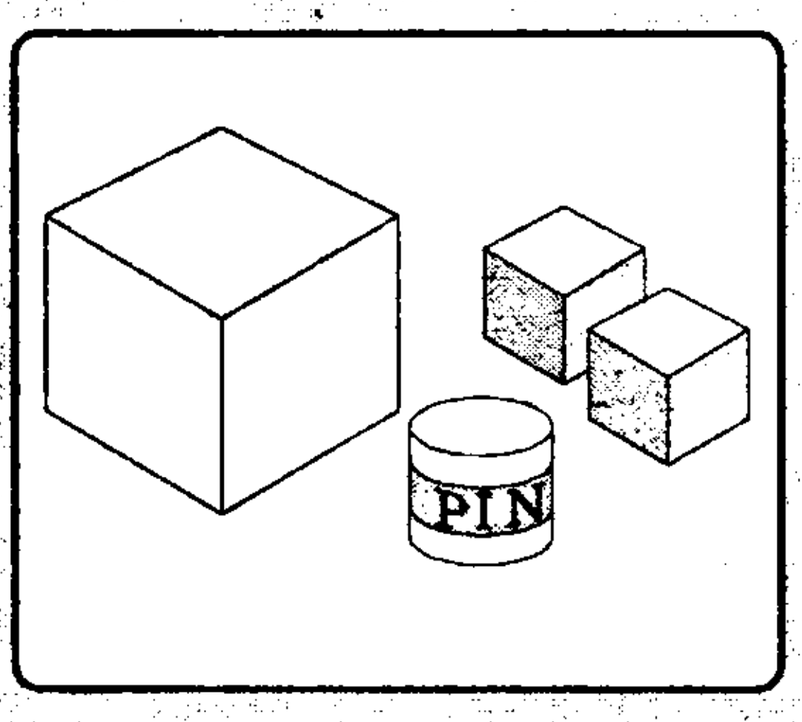
En un plano a escala de 1 en 1000, se ha dibujado un terreno rectangular. En el plano sus dimensiones son 12 cm y 15 cm. ¿Cuál es el área del terreno?

Resolución

Se deduce que si la escala es 1 en 1000 (1 : 1000), dada una longitud en el plano, la longitud en el terreno se obtiene multiplicando por 1000. Dada una longitud en el campo, para representarla en el plano hay que dividir entre 1000.

Reto al ingenio 12

El tarro de pintura fue suficiente para pintar dos de los cubitos. ¿Cuántos de estos tarritos serán suficientes para pintar el cubo grande? Si dibujáramos la cara del cubo grande a la escala de 1:10, tendría el mismo "tamaño" que el dibujo de la cara de uno de los cubitos, a la escala de 1:1.



$$\left.\begin{array}{l} Ancho: 12\times 1000\,cm = 12000\,cm = 120\,m \\ Largo\ : 15\times 1000\,cm = 15000\,cm = 150\,m \end{array}\right\} \; Area = 120\times 150\,m$$

$$\boxed{Area = 18000\,m^2}$$

Problema 2

Determinar la escala a la cual se ha diseñado un parque rectangular de 120 m de ancho por 150 m de largo, si en el plano está representado por 24 cm de ancho por 30 cm de largo.

Resolución

Ancho: 24 cm representa 120 m, o sea 12 000 cm, entonces la escala es:

$$\frac{24\,cm}{120000\,cm} = \frac{1}{500}$$

La escala es 1 en 500. Igual resultado nos da si hacemos el cálculo con la longitud del largo.

Rpta.: 1:500

Problema 3

Se ha diseñado un reservorio de agua a escala 1 en 50 y se ha elaborado una maqueta del reservorio a la misma escala. Si en la maqueta entra 1 litro de agua. ¿Cuántos litros de agua caben en el reservorio?

Resolución

La escala 1 en 50 indica la razón entre ***longitudes*** *del dibujo y las longitudes reales, mas no de áreas ni de volúmenes. La razón entre las áreas, es igual a la razón entre los cuadrados de las longitudes y la razón entre los volúmenes es igual a la razón de los cubos de las longitudes.*

El volumen de la maqueta es 1 litro, o sea 1000 cm^3. Si el volumen es 1000 cm^3 entonces la arista interior de la maqueta mide $\sqrt[3]{1000} = 10\,cm$. Dado que la escala es 1 en 50, entonces la arista interior del reservorio mide **50×10 = 500** cm = 5 metros. Si la arista mide 5 m, entonces el volumen del reservorio es $5^3 =$ **125 m^3**

Reto al ingenio 13

Es suficiente un papel tamaño A4 para dibujar el plano de una región aurífera a la escala de 1: 1000. ¿Cuántos papeles de tamaño A4 serían necesarios para dibujar la misma región a la escala de 1:25000?

Reto al ingenio 14

La Torre EIFFEL (*)

– No cabe duda, es una maravilla – comentaba Miguel mientras contemplaba asombrado en París, la Torre Eiffel con sus 300 m de altura.

– Mandaré hacer una réplica a escala del mismo material que el original, pero que pese sólo 1 Kg. En lugar de las 8000 toneladas de la auténtica, la llevaré cómodamente en mi equipaje de regreso al Perú.

Miguel tendría un inconveniente para llevar la réplica en su equipaje. ¿Por qué?

(*) *La Torre Eiffel construída en 1889 con motivo de la Exposición Universal de París, mide 321m de altura y pesa 7175 toneladas. Su construcción duró más de 2 años.*

Problemas

1. ***¿Cuál es la longitud de una carretera si en el plano a la escala de 1 en 5000, tiene una longitud de 30 cm.***

   A) 1 km **B)** 1,5 km **C)** 3 km
   D) 15 km **E)** 15 m

2. ***¿A qué escala está dibujado un plano, si un cuadrado de 100 m de lado en el terreno se representa en el plano con un cuadrado de 100 cm² de área?***

   A) 1 : 10 **B)** 1 : 100 **C)** 1 : 1000
   D) 1 : 10000 **E)** 1 : 500

3. ***En un plano a escala de 1 en 100, hay un terreno rectangular de 3 cm por 5 cm. ¿Cuál es el área de este terreno?***

   A) 15 m² **B)** 1500 m² **C)** 150 m²
   D) 1,5 km² **E)** 15 km²

4. ***Una esfera de 10 cm de radio pesa 3 kg. Otra esfera hecha del mismo material que la primera pero de 20 cm de radio, ¿cuánto pesará?***

   A) 6 kg **B)** 12 kg **C)** 24 kg
   D) 48 kg **E)** 18 kg

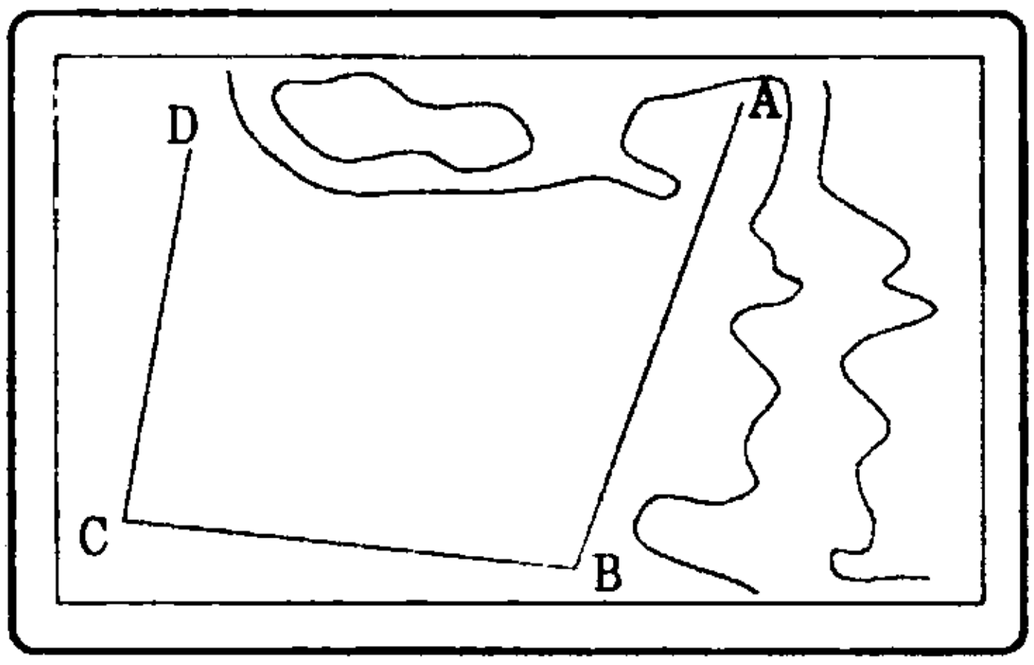
5. ***Se ha elaborado la maqueta de un avión a la escala de 1 en 100, con el mismo material con que será construido el avión. Si la maqueta pesa 0,48 kg, ¿cuánto pesaría el avión una vez construido?***

   A) 40 kg **B)** 480 t **C)** 8 t
   D) 40 t **E)** 800 t

6. ***Una maqueta de un barco hecha a la escala de 1 en 500 y con el mismo material con que será construido el barco, requiere 50 gramos de pintura para su superficie. ¿Cuántos kilogramos de pintura requerirá el barco?***

   A) 12,5 kg **B)** 125 kg **C)** 12,5 t
   D) 25 t **E)** 1,25 t

7. ***En la figura adjunta, se pide calcular la longitud de la ruta de A a D, pasando por B y C, sabiendo que el dibujo está a la escala de 1 : 2500.***



   A) 20 m **B)** 200 m **C)** 2 km
   D) 200 cm **E)** 20 km

8. ***Un terreno de cultivo tiene una área de 575 m². Si se dibuja a una escala de 1 en 500, ¿ qué área tendrá en el plano?***

   A) 23 cm² **B)** 23 m² **C)** 2,3 m²
   D) 2,3 m² **E)** 230 cm²

9. ***¿A qué escala está dibujado un plano, si 2 400 m² de terreno está representado por 6 cm²?***

   A) 1:200 **B)** 1:2 000 **C)** 1:20 000
   D) 1:40 000 **E)** 1:400

10. ***¿Qué altura tendrá un edificio cuya maqueta tiene 20 cm de altura, si una habitación del edificio de 6 m× 5 m dibujada a la misma escala que la maqueta, en el plano tiene 7,5 cm² de área***

    A) 20 m **B)** 40 m **C)** 400 m
    D) 100 cm **E)** 80 m

4.5 Regla de Tres

La regla de tres es una estrategia que se aplica para resolver problemas de proporcionalidad.

Veamos en qué consiste a través de los siguientes problemas.

Problema 1

Una persona puede caminar normalmente 9 kilómetros en 2 horas. En una caminata normal de 7 horas, ¿cuántos kilómetros puede caminar?

Resolución

Si tabulamos las horas de caminata y los correspondientes kilómetros caminados, tendremos el siguiente cuadro.

horas	1	2	3	4	...	7	...
kilómetro	4,5	9	13,5	18	...	x	...

Se observa que los números ***7*** *y* ***x*** *son proporcionales a los números* ***2*** *y* ***9****. De modo que:*

$$\frac{x}{9}=\frac{7}{2}\Rightarrow x=\frac{7.9}{2}\Rightarrow \boxed{x=31,5}$$

De esta relación se desprende una regla práctica, LA REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA, *que se expone en la resolución del problema.*

Si en 2 horas se camina 9 km
en 7 horas se camina x
(D)

$$x=\frac{7\times 9}{2}\Rightarrow \boxed{x=31,5\ km}$$

Los kilómetros caminados son ***directamente proporcionales*** *(D) a las horas de caminata (1).*

Reto al ingenio 15

Un pintor se demora 10 minutos en pintar una pared cuadrada de 1 metro de lado. ¿Qué tiempo se demorará pintar otra pared cuadrada de 2 metros de lado?

Reto al ingenio 16

Desacuerdo en la compra

En el mercado:
– ¿Cuánto cuesta 5 kg de pera? – preguntó Ana
- Veinte soles – respondió Toño el frutero – Si te llevas 20 kg te dejo a S/. 50.00
– Quiero llevarme 10 kg.
– Como 5 kg cuesta 20 soles, 10 kg son 40 soles
– ¡Un momento! – dijo Ana – Me dijiste que 20 kg son 50 soles, entonces, 10 kg son 25 soles.
¿Quién de los dos tiene razón?

Problemas

1. Un grupo de 18 trabajadores pueden hacer una zanja de 48 metros en un día. Si quisiera que la zanja tuviera 16 metros más, ¿cuántos hombres más tendría que contratar para que terminen todo en el mismo día?

A) 3 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 8

(1) Querido lector, sobre magnitudes proporcionales te recomiendo revisar un libro de aritmética.

2. ***Para construir un tramo de 36 km de carretera se necesita 120 obreros. ¿Cuántos obreros serán necesarios para ejecutar una carretera de 42 km, en el mismo tiempo?***

A) 100 **B)** 110 **C)** 120
D) 130 **E)** 140

3. ***Un grifo que vierte agua a razón de 80 litros por minuto, ha llenado en media hora la octava parte de la capacidad de un tanque. ¿Cuánto tardará en llenar lo que falta?***

A) 2 h 30 min **B)** 3 h
C) 3 h 30 min **D)** 4 h
E) 4 h 30 min

4. ***En 45 litros de agua se echa 36 gramos de sal. Si se extrae 3 litros de esta mezcla, ¿cuántos gramos de sal contendrá?***

A) 2 g **B)** 2,3 g **C)** 2,4 g
D) 2,5 g **E)** 2,6 g

5. ***Se mide la longitud de la sombra que proyecta un edificio y se obtiene 35 metros. En ese momento se mide la sombra que proyecta un hombre de 1,68 m estatura y se obtiene 1,4 m. ¿Cuál es la altura del edificio?***

A) 36 m **B)** 38 m **C)** 34 m
D) 42 m **E)** 45 m

6. ***Veinticinco gallinas consumen 60 kilos de engorde en un mes. Si quiero alimentar 160 gallinas durante un mes con el mismo nivel de consumo de engorde, ¿cuántos kilos de este alimento debo comprar?***

A) 380 kg **B)** 390 kg **C)** 384 kg
D) 386 kg **E)** 382 kg

Problema 2

Se ha calculado que para construir un edificio se necesita 80 obreros y 60 días. Pero se cuenta solamente con 75 obreros. ¿Cuántos días se tardará en construir el edificio?

Resolución

Cuanto más obreros intervienen en una obra, se demoran menos días en terminar la obra. El número de obreros que interviene en una obra y el tiempo que demoran en ejecutarla son ***inversamente proporcionales****. Veamos en el cuadro siguiente el comportamiento de los valores de dos magnitudes inversamente proporcionales.*

Número de obreros	20	40	**80**	160	...	**75**	...
Días que demoran	240	120	**60**	30	...	x	...

Se observa que el producto de cualquier par de valores correspondientes es igual al producto de $60 \times 80 = 4800$*. Luego:*

$$x \cdot 75 = 60 \cdot 80 \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 80}{75} \Rightarrow \quad \boxed{x = 64 \text{ días}}$$

De esta relación se desprende otra regla práctica, la REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA*, que se expone mediante la resolución del problema propuesto.*

Si 80 obreros demoran 60 días
75 obreros demoran x.
↓
(I)

$$\Rightarrow \quad x = \frac{60 \cdot 80}{70} \Rightarrow \boxed{x = 64 \text{ días}}$$

Problemas

1. ***Veinte personas tienen alimentos para 18 días. ¿Para cuántos días alcanzarían estos alimentos, si fueran 36 personas?***

A) 6 días **B)** 8 días **C)** 9 días
D) 10 días **E)** 12 días

2. ***Recorriendo a velocidad promedio de 84 kilómetros por hora, tardo 6 horas en cubrir una ruta. Viajando a 56 kilómetros por hora, ¿qué tiempo demoraría?***

A) 7 h **B)** 8 h **C)** 9 h
D) 10 h **E)** 12 h

3. ***Si n obreros pueden hacer una obra en d días, ¿cuántos obreros serían necesarios para hacer la misma obra en 20% menos del tiempo previsto?***

A) 1,2 d **B)** 1,25 d **C)** 1,3 d
D) 1,4 d **E)** 1,5 d

4. ***Un grupo de 45 trabajadores proyectaron hacer una obra en 36 días, pero tardaron más días porque 15 de ellos decidieron no intervenir en la obra. ¿Cuántos días tardaron en terminar la obra?***

A) 18 días **B)** 36 días **C)** 40 días
D) 50 días **E)** 54 días

5. ***Debí terminar un trabajo en 18 días, pero tardó 6 días más por trabajar 2 horas menos por día. ¿Cuántas horas por día trabajé?***

A) 8 h **B)** 7 h **C)** 9 h
D) 5 h **E)** 10 h

6. ***Trabajando 10 horas diarias se estima construir un puente en 48 días. Trabajando 8 horas diarias, cuántos días más se demoraría?***

A) 6 días **B)** 8 días **C)** 10 días
D) 12 días **E)** 15 días

7. ***En una granja hay 40 patos y 54 gallinas. Estas aves consumen el mismo tipo de alimento. Por cada 3 kilogramos que consumen los patos, las gallinas consumen 2 kilogramos. Se ha comprado la misma cantidad de alimentos tanto para los patos como las gallinas y se estima que alcanza para 25 días de consumo para los patos. ¿Para cuántos días de consumo alcanza para las gallinas?***

A) 20 días **B)** 21 días **C)** 22,5 días
D) 23,5 días **E)** 21,5 días

8. ***Una guarnición de 374 soldados tienen víveres para 45 días. Si luego 6 días llegan más soldados, por lo que se estima que los víveres se agotarán 5 días antes. ¿Cuántos soldados llegaron?***

A) 40 **B)** 45 **C)** 50 **D)** 55 **E)** 60

9. ***En una obra en la que trabajaban 15 obreros faltaba 8 días para culminar la obra. En ese momento se contrataron 5 obreros más. ¿Cuántos días antes de lo que falataba se terminará la obra?***

A) 2 **B)** 3 **C)** 1 **D)** 4 **E)** 5

Problema 3

Un grupo de 60 obreros pueden cavar en 24 días una zanja de 36 m largo, 2 m de ancho y 1,5 m de profundidad, a razón de 9 horas diarias. ¿Qué tiempo tardarán 24 obreros doblemente eficientes que los anteriores, en cavar otra zanja de 48 m largo, 2,5 m de ancho y 2 m de profundidad, a razón de 10 horas por día?

Resolución

Cuando intervienen varias magnitudes la regla se llama, REGLA DE TRES COMPUESTA. *Disponemos todas las magnitudes que intervienen en el problema con sus respectivos valores correspondientes. Identificamos aquella magnitud cuyo valor se pretende hallar. Esta se compara con cada una de las demás, estableciendo si son directa o inversamente proporcionales, indicando debajo de los valores de cada magnitud comparada si son directa (D) o inversamente (I) proporcionales.*

Luego, para el cálculo se procede como si fuera una regla de tres entre la magnitud de comparación con cada una de las demás.

Obrs.	días	largo	ancho	prof.	h/d	efic.
60	24	36	2	1,5	9	1
24	x	48	2,5	2	10	2
(I)		(D)	(D)	(D)	(I)	(I)

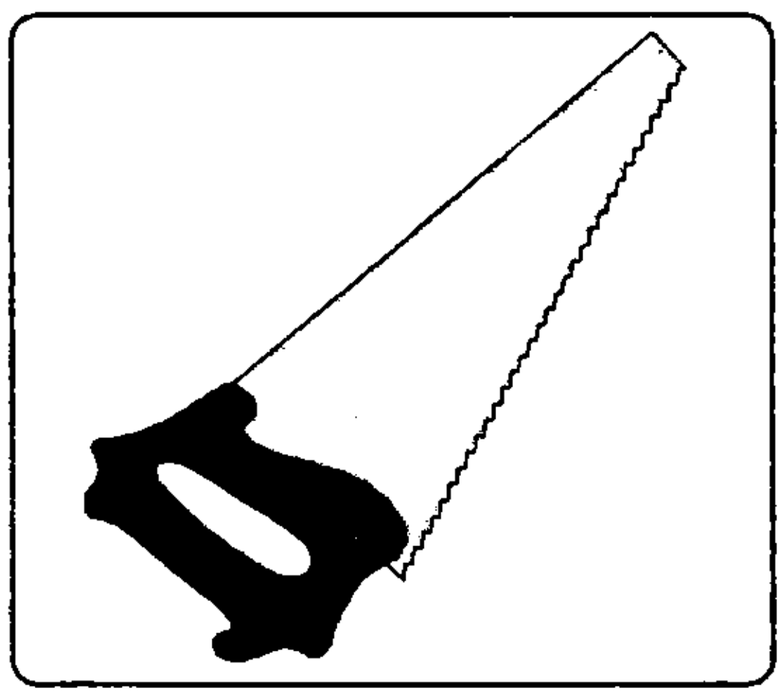
$$x = 24 \times \frac{60}{24} \times \frac{48}{36} \times \frac{2,5}{2} \times \frac{2}{1,5} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{2} = 60$$

Rpta.: 60 días

Reto al ingenio 17

Enigma arbóreo

El ayuntamiento ha contratado a Don y Spencer para que poden las árboles que flanquean una avenida. Hay un número igual de árboles en cada lado de la avenida. Don llega antes y ha podado ya tres árboles del lado derecho cuando llega Spencer y le hace notar que debería estar podando los de la Izquierda. Asi que Don empieza de nuevo en la lado izquierdo y Spencer continúa en el derecho. Cuando Spencer termina su lado, cruza la avenida y le poda seis árboles a Don, con lo que terminan el trabajo.
¿Quién poda más y por cuánta diferencia?



Problemas

1. Una cuadrilla de 32 obreros pueden hacer una obra en 27 días a razón de 8 horas diarias. ¿Cuántos días tardarán 36 obreros doblemente eficientes que los anteriores para efectuar la misma obra a razón de 6 horas diarias?

A) 14 días B) 13 días C) 15 días
D) 16 días E) 20 días

2. Para alimentar 50 chanchos durante 24 días, se necesitan 360 kilogramos de un producto. Si se quiere aumen-

tar la ración de dicho producto en un cuarto más del consumo habitual, aumentando 14 chanchos y además, que el referido alimento dure 8 días más, ¿cuántos kilogramos del mencionado producto se debe disponer?

A) 460 kg **B)** 750 kg **C)** 760 kg
D) 768 kg **E)** 748 kg

3. Veinte tejedoras han confeccionado 240 chompas en 36 días, trabajando 8 horas por día. Se quiere satisfacer un pedido de 840 chompas en un plazo de 30 días, razón por la cual se ha decidido trabajar 12 horas diarias y contratar más tejedoras igualmente eficientes que las que se tienen. ¿Cuántas será necesario contratar para cumplir con el pedido?

A) 50 **B)** 56 **C)** 36 **D)** 18 **E)** 24

4. Un barco con 240 tripulantes, ha realizado una travesía durante 36 días y han consumido 6 912 cubos de agua. Se estima que la próxima travesía será de 48 días y que la tripulación será de 360 personas. ¿Con cuántos cubos de agua se debe proveer al barco para esta travesía?

A) 10 368 **B)** 12 345 **C)** 12 485
D) 13 824 **E)** 14 270

Problemas Resueltos

Problema 1

Hallar la cuarta diferencial de 224, 190 y 300

Resolución

$$224 - 190 = 300 - x$$
$$34 = 300 - x \Rightarrow \boxed{x = 266}$$

Cuarta diferencial de 224, 190 y 300

Problema 2

Hallar la tercera diferencial de 500 y 350

Resolución

$$500 - 350 = 350 - x$$
$$150 = 350 - x \Rightarrow \boxed{x = 200}$$

Tercera diferencial de 500 y 350

Problema 3

Hallar la media proporcional de 25 y 36.

Resolución

$$\frac{25}{x} = \frac{x}{36} \Rightarrow 25 \times 36 = x^2 \Rightarrow x^2 = 900$$

$\therefore \boxed{x = 30}$ ←*Media proporcional de 25 y 36.*

Problema 4

Hallar la media armónica de 24 y 8.

Resolución

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{4}{24} = \frac{2}{x} \Rightarrow \boxed{x = 12}$$

Media armónica de 24 y 8

Problema 5

Hallar la tercera proporcional de 16 y 12

Resolución

$$\frac{16}{12} = \frac{12}{x}$$

$$\frac{16}{12 \times 12} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{x} \quad \therefore \boxed{x = 9}$$

Tercera proporcional de 16 y 12

Problema 6

Las edades actuales de Javier y Manuel están en la razón de 3 a 2. Javier le lleva a Manuel por 6 años. ¿Qué edad tienen?

Resolución

Javier : 3 → Javier: 3 × 6 = 18 años

(-) 1 <> 6 ⇨

Manuel: 2 → Manuel: 2 × 6 = 12 años

La diferencia de edades es 6, que es 6 veces la diferencia de los números proporcionales 3 y 2. Entonces las edades son 6 veces los números proporcionales

Problema 7

Las edades de dos hermanos están en la razón de 5 a 3. Hallar las edades, si la razón aritmética entre ellas es 8.

Resolución

Si el mayor tuviera 5 años, el menor tendría 3 y la razón aritmética valdría **5 – 3 = 2**. Pero la razón aritmética vale 8, es decir, 4 veces 2, entonces el mayor tiene 4 veces 5 = 20 años y el menor, 4 veces 3 = 12 años.

ESQUEMA DE LA RESOLUCIÓN

Mayor : 5 ⇨ Mayor: $5 \times 4 = 20$

Menor : 3 ⇨ Menor: $3 \times 4 = 12$

Diferencia : 2 <> 8 ← DATO

(*Valor de la razón aritmética*)

Rpta.: 20 y 12

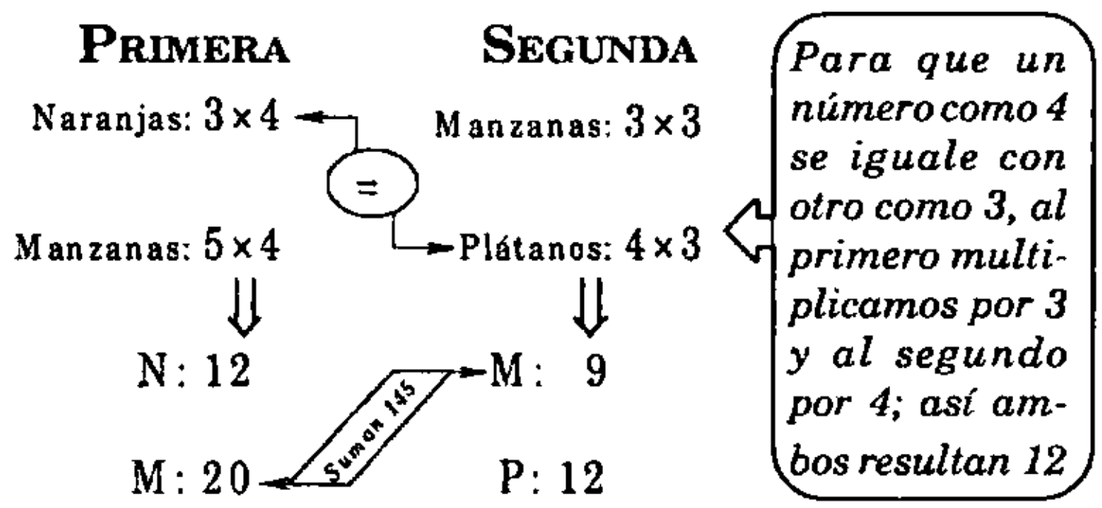
Problema 8

Dos hermanas regresaban del mercado, habiendo vendido toda la fruta que llevaron.

– Yo vendí 3 naranjas por cada 5 manzanas– dijo la primera.

– Yo vendí 3 manzanas por cada 4 plátanos– comentó la segunda y continuó diciendo –además, llevé tantos plátanos como tú naranjas. Y entre ambas llevamos 145 manzanas.
¿Cuántos plátanos vendió la segunda?

Resolución



⇒ $20 + 9 = 29$ <> 145 ← (5 veces 29)

∴ Vendió $5 \times 12 = 60$ plátanos

Rpta.: 60 plátanos

Problema 9

Heredé una fortuna de mis abuelos. La mitad lo invertí en un negocio, la quinta parte deposité en el Banco de Crédito y los 600 mil restantes en el Banco Wisse. ¿No sientes curiosidad por saber cuánto me dejaron mis abuelos? (Esto es sólo un sueño ...)

Resolución

Escojamos un **número proporcional** para representar el monto de mi herencia. Convenientemente que tenga **mitad** y **quinta** parte. ¿Te parece 10? (También puede ser 20; 50 ó 100, resulta lo mismo)

Herencia : 10

Negocio : 5

Bco. Créd. : 2

Dato: 200 mil veces 3

Heredé 200 mil veces 10, o sea:

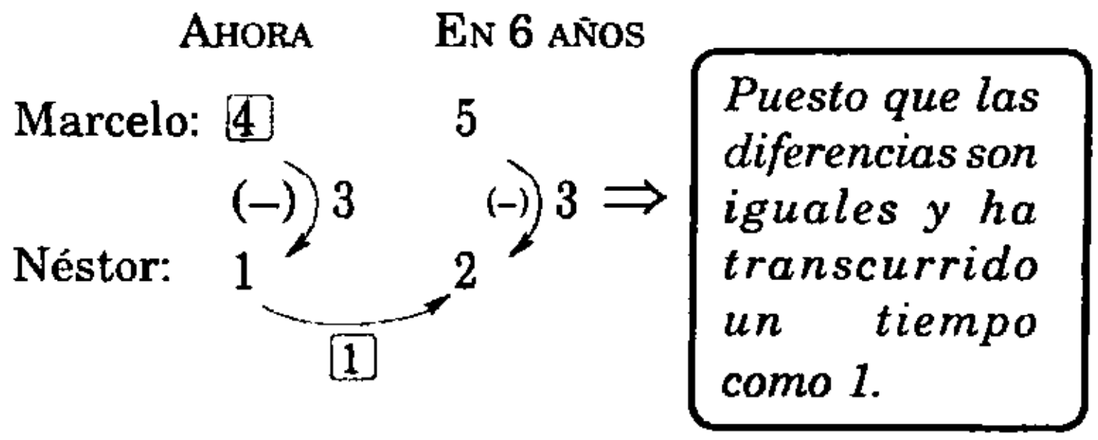
¡2 millones!

Banco Wisse: 3 <> 600 mil.

Problema 10

La edad de Marcelo es el cuádruple de la de Néstor, sin embargo, dentro de 6 años estarán en la razón de 5 a 2. La edad de Marcelo es:

Resolución



Luego: si el tiempo como 1 es 6 años, entonces la edad de Marcelo, que es como 4 , es $4 \times 6 = 24$ años.

Rpta: 24 años

Problema 11

Sara tiene el triple de la edad de Mabel, pero dentro de 12 años sólo será el doble. ¿En qué año nació Mabel, si Sara nació en 1961?

Resolución

	AHORA	EN 12 AÑOS	
Sara:	3	2	
	(–) 2	(–) 1	⇒
Mabel:	1	1	
	⇓	⇓×2	
	3	4	
	(–) 2	(–) 2	⇐
	1	2	
		1	

Visto que las diferencias de las edades no ha resultado iguales como debería ser; los números de la segunda columna los multiplicamos por 2.

Por lo tanto: El tiempo transcurrido como 1 es 12 años, entonces la diferencia de edades como 2 es **2 × 12 = 24** años. En consecuencia, Mabel nació en **1961 + 24 = 1985**

Rpta: 1985

Problema 12

Adrián le dice a su hijo Húbert: "nuestras edades actuales son como 8 a 3; pero dentro de 18 años serán como 5 a 3". Hallar la suma de sus edades actuales.

Resolución

	ACTUAL	EN 22 AÑOS	
Adrián:	8	5	
	(–) 5	(–) 2	⇒
Húbert:	3	3	
	⇓×2	⇓×5	
	16	25	
	(–) 10	(–) 10	⇐
	6	15	
Suma:	22	9	

En vista que la diferencias de edades no son iguales, como debería ser, multiplicamos los números de las 2 columnas por 2 y 5 respectivamente.

Luego:el tiempo transcurrido como 9 es 18 años (9×2), entonces la suma de edades como 22 es 22× 2 = 44 años.

Rpta: 44

Problema 13

En una reunión se encuentran presentes tantos hombres como tres veces el número de mujeres; entonces se retiraron 30 parejas, quedando el número de hombres 5 veces el nuevo número de mujeres. ¿Cuántos hombres habían primitivamente?

Resolución

– Cuando se retiran en parejas, la diferencia entre el número de hombres y mujeres en la reunión no se altera.

– Disponiendo los datos, tenemos:

	INICIAL	TRAS RETIRO DE 30 PAREJAS	
Hombres:	6	5	
	(–) 4	(–) 4	⇒
Mujeres:	2	1	
		1	

$1 <> 1\times30$
$\Rightarrow 6 <> 6\times30$
$= 180$

∴ Habían 180 hombres inicialmente.

Rpta: 180

Problema 14

Una persona tiene 200 000 soles y otra 75 000 soles. Cada una de ellas ahorra anualmente 4 000 soles. ¿Dentro de cuántos años, la fortuna de la primera será el doble de la segunda?

Resolución

– La diferencia entre las dos fortunas permanecerá invariable ya que ambos ahorran igual suma:

	FORT. INICIAL		FORT. FINAL	
1ra:	200 000		2	
		125 000		1 ⇒
2da:	75 000		1	
			1	

Diferencia:
1 <> 125 000
Fort. final de 1ra.
2 <> 250 000

En el tiempo pedido la primera ha ahorrado:

$$250\,000 - 200\,000 = 50\,000 \text{ soles}$$

como en cada año ahorró 4 000 soles, tardó:
50 000 4 000 = 12,5 años ó 12 años 6 meses.

Rpta: 12,5 años

Problema 15

Dos personas juegan al ajedrez a 7 soles la partida. El uno tiene 130 soles y el otro 110 soles. Después de un cierto número de partidas, la primera que las ha ganado todas posee 5 veces lo de la segunda. ¿Cuántas partidas han jugado?

Resolución

El total de los haberes es **130 + 110 = 240**, esta cantidad no varía.

	AL INICIO	AL FINAL
1ra:	130	5
2da:	110	1
suma:	240	6

$\Rightarrow$

La suma como 6 equivale a 240, (6×40), entonces el haber final de la segunda como 1 es 40.

Luego: la segunda ha perdido **110 – 40 = 70** soles. Puesto, que en cada partida pierde 7 soles, han jugado entonces **70 ÷ 7 = 10** partidas.

Rpta: 10

Problema 16

Cuatro marineros A, B, C y D juegan billar en partidas muy reñidas: A da a B 60 carambolas a 100; B a C 10 a 30 y C a D, 20 a 50. Cuando juegan A y D un partido de 100 carambolas. ¿Cuántas debe dar el primero al último?

Resolución

La expresión "A da a B 60 carambolas a 100" significa, que cuando A hace 100 carambolas B hace 100 – 60 = 40; de modo que sus eficiencias son como 100 a 40 ó 5 a 2.

A: 100 5 B: 30 [3] C: 50 (5)

B: 100 – 60 [2] C: 30 – 10 (2) D: 50 – 20 3

↑×15 ↑×10 ↑×4

Si A hace 75 Si B hace 30 Si C hace 20
⇒ B hace 30 ⇒ C hace 20 ⇒ D hace 12

Luego:

A: 75 $\Rightarrow$ 25

D: 12 4 (÷3)

$\Rightarrow$ *Cuando A haga 100 (4×25), entonces D hará **4×4 = 16** carambolas.*

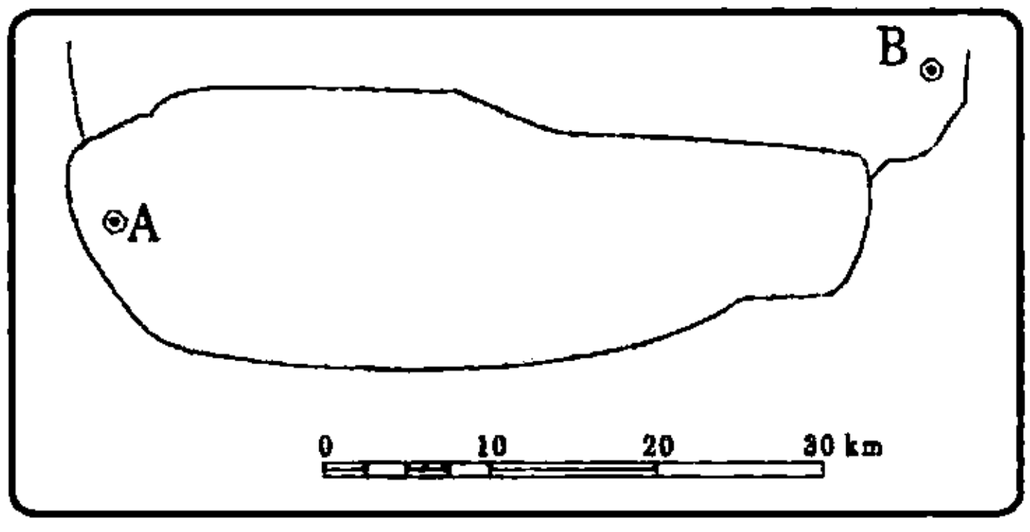
A le dará a D, 100 – 16 = 84 carambolas a 100

Rpta: 84

Problema 17

En el siguiente gráfico, determinar la distancia A B, teniendo en cuenta la escala gráfica.

Resolución



Según la escala gráfica, 1 cm en el dibujo representa 10 km en el terreno. Luego, como la distancia A B mide 5 cm en el dibujo, en el terreno debe medir:

$$1\ cm \rightarrow 10\ km$$

$$5\ cm \rightarrow x \Rightarrow \quad x = 5 \times 10 = 50\ km$$

Rpta.: 50 km

Problema 18

Un ingeniero puede construir 600 metros de carretera con 40 obreros en 50 días, trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos días tardaría este ingeniero en construir 800 metros de carretera, con 50 obreros doblemente eficientes que los anteriores,

en un terreno de triple dificultad, trabajando 2 horas más por día?.

Resolución

Obras	#Obreros	#Días	Horas/días	Efic.	Dific.
600	40	50	8	1	1
800	50	x	10	2	3
(D)	(I)		(I)	(I)	(D)

$$x = 50 \times \frac{800}{600} \times \frac{40}{50} \times \frac{8}{10} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = 64$$

Rpta.: 64 días

Problema 19

Se contrataron 24 obreros para construir un túnel y faltando 15 días para terminarlo, 4 de los obreros sufrieron un accidente y se retiraron de la obra. ¿Cuántos días tardaron los obreros restantes en culminar lo que falta de la obra?

Resolución

Lo que debían hacer 24 obreros en 15 días

harán: 20 obreros en "x" días

(I)

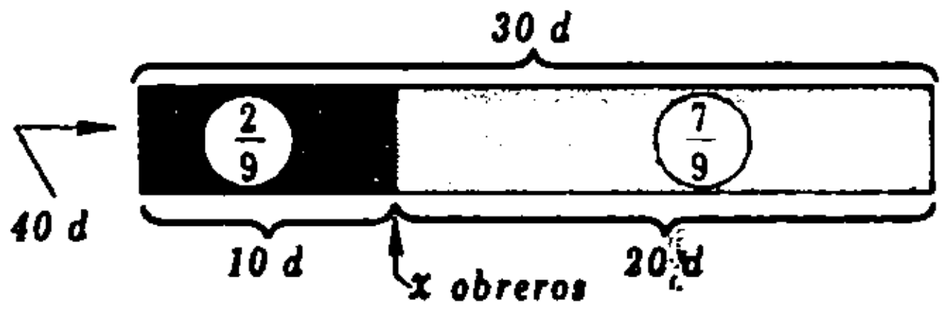
Entonces: $x = \dfrac{24 \times 15}{20} = 18$

Rpta.: 18 días

Problema 20

Cuarenta obreros se comprometieron entregar una obra en 30 días trabajando 8 horas diarias. Pero en 10 días habían hecho solamente 2/9 de la obra; entonces, con la finalidad de entregar la obra en el plazo estipulado, tuvieron que contratar más obreros y aumentar en 2 las horas de trabajo diario. ¿Cuántos obreros tuvieron que contratar?

Resolución



# Obreros	# Días	H/D	Obra
40	10	8	2/9
(40 + x)	20	10	7/9
	(I)	(I)	(D)

Entonces:

$$(40 + x) = 40 \times \frac{10}{20} \times \frac{8}{10} \times \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 16$$

Rpta.: 16

Problema 21

En una sastrería se ha determinado que 4 sastres pueden confeccionar 20 pantalones en 10 días, trabajando 5 horas diarias. Y 10 sastres pueden confeccionar 24 sacos en 5 días trabajando 6 horas diarias. La sastrería cuenta con 15 sastres que trabajan 10 horas diarias y se ha comprometido confeccionar 60 ternos; desea averiguar, a los cuántos días pueden entregar el trabajo, si primero confeccionan los pantalones, luego los sacos.

Resolución

Cálculo del tiempo que tardarán en confeccionar los 60 pantalones, (considerando que un terno consta de un pantalón y un saco)

# Pantalones	# Sastres	# Días	H/D
20	4	10	5
60	15	x	10
(D)	(I)		(I)

$$x = 10 \times \frac{60}{20} \times \frac{4}{15} \times \frac{5}{10} \quad \Rightarrow \quad x = 4 \text{ días}$$

Cálculo del tiempo que tardarán en confeccionar los 60 sacos:

# Sacos	# Sastres	# Días	H/D
24	10	5	6
60	15	y	10
(D)	(I)		(I)

$$y = 5 \times \frac{60}{24} \times \frac{10}{15} \times \frac{6}{10} \quad \Rightarrow \quad x = 5 \text{ días}$$

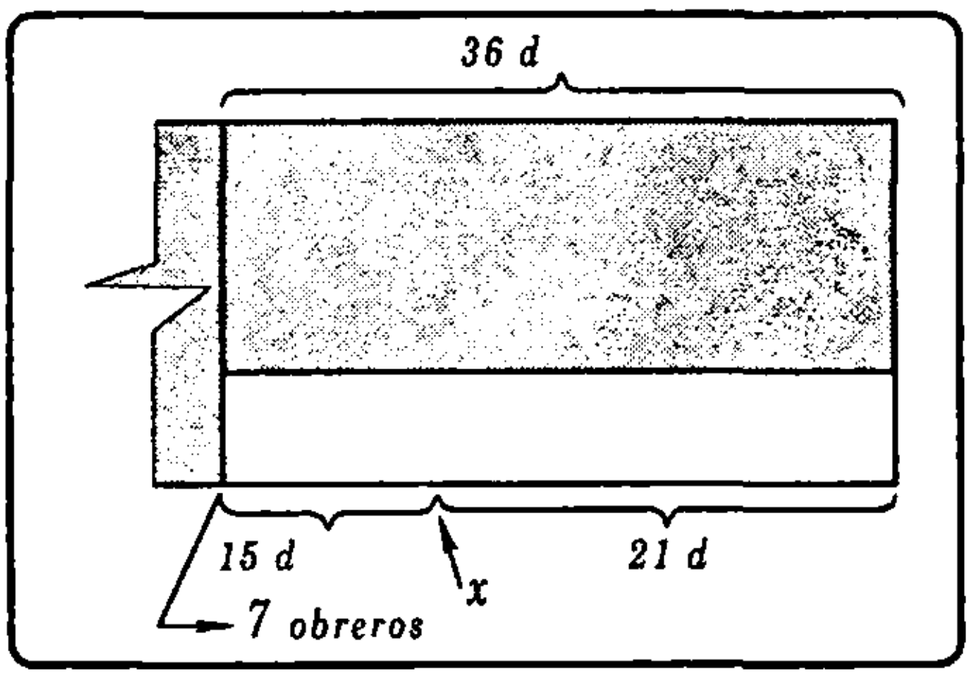
Tardarán **4 + 5 = 9** días, en confeccionar los 60 ternos.

Rpta: 9 días

Problema 22

Un grupo de obreros debía construir un edificio, pero faltando 36 días para terminarlo 7 de los obreros se accidentaron y no pudieron ser reemplazados hasta dentro de 15 días. ¿Cuántos obreros se tuvieron que contratar al cabo de este tiempo, para que terminen la obra en el tiempo fijado?

Resolución



Lo que debían hacer 7 obreros en 36 días harán "x" obreros en 21 días
(I)

Entonces: $x = \frac{7 \times 36}{21} = 12$ *obreros*

Rpta.: 12

Problema 23

Un recipiente contiene 30 litros de vino mezclado con 10 litros de agua. La mezcla cuesta 1 200. ¿Cuánto de agua se debe adicionar, para que el precio por litro de mezcla disminuya en 6 soles?

Resolución

Los **30 + 10 = 40** litros cuestan 1200 soles, entonces cada litro cuesta **1200 ÷ 40 = 30** soles. Al disminuir en 6 soles costaría cada litro **30 – 6 = 24 soles.**

El costo total de la mezcla no varía al agregarle agua. Luego:

1 litro cuesta 24
(40 + x) litros cuesta 1 200

$$\Rightarrow \quad 40 + x = \frac{1200 \times 1}{24} \quad \Rightarrow \quad x = 10$$

Rpta.: 10 l

Problema 24

Una familia de 6 miembros tiene víveres para 24 días, pero como recibieron la visita de un tío y su esposa, los víveres se terminaron 5 días antes. ¿Cuántos días duró la visita de los esposos?

Resolución

Lo que debieron consumir 6 personas en 5 días

Consumieron 2 personas en "x" días
(I)

$$x = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

Rpta.: 15 días

Problema 25

Una vendedora debía vender 240 naranjas de primera calidad a 3 por S/. 2 y 240 de segunda calidad a 5 por S/. 2. Pero decidió vender todas sus naranjas a 8 por S/. 4. ¿Cuánto ganó o perdió?

Resolución

I. Vendiendo como debía:

a) Por cada **3** de 1ra debió obtener **S/. 2**

Por las **240** de 1ra debió obtener x = **S/. 160**

b) Por cada **5** de 2da. debió obtener **S/. 2**

Por las **240** de 2da debió obtener y = **S/. 96**

Por todas debió obtener:

160 + 96 = S/. 256

II. Al venderlas todas a 8 por S/. 4:

- Por cada 8 naranja obtuvo **S/. 4**
- Por las 480 naranjas obtuvo z = **S/. 240**

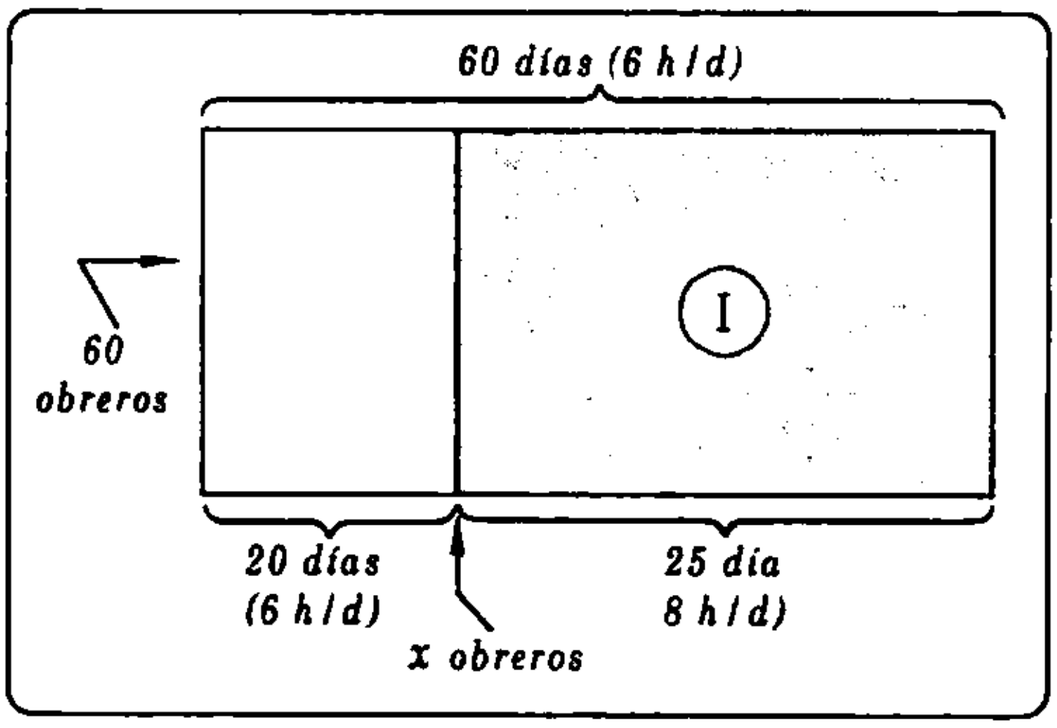
Luego: perdió **256 – 240 = S/. 16**

Rpta: S/. 16

Problema 26

Para una obra de 60 días de duración fueron contratados 50 obreros, los cuales terminarían dicha obra trabajando 6 horas diarias. Luego de trabajar 20 días se decidió terminar la obra 15 días antes, por lo que fue necesario aumentar más obreros y trabajar 2 horas más por día. ¿Cuántos obreros se tuvo que aumentar para terminar la obra en el plazo pedido?.

Resolución



Debieron hacer 50 obreros en 40 días trabajando 6 horas diarias, pero lo hicieron (50 + x) obreros en 25 días trabajando 8 horas diarias.

Entonces: $50 + x = 50 \times \frac{40}{25} \times \frac{6}{8} \rightarrow \quad x = 10$

Rpta.: 10

Problema 27

Un grupo de "a" obreros pueden culminar en "a" días, "a" metros de obra trabajando "a" horas diarias. ¿Cuántas horas diarias deben trabajar doble número de obreros doblemente eficientes que los anteriores para acabar el doble de la obra, en doble del tiempo anterior, en un terreno de doble dificultad?

Resolución

#Obreros	#Días	Horas/día	Obras	Efic.	Dific.
a	a	a	a	1	1
2a	2a	x	2a	2	2
(I)	(I)		(D)	(I)	(D)

Entonces:

$$x = a \times \frac{a}{2a} \times \frac{a}{2a} \times \frac{2a}{a} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{2}$$

Rpta.: a/2

Problemas Propuestos

1. ***Los ángulos interiores de un triángulo están en la proporción de 3; 7 y 10. El triángulo en cuestión es:***

   A) Obtusángulo **B)** Acutángulo
   C) Rectángulo **D)** Equilátero
   E) Isósceles.

2. ***Tres números se encuentran en la razón 5 : 9 : 13; el segundo número es igual a la media del primero y el tercero. Si se pide encontrar a los números sucede que:***

   A) Sólo hay una solución
   B) El problema podría tener una solución
   C) Se tienen muchas soluciones
   D) No se encuentran números que satisfagan las condiciones del problema
   E) El problema está mal formulado

3. ***En un recipiente de 30 litros y otro de 74 litros. ¿Cuántos litros deben ser transferidos del segundo recipiente al primero de manera que los contenidos se encuentren en la razón de 3 : 5 (SM '75)***

   A) 6 litros **B)** 7 litros
   C) 9 litros **D)** 12 litros
   E) ninguna de las anteriores

4. ***Tenemos dos recipientes de cobre de igual forma con las paredes de idéntico espesor. La capacidad del primero es 8 veces mayor que la del segundo. ¿Cuántas veces es más pesado el primero?***

   A) 4 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 12 **E)** 16

5. ***Actualmente la población de Chimbote con la de Huancayo está en la relación de 50 a 31. Se ha proyectado que en el año 2002, entre ambas ciudades tendrán 648 000 habitantes. Suponiendo la misma tasa de crecimiento en ambas ciudades, determinar la población de Huancayo en el año 2002.***

   A) 320 000 **B)** 420 000 **C)** 360 000
   D) 400 000 **E)** 248 000

6. ***Un comerciante de Cañete comenta que por cada 2 l de pisco vende 7 l de vino y 8 l de cachina. En la última semana ha vendido 816 l entre pisco, vino y cachina. ¿Cuántos litros de vino ha vendido en la referida semana?***

   A) 332 l **B)** 336 l **C)** 348 l
   D) 384 l **E)** 363 l

7. ***Nino es 4 años más joven que Lalo. Pero dentro de 5 años, Lalo tendrá 2 veces la edad que tiene Nino ahora. ¿Qué edad tendrá Nino dentro de 8 años?***

   A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

8. ***Juan nació "X" años antes que Luis. Hace "n" años sus edades eran como 3 es a 2 y dentro de "2n" años serán como 5 a 4. ¿Cuál es la relación actual entre sus edades?***

   A) $\frac{7}{4}$ **B)** $\frac{11}{8}$ **C)** $\frac{12}{5}$ **D)** $\frac{13}{6}$ **E)** $\frac{14}{5}$

9. ***Actualmente las edades de Ana y Rosa están en la relación de 4 es a 3. Cuando Rosa tenga la edad de Ana, ésta tendrá la edad que tendrá Rosa dentro de 10 años. ¿Cuál es la diferencia de edades de Ana y Rosa?***

   A) 15 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 8 **E)** 5

10. Tres fábricas A, B, y C fueron intervenidas por la SUNAT. Los impuestos de A y B eran entre sí como 7 es a 4, y los de B y C, como 5 es a 3. La fábrica C canceló el importe total de los impuestos que adeudaba con 300 soles, mientras que A pagó de lo suyo 700 soles a cuenta. ¿Cuánto le falta pagar?

A) 150 soles **B)** 180 soles
C) 200 soles **D)** 175 soles
E) 215 soles

11. De un grupo de niños y niñas se retiran 15 niñas quedando dos niños por cada niña. Después se retiran 45 niños y quedan entonces 5 niñas por cada niño. ¿Cuál es el número inicial de niñas?

A) 36 **B)** 38 **C)** 40 **D)** 45 **E)** 54

12. Una persona tiene 6 400 soles y la otra 1 400 soles. Cada una de ellas ahorra mensualmente 3 00 soles. ¿Dentro de cuántos meses, la fortuna de la primera será el doble de la segunda?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12
D) 13 **E)** 13

13. Daniel le dice a su hijo Aldo: "nuestras edades actuales son entre sí como 12 a 5, pero dentro de 24 años serán como 20 a 13". Hallar la suma de las edades actuales

A) 32 años B) 51 años **C)** 36 años
D) 38 años **E)** 40 años

14. Una naranja de 6 cm de diámetro se ofrece a S/. 0,30, mientras que otra de la misma calidad y de 8 cm de diámetro se ofrece a S/. 0,40. ¿Cuál de ellas es más barata, la primera o la segunda?

A) Ambas son del mismo precio
B) La primera **C)** La segunda
D) No se puede saber
E) N.A.

15. Las velocidades de J, M y T están en la relación de 8,10 y 6 respectivamente en m/s. Participan en una carrera, donde M les da una ventaja de 40 y 24 m a T y J respectivamente. Si la carrera fue ganada por "M" cuando J aventajaba en 14 m a T. ¿En cuánto aventajó M a J cuando ganó?

A) 14 **B)** 10 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 12

16. A y B corren una carrera de una milla. En un primer intento A da a B una ventaja de partida de 11 yardas y vence por 57 segundos; en un segundo intento A da a B una ventaja de partida de 81 segundos y es vencido por 88 yardas. ¿En qué tiempo recorrió cada uno una milla? (1 milla = 1760 yardas)

A) A = 7 ; B = 8 **B)** A = 8 ; B = 7
C) A = 6 ; B = 9 D) **A** = 8 ; B = 6
E) A = 9 ; B = 7

17. Al repartir 774 soles proporcionalmente a 8; 7 y 3; la parte proporcional a 7 es:

A) 70 **B)** 140 **C)** 210 **D)** 280 **E)** 301

18. Tres negociantes se reparten una suma proporcionalmente a los números 9; 7 y 2. Si quisiéramos que los tres reciban la misma suma, tendríamos que pedirle al primero que devuelva 48 soles para darle al segundo y éste, que le entregue al tercero una cantidad que se pide calcular.

A) 64 soles **B)** 72 soles **C)** 60 soles
D) 32 soles **E)** 48 soles

19. Dos pastores tienen 4 y 3 panes cada uno. En el camino se encuentran con un cazador con el que comparten sus panes en partes iguales y el cazador

por su parte les da 7 soles para que los dos pastores se repartan en forma justa ¿Cuántos soles le corresponde a cada pastor?

A) 4 y 3 **B)** 6 y 1 **C)** 5 y 2
D) 3 y 4 **E)** 7 y 0

20 Tres empresarios, tras haberse repartido las utilidades de un negocio proporcionalmente a sus capitales invertidos que son como 15; 21 y 24 respectivamente decidieron que el reparto fuera en partes iguales, por lo que el tercero tuvo que dar al segundo 240 000 y el segundo entrega al primero una cantidad que se pide calcular.

A) 250 000 **B)** 300 000 **C)** 350 000
D) 360 000 **E)** 320 000

21. Un hombre decide repartir una herencia, en forma proporcional al orden en que nacieron sus hijos. La herencia total es S/. 480 000; adicionalmente deja S/. 160 000 para el mayor, de tal modo que al primero y último hijo reciban igual herencia. ¿Cuál es el mayor número de hijos que tiene este personaje? (UNI '81)

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

22. En un colegio se han repartido 3243 panes entre todos los niños. Cada niña recibió 2 panes y cada niño, 3 panes. Se sabe que la población estudiantil del citado colegio consta de 5 varones por cada 4 mujeres, ¿Cuál es dicha población?

A) 1269 **B)** 1348 **C)** 1296
D) 269 **E)** 3140

23. Se reparte una cantidad entre 3 personas, en partes proporcionales a 14, 22 y 24. La tercera persona le paga a la segunda los 2800 soles que le debía y ésta a su vez cancela su deuda con la primera. Calcular a cuánto ascendía dicha deuda, si todos han quedado con partes iguales.

A) 8400 **B)** 4200 **C)** 5900
D) 6800 **E)** 7200

24. Se ha repartido una gratificación de 720 soles entre tres obreros, A, B y C en partes proporcionales a sus jornales. El jornal de B es 22,5 soles y el de C de 13,5 soles. A este último le ha correspondido una parte igual al jornal de A. Calcular lo que ha correspondido a cada obrero y dar como respuesta el jornal de A.

A) 160 **B)** 170 **C)** 180
D) 200 **E)** 210

25. El precio de los diamantes varía proporcionalmente al cuadrado de su peso. Si un diámante que se compró en S/. 36 000 se rompe en dos pedazos de los cuales uno es los 2/3 del otro. La pérdida sufrida al romperse el diamante es:

A) 0 **B)** 1000 **C)** 6000
D) 18720 **E)** 17280

26. En un plano a escala de 1:100 se mide una distancia y se obtiene 8 cm. Entonces la distancia es de:

A) 800 m **B)** 80 m **C)** 8 m
D) 80 cm **E)** 8000 m

27. Un terreno cuadrado de una hectárea se ha representado en un plano mediante un cuadrado de 2 cm de lado. ¿Cuál es la escala?

(1 ha = 10 000 m²)

A) 1:1000 **B)** 1:2000 **C)** 1:400
D) 1:5000 **E)** 1: 10000

28. En un mapa cada media pulgada representa 10 km. ¿Cuántos kilómetros cuadrados están representados

en 10 pulgadas cuadradas? (SM '77)

A) 40 **B)** 400 **C)** 1100
D) 1000 **E)** 4000

29. Un grifo que vierte agua a razón de 60 l/min ha llenado en 35 minutos la octava parte de la capacidad de un tanque. ¿Cuánto tardará en llenar lo que falta?

A) 80 min **B)** 5 h 40 min
C) 3 h 50 min
D) 4 h 5 min **E)** 3,30 h

30. Al comprar 38 camisas pagué con 3000 soles, pero esta suma no cubría el costo, por lo que tuve que devolver una camisa y el vendedor me devolvió tanto como me faltaba para cubrir el valor de las 38 camisas. Hallar el precio de cada camisa.

A) S/. 40 **B)** S/. 60 **C)** S/. 80
D) S/. 90 **E)** S/. 72

31. Un peatón parte de A al encuentro de otro, que sale simultáneamente de B distante 80 km de A. Se cruzan en M. Después de cruzarse, el primero tarda 4 horas en llegar a B y el segundo tarda 9 horas en llegar a A. ¿A qué distancia de A se produjo el encuentro?

A) 24 km **B)** 32 km **C)** 48 km
D) 40 km **E)** 36 km

32. Una tripulación de 70 marinos tiene víveres para un viaje de 50 días. Si durante el viaje rescataron 50 náufragos sin víveres y para que alcancen los víveres para todo el viaje disminuyeron la ración diaria en 1/3. ¿A los cuántos días de viaje rescataron a los náufragos, si aún así faltaron víveres para 5 días?

A) 6 días **B)** 8 días **C)** 10 días
D) 12 días **E)** 15 días

33. Se han utilizado 30 personas para llenar de agua un reservorio, utilizando 36 baldes de 5 litros de capacidad cada uno, durante 3 horas. ¿Cuántas personas se necesitarán para llenar un reservorio de doble capacidad que el anterior, utilizando 30 baldes de 6 litros de capacidad durante 5 horas?

A) 25 **B)** 24 **C)** 20
D) 30 **E)** 36

34. Compré cierta cantidad de cucharas a S/. 25 la docena y además de los que compré recibí 5 cucharas por cada 3 docenas. Si hubiera pagado por todas las cucharas que me entregaron, habría gastado S/. 1025 ¿Cuánto pagué?

A) S/. 750 **B)** S/. 850 **C)** S/. 840
D) S/. 900 **E)** S/. 1000

35. Si una cuadrilla de 20 hombres pueden hacer un trabajo en 15 días y otra formada por 10 hombres, el mismo trabajo en 30 días. ¿Cuántos hombres más se necesitarán para realizar el trabajo en las 3/5 partes del tiempo empleado por los 30 hombres?

A) 30 **B)** 15 **C)** 10 **D)** 20 **E)** 25

36. Un hombre gana "d" soles por semana y gasta "s" soles a la semana. ¿En cuántas semanas tendrá "q" soles?

A) d – s **B)** d – q **C)** q/d – s
D) d – s/q **E)** d – q/s

37. Un boxeador asesta 3 golpes por segundo. ¿Cuántos golpes dará en 1 minuto, golpeando al mismo ritmo?

A) 180 **B)** 179 **C)** 181 **D)** 120 **E)** 121

38. Se contrataron 36 obreros para construir un puente. Faltando 15 días para terminar la obra, 6 de los obre-

ros se accidentaron, retirándose de inmediato de la obra. ¿Cuánto demorarán los obreros restantes en acabar la obra faltante?

A) 12 días **B)** 16 días **C)** 17 días
D) 18 días **E)** 20 días

39. Si compro m manzanas más de las que pienso comprar, gastaré "a" soles; en cambio, si compro m manzanas menos de las que quiero comprar, gastaré "b" soles. ¿Cuántas manzanas pienso comprar?

A) $\frac{m(a+b)}{ab}$ **B)** $\frac{(a+b)m}{a-b}$ **C)** $\frac{mab}{a+b}$

D) $\frac{mab}{a-b}$ **E)** $\frac{a+b}{m}$

40. Dos niños comen 2 naranjas en 2 días. ¿Cuántos días tardarán 5 niños en comer 5 naranjas?

A) 2 **B)** 2,5 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 10

41. Cierta cantidad de animales comen pasto en 30 días, se agrega cuatro animales y comen la misma cantidad de pasto en 20 días. ¿En qué tiempo sumándose dos animales a la cantidad inicial comen la misma cantidad de pasto?

A) 18 **B)** 21 **C)** 24 **D)** 27 **E)** 10

42. Se contrató a 35 hombres para que realicen una obra en 27 días. Al cabo de 6 días de trabajo se les solicitó que terminen la obra 6 días antes de lo convenido. ¿Cuántos obreros adicionales se tuvo que contratar?

A) 35 **B)** 14 **C)** 39 **D)** 48 **E)** 13

43. En 12 días, 8 obreros han hecho 2/3 de la obra. Si se retiran 6 obreros, ¿cuántos días demorarán los restantes en terminar la obra?

A) 28 **B)** 20 **C)** 36 **D)** 24 **E)** 72

44. Una bolichera a la deriva disponía de agua para 13 días, lo que proporcionaba un litro por día a cada hombre de la tripulación. Después de 5 días se vertió un poco de agua y al mismo tiempo murió un tripulante. El agua duró entonces justamente el tiempo que se esperaba. ¿Qué cantidad se vertió?

A) 4 l **B)** 8 l **C)** 12 l
D) 65 l **E)** No se puede determisnar

45. A través de un grifo se ha llenado un tanque cúbico de 2 metros de arista interior. Si el tanque tuviera 1 metro más de arista, dicho grifo se demoraría 1 h 35 min más en llenarlo. ¿Cuál es el caudal del grifo en litros por minuto?

A) 200 **B)** 400 **C)** 800
D) 100 **E)** N.A.

46. En una fábrica se ha establecido que el sueldo de un obrero sea proporcional al cuadrado de su edad. Si un obrero que actualmente tiene 20 años ha proyectado ganar S/. 1 200 dentro de 5 años. ¿Cuánto gana actualmente?

A) 320 **B)** 480 **C)** 560
D) 720 **E)** 768

47. Un grupo de obreros había hecho en 20 días la mitad de una obra. En ese momento se aumentan 12 obreros más y se termina la obra 5 días antes de lo previsto. El grupo de obreros estaba constituido por:

A) 20 obreros **B)** 24 obreros
C) 30 obreros **D)** 36 obreros
E) 48 obreros

48. El microbús de la línea 12 recorre en 1 hora toda la Av. Brasil, mientras

que él de la línea 11 lo hace en 35 minutos. Si el microbús más lento parte 15 minutos antes, el otro alcanzará en ... minutos.

A) 21 **B)** 22 **C)** 20 **D)** 19 **E)** 19

49. Un laboratorio de productos químicos tiene una máquina que embaza 78 pomos en 24 minutos. Desea comprar una máquina, de tal manera que funcionando ambas embacen 264 pomos en 36 minutos. ¿Cuántos pomos por hora debe embazar la nueva máquina que desea comprar?

A) 180 **B)** 190 **C)** 220
D) 240 **E)** 245

50. Patricia hizo un pedido de 30 pares de medias negras y 20 pares de medias blancas. Tres pares de medias blancas cuestan tanto como 2 pares de negras. Pero en lugar de blancas le habían despachado negras y en lugar de éstas blancas; con lo que Patricia quedó perjudicada en S/. 600 ¿Cuál es el precio de un par de medias blancas?

A) S/. 140 **B)** S/. 130 **C)** S/. 120
D) S/. 150 **E)** S/. 160

51. A un tanque que contiene 480 litros de agua, entró agua salada que contiene 5 g de sal por litro a una velocidad de 8 l/min, durante 40 minutos. ¿Cuántos litros de esta mezcla se debe extraer para obtener 540 g de sal?

A) 200 **B)** 250 **C)** 260
D) 270 **E)** 280

52 Faltando 63 días para terminar la construcción de un edificio, los obreros que venían trabajando 6 horas diarias, entraron en huelga durante algunos días. Al incorporarse después de la huelga, tuvieron que trabajar 3 horas más por día, para recuperar los días de trabajo perdidos durante la huelga. ¿Cuántos días duró la huelga?

A) 14 días **B)** 15 días **C)** 18 días
D) 21 días **E)** 24 días

53. Un grupo de estudiantes tiene víveres para un viaje de 48 días. Si se retiran el 25% de los estudiantes; ¿para cuántos días más alcanzarán los víveres?

A) 120 **B)** 24 **C)** 16 **D)** 15 **E)** 64

54. Hace 2 meses compraba naranja y media con un sol, ahora compró una naranja con sol y medio. ¿En qué fracción aumentó el precio de una naranja?

A) $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{5}{4}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{4}{3}$ **E)** $\frac{5}{6}$

55. Juan y Pepe pintaron un edificio cada uno en 20 días. Pero si Juan hubiera pintado el edificio que pintó Pepe se habría demorado 25 días. ¿Cuántos días tardaría Pepe en pintar el edificio pintado por Juan?

A) 15 días **B)** 16 días **C)** 18 días
D) 20 días **E)** 25 días

56. En el cerco de don Jacinto, 35 toros terminan todo el pasto en 18 días. Ahora que ha puesto 21 toros en el mismo cerco, ¿cuántos días tardarán en comer todo el pasto? (No se considera el crecimiento del pasto)

A) 10 **B)** 10.8 **C)** 20 **D)** 25 **E)** 30

57. Si voy a "a" km/h llego a mi casa a las 8 p.m.; en cambio si voy a "b" km/h, llego a las 6 p.m. ¿A qué velocidad debo ir para llegar a las 7 p.m.?

A) $\frac{a+b}{2}$ **B)** $\frac{ab}{2}$ **C)** ab

D) $\frac{2ab}{a+b}$ **E)** $\frac{ab}{a+b}$

58. Una rueda de 3 dientes está en contacto con una de 9 dientes. ¿Cuántas vueltas sobre su eje dará la rueda más pequeña para dar una vuelta entera alrededor de la rueda mayor que se mantiene fija?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

59. Un edificio de 60 metros de altura proyecta una sombra de 100 metros; en el mismo momento un hombre de 1.80 m proyecta una sombra de:

A) 2 metros **B)** 3 metros
C) 4 metros **D)** 35 metros
E) N.A.

60. Un obrero se comprometió enlosar en 4 días, una pared cuadrada de 4 metros de lado; pero tardó 5 días más porque la pared tenían "x" metros más de lado. Hallar "x".

A) 1 metro **B)** 2 metros
C) 3 metros **D)** 4 metros
E) 5 metros

61. Un granjero tiene 120 gallinas con alimentos para 60 días. Después de 20 días sufre un robo de 40 gallinas; para sustituirlas mas bien decide comprar 32 patos. ¿A los cuántos días después de la pérdida debe comprar los patos para que los alimentos duren el tiempo previsto sabiendo que los patos consumen el mismo alimento pero doble de una gallina?

A) 20 **B)** 24 **C)** 36 **D)** 15 **E)** N.A.

62. Un campesino siembra un terreno cuadrado de 16 metros de lado en 16 horas. ¿Qué tiempo empleará en sembrar otro terreno cuadrado de 4 metros más de lado que el anterior?

A) 20 días **B)** 25 días **C)** 30 días
D) 18 días **E)** 48 días

63. ¿Cuál es la longitud de una pieza de paño que ha costado S/. 877,5 sabiendo que al vender 25 m en S/. 437,50, se ha ganado S/. 2,5 por metro?.

A) 50.00 metros **B)** 48.20 metros
C) 55.80 metros **D)** 58.50 metros
E) 57.60 metros

64. Cada vez que Lucho gana S/. 21,5 su padre le da cierta suma; ¿cuál es esta suma sabiendo que cuando lo abonado por el padre es de S/. 161,5, Lucho tiene S/. 570

A) S/. 8,0 **B)** S/. 8,5 **C)** S/. 10,20
D) S/. 12,5 **E)** N.A.

65. Dos obreros pueden realizar un trabajo en 15 días, si uno de ellos se demora 16 días más que el otro, trabajando solo, ¿en qué tiempo haría la obra trabajando solo el otro?

A) 40 días **B)** 36 días **C)** 24 días
D) 18 días **E)** 16 días

66. Una azucarera esférica llena de azúcar pesa 600 gramos. Si el contenido de azúcar pesa 500 g más que la azucarera; ¿cuántos pesaría la azucarera llena de azúcar, si tuviera el doble de radio?

A) 4,4 kg **B)** 4,45 kg **C)** 4,6 kg
D) 1.2 kg **E)** N.A.

67. Se tiene 2 barriles de vino de calidades diferentes, uno con 40 litros y otro con "n" litros. Si se extrae 24 litros de cada uno de los barriles y se hecha lo que se extrajo de uno de ellos en el otro y viceversa, se observa que ambos barriles han quedado con vinos de la misma calidad. Hallar "n".

A) 50 **B)** 62 **C)** 72 **D)** 54 **E)** 60

68. ***En una guarnición compuesta por dos compañías A y B, hay víveres para 30 días. Doce días después, la compañía B sale de la guarnición y resulta que las provisiones restantes alcanzan para el rancho de la compañía A, por 27 días. ¿Para cuántos días habrían alcanzado los víveres solamente para la compañía B?***

A) 45 **B)** 60 **C)** 90 **D)** 75 **E)** 70

69. ***Un grupo de 21 obreros trabajando 8 horas diarias pueden tender en 8 semanas una carretera de 40 km de longitud. ¿Cuántos obreros trabajando 6 horas por día podrán tender una carretera de 75 km en 5 semanas, sabiendo que los primeros trabajan con una eficiencia de 3/4 en relación a la de los segundos.***

A) 10 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 63 **E)** 45

70. ***Una obra puede ser hecha por 36 obreros en 27 días, trabajando 6 horas diarias. Al cabo de 8 días de trabajo se accidentan 9 obreros, continuando la obra el resto. Pasado 4 días, como se tiene que entregar la obra terminada 3 días antes de lo pactado, se comienza a trabajar 8 horas diarias y se contratan nuevos obreros. ¿Cuántos obreros se contratan?***

A) 7 **B)** 18 **C)** 8 **D)** 3 **E)** 10

71. ***Un terreno rectangular de 280 metros por 200 metros de extensión debe ser cercado en su totalidad con un muro de 2 metros de altura. Juan se encargó de la construcción del muro y Jorge del tarrajeo. Cuando Jorge empezó a trabajar, Juan ya había laborado 72 días, lo cual calculó Jorge que lo podía tarrajear en 45 días; sin embargo, como Juan continuaba trabajando, ambos terminaron la obra simultáneamente. ¿Cuántos metros de muro le faltaba a Juan, cuando Jorge empezó a trabajar?***

A) 360 metros **B)** 400 metros
C) 540 metros **D)** 600 metros
E) 720 metros

72. ***Un criador tiene un cierto número de vacas a las cuales alimenta cada día y a cada vaca con 10 kg de heno cuyo precio es de 26,50 por cada 100 kg, habiendo subido este su precio a S/. 45,00 por cada 100 kg, decide reducir la ración diaria a 8 kg y vende además 5 vacas, pero a pesar de ello gasta cada día S/. 1,00 más que antes. ¿Cuántas vacas tenía inicialmente el criador?***

A) 14 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 22

73. ***Para hacer una obra que demoraría 8 días, trabajando 6 horas diarias, se contrataron ciertos albañiles. Al cabo de 2 días comenzada la obra, se retiran 10 albañiles adicionándoles 3 horas más de trabajo diario al resto de los albañiles; de esta manera la obra queda retrasada en 6 días. Hallar el número de albañiles que habían al principio.***

A) 30 **B)** 15 **C)** 5 **D)** 20 **E)** 18

74. ***Un ejército de 2424 soldados tienen víveres para un mes. En una batalla murieron cierto número de soldados, de modo los víveres duran para 4 meses, dando a cada soldado media ración. ¿En cuánto disminuyeron los soldados?***

A) 1200 **B)** 1515 **C)** 1212
D) 1300 **E)** 1000

75. ***En 24 días, 15 obreros han hecho 1/4 de la obra que les fue encomendada. ¿Cuántos días emplearán otra cuadrilla de 30 obreros doblemente há-***

biles en terminar la obra?

A) 10 **B)** 15 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 13

76. Se contrataron 5 artesanos que hacen 12 chompas en 10 días. Se pretende tejer 60 chompas en 25 días. ¿Cuántos artesanos doblemente rápidos se deben contratar además de los ya contratados?.

A) 4 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 10

77. Un caballo amarrado con una cuerda de 12 metros de largo emplea 48 días para comer la hierba que está a su alcance. Si la cuerda tuviera 15 metros de longitud, ¿durante cuántos días más podría comer?

A) 10 **B)** 27 **C)** 30 **D)** 40 **E)** 32

78. Se tienen 2 barriles de vino de diferentes precios, el primero contiene 100 litros y el segundo 400 litros. De ambos barriles saco la misma cantidad de vino. Lo que saco del primero hecho al segundo y lo que saco del segundo lo hecho al primero, resultando en ambos vinos de la misma calidad. ¿Dígase cuántos litros de vino se ha pasado de uno a otro?

A) 40 **B)** 60 **C)** 80 **D)** 100 **E)** 120

79. Una guarnición de 400 soldados sitiados en un fuerte tienen víveres para 180 días, consumiendo 900 gramos por hombre y por día. Recibe un refuerzo de 100 soldados pero no recibirá víveres antes de 240 días, ¿cuál deberá ser la ración de un hombre por día para que los víveres alcancen?

A) 500 g **B)** 510 g **C)** 520 g
D) 530 g **E)** 540 g

80. Un grupo de 4 albañiles han trabajado en una obra, 6 días y 10 horas diarias; otro grupo de 3 albañiles ha trabajado en la misma obra 11 horas diarias. ¿Cuántos días emplearon sabiendo que el primer grupo percibió S/. 1 920 y el jornal total fue de S/. 3 240?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

81. Al cabo de 25 días de haber empezado una obra, 80 obreros trabajando 6 horas diarias se dan cuenta que lo que falta para terminar la obra es los 2/3 de lo que ya está hecho y que no se podría terminar en el plazo fijado. ¿Cuántos obreros habrá que contratar para que en los 10 días que faltan, aumentando 2 horas diarias de trabajo, se termine la obra a tiempo?

A) 12 **B)** 14 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 16

82. Se sabe que 15 albañiles pueden terminar una casa en 26 días trabajando 8 horas diarias. Luego de 10 días se despiden a 5 albañiles; pasados 6 días se contratan nuevos obreros. ¿Cuántos serán estos si se desea terminar la obra en el tiempo fijado.

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

83. Se desea llenar un recipiente de 82 litros con masas iguales de 2 líquidos de densidades 0,75 g/cc y 0,48 g/cc, ¿cuántos litros del primero se deben tomar?

A) 41 **B)** 12 **C)** 32 **D)** 25 **E)** 24

84. Seis obreros se comprometieron a hacer una obra en 6 días trabajando 6 horas diarias. Si después de 2 días de trabajo se retiran 2 obreros, ¿en qué porcentaje debe aumentar la eficiencia de cada uno de los obreros restantes para que puedan entregar la obra en el plazo fijado?

A) 40% **B)** 50% **C)** 20 %

D) 60% E) 25%

85. Un ganadero tiene 420 ovejas que puede alimentar por 80 días. Después de "x" días vende 70 ovejas y los alimentos duran 12 días más de lo previsto. Hallar "x"

A) 18 B) 28 C) 20
D) Absurdo E) 22

86. Para efectuar un cierto trabajo un equipo de "q" obreros emplean "n" días, mientras que otro grupo de "p" obreros emplean "m" días. ¿Cuántos días emplearán para efectuar el mismo trabajo un equipo mixto formado por "a" obreros del primer equipo y "b" obreros del segundo?

A) $\frac{apm+bpn}{9\ pmn}$ B) $\frac{qpmn}{pam+qbn}$

C) $\frac{a}{qn}+\frac{b}{pm}$ D) $\frac{n}{m}\left(\frac{a+b}{pq}\right)$

E) $\frac{m}{n}\left(\frac{pq}{a+b}\right)$

87. En la costa 200 obreros pueden hacer 150 km de carretera en 40 días, trabajando 9 horas diarias, en una zona cuya dificultad se puede representar por 1. ¿Cuántos días demorarán 200 obreros con una eficiencia un 50% mayor que las anteriores en hacer 350 km de carretera en la selva, cuya dificultad se puede representar por 3, trabajando 6 horas diarias?.

A) 200 B) 120 C) 280
D) 235 E) 115

88. Para ejecutar una obra se cuenta con 2 cuadrillas, la primera tiene 45 hombres y puede concluir la obra en 40 días; la segunda cuenta con 50 hombres y puede terminarla en 32 días. Si solamente se emplean los 2/3 de la primera cuadrilla y los 4/5 de la segunda cuadrilla. ¿En cuántos días terminarán?

A) 12 B) 18 C) 21 D) 24 E) 27

89. Si 4 hombres y 5 mujeres hacen un trabajo en 54 días, ¿en cuántos días realizarán el mismo trabajo 5 hombres y 6 mujeres sabiendo que el trabajo realizado por una mujer son los 3/5 del trabajo hecho por un hombre?

A) 40 B) 42 C) 44 D) 46 E) 48

90. Siete obrero cuya fuerza y actividad está representada por 9, hacen en 20 días de 11 horas cada uno, una obra cuya dificultad es como 7.

¿Cuántos días de 10 horas de trabajo por día demorarán 12 obreros cuya fuerza y actividad es como 11, para hacer un trabajo igual a los 5/4 del primero, si la dificultad de este trabajo es como 8?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 16

91. Un contratista se compromete hacer una obra de 90 metros en 18 días. Al cabo del onceavo día le comunican que en realidad la obra es de 120 m y que debe acabar 3 días antes de lo establecido. Para poder satisfacer las pretensiones del cliente, contrata 27 obreros más, de la misma capacidad que los anteriores, con los cuales cumple el compromiso. ¿Cuántos hombres tenía inicialmente?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

92. Un grupo de segadores debía segar 2 prados. Uno tenía triple superficie que el otro. Hasta el medio día trabajaron la mitad del personal en cada prado. En la tarde sólo 3 se quedaron terminando el prado más peque-

ño, mientras que todo el resto trabajó en el grande; logrando segar hasta la mitad. ¿Cuántos integraban el grupo?

A) 20 **B)** 10 **C)** 30 **D)** 24 **E)** 31

93. Se construye una obra con 4 máquinas que trabajan 10 horas diarias, debiendo culminar en 30 días. Al final del sexto día una se malogra, durando x días su compostura, hallar el valor de x para que se culmine a tiempo, si desde el séptimo día las otras tres máquinas trabajan 12 horas diarias y una vez reparada, la última sólo puede trabajar 8 horas diarias.

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 E) 13

94. Una balanza mal construida y que a pesar de tener los brazos algo desiguales, está en equilibrio cuando se halla descargada; si se pesa un cuerpo en el platillo derecho, resulta 136.9 gramos; el mismo cuerpo en el platillo izquierdo acusa un peso de 129.6 gramos. ¿Cuál es el peso verdadero?

A) 130,30 gramos **B)** 131,40 gramos
C) 133,20 gramos
D) 135,7 gramos **E)** 132,50 gramos

95. Un grupo de obreros tienen proyectado terminar una obra en un cierto número de días, faltando 20 días para terminar la obra, 6 de los obreros se accidentan y no pueden ser reemplazados hasta después de 8 días. ¿Cuántos obreros se deben contratar para que reemplacen a los accidentados de modo que se termine la obra en el plazo fijado?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

96. Una cuadrilla de 35 obreros pueden terminar una obra en 27 días. Al cabo de 6 días de trabajo se les junta cierto número de obreros de otro grupo, de modo que en 15 días terminan lo que falta de la obra. ¿Cuántos obreros eran del segundo grupo?

A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

97. Dos terrenos, donde uno tiene 9 hectáreas más que el otro, se debe arar con 11 yuntas en 13 días, del siguiente modo; los 5 primeros días 4 yuntas en el terreno grande y 7 en el pequeño, a partir del sexto día 3 de las 7 yuntas pasarán al otro terreno de modo que se termine la obra en el tiempo fijado. ¿Cuántas hectáreas tiene el terreno menor?

A) 67 hectáreas **B)** 76 hectáreas
C) 68 hectáreas **D)** 86 hectáreas
E) 70 hectáreas

98. Cuarenta obreros, trabajando 10 horas diarias, pueden terminar en 30 días una obra cuya dificultad es como 3. ¿Cuántos obreros cuyas eficiencias son 5/7 de los anteriores se requiere para que terminen en 28 días, un trabajo similar, pero de dificultad como 4, trabajando 8 horas diarias?

A) 18 **B)** 100 **C)** 80 **D)** 90 **E)** 120

99. Alberto puede hacer un trabajo en 50 días y Coco en 40 días. Empiezan juntos el trabajo, luego, al cabo de 10 días Alberto reduce su rendimiento en un 25%. A partir de este momento, ¿cuántos días demorarán en terminar el resto del trabajo?

A) $13\frac{3}{4}$ días **B)** $12\frac{7}{8}$ días
C) 16 días
D) 25 días **E)** $5\frac{5}{8}$ días

CLAVES DE RESPUESTAS

PÁGINA 207	1	2	3	4	5	6
	A	B	E	A	E	B

PÁGINA 208	1	2	3	4	5	6
	E	A	D	B	B	D

PÁGINA 214 - 215	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	B	A	A	B	C	D	B
	9	10	11	12	13			
	B	B	D	A	A			

PÁGINA 217 - 218	1	2	3	4	5	6	7	8
	E	B	A	C	A	C	C	A
	9							
	E							

PÁGINA 220	1	2	3	4	5	6	7	8
	B	C	A	C	B	C	B	A
	9	10						
	B	B						

PÁGINA 221 - 222	1	2	3	4	5	6
	B	E	C	C	D	E

PÁGINA 223	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	C	B	E	A	D	C	D
	9							
	A							

PÁGINA 224 - 225	1	2	3	4
	D	D	C	D

Reto al ingenio

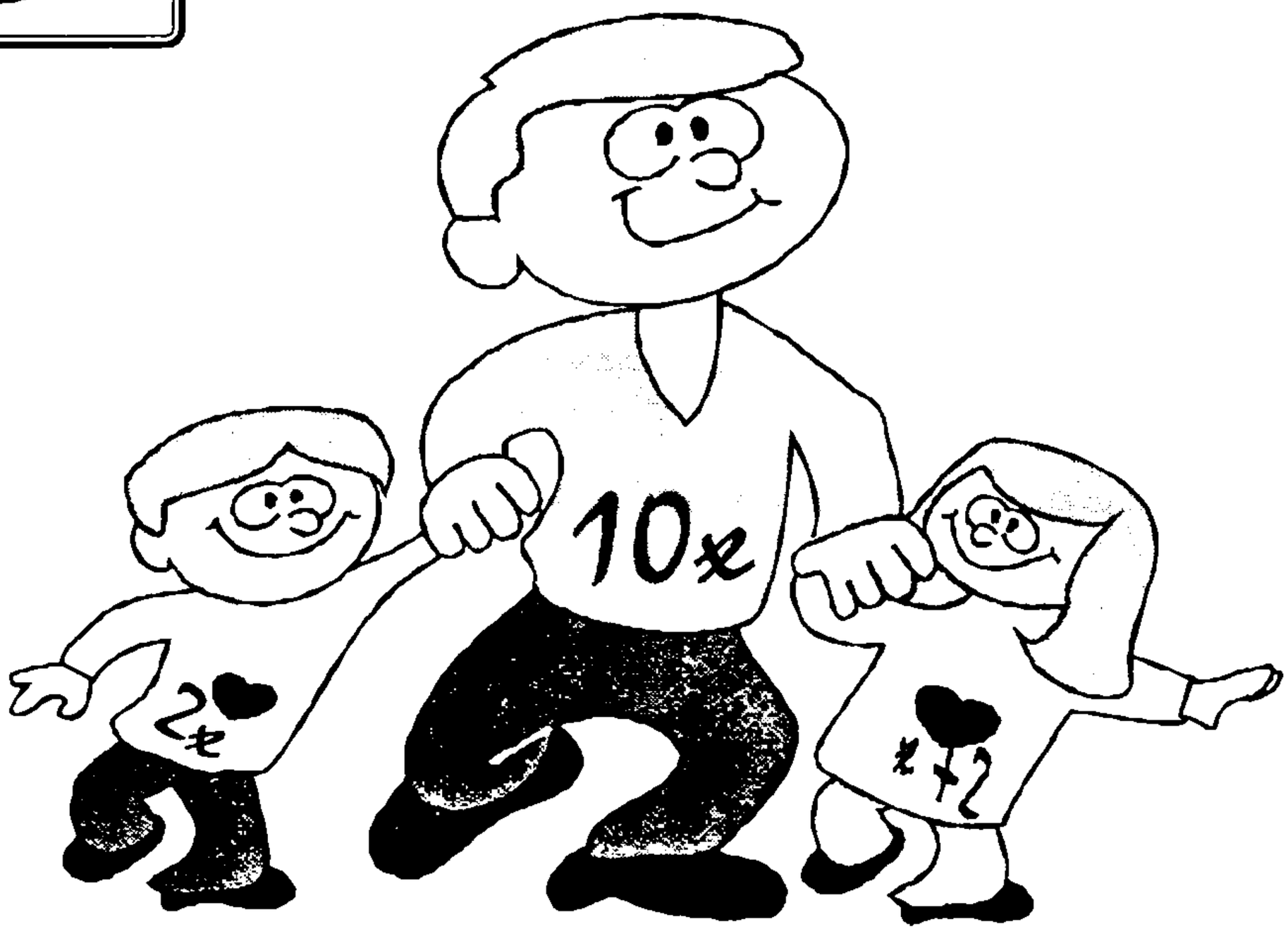
1. Señor Ming
2. Yang ($ 18), Ming ($ 20) y Tong ($ 45)
3. Sí. (mg < ma)
4. Mercurio
5. La primera
6. $ 200

PROBLEMAS PROPUESTOS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	C	C	A	E	B	C	B	C	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	C	B	C	C	A	E	A	C	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	A	B	C	E	C	D	E	D	C
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	C	E	D	D	C	E	D	B	A
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	B	D	B	A	E	D	A	E	C
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
D	D	C	B	B	E	D	C	B	B
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
D	B	D	B	C	C	E	C	D	D
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
D	D	B	C	C	B	B	C	E	A
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
D	A	C	B	C	B	C	D	C	C
91	92	93	94	95	96	97	98	99	
A	B	D	C	C	C	A	B	A	

7. 50
8. No. S/. 32
9. 400 g
10. 6 soles y 3 soles
11. Madre: 100 mil; hijo: 200 mil e hija: 50 mil
12. 50
13. 4/25 de un papel A4
14. Tendría una longitud de 1,5 m que no cabe en una maleta
15. 40 min
16. 10 kg debe costar S/. 30
17. Spencer y 9 más

5 ECUACIONES



Introducción

La mayoría de los problemas que requieren el auxilio de la matemática, luego de considerar las condiciones y los datos consignados, se convierten finalmente en hallar la solución de una ecuación.

En este capítulo nos vamos a centrar en la resolución de problemas mediante ecuaciones y sistema de ecuaciones.

Los fundamentos teóricos de la resolución de ecuaciones se pueden hallar en los textos de álgebra.

Conocimientos previos

Para resolver ecuaciones es preciso conocer el álgebra elemental, como reducción de términos semejantes, operaciones con polinomios, productos notables, factorización, reglas de exponentes y propiedades de las igualdades.

5.1. Ecuaciones

A un estudiante le propusieron resolver las siguientes ecuaciones:

$$x^2 = (x+1)(x-1)+1 \qquad (1)$$

$$\frac{2x-1}{2} = x+4 \qquad (2)$$

$$x-1 = \frac{2x+1}{2} \qquad (3)$$

El estudiante se había olvidado cómo resolver ecuaciones. Pero se acordaba, que al sustituir la solución por x, debía obtener una igualdad.

Entonces procedió a probar con una serie de valores para x. Pero cuál sería su sorpresa que al sustituir x por cualquier valor en la ecuación (1), siempre obtenía una igualdad.

En la ecuación (2), no había un valor de x que hiciera cumplir la igualdad.

En la ecuación (3) halló un solo valor de x que hacía cierta la igualdad. ¿Cómo explicar estos resultados?

En igualdades como

4 + 6 = 10 y 18 = 15 – 5

es fácil percatarse que la primera es verdadera y la segunda es falsa.

Cuando intervienen letras (variables) no siempre es evidente el valor de la letra que haga que la igualdad sea cierta. Es posible que haya infinitos valores como en (1), o que no haya alguno como en (2), finalmente, que haya sólo algunos como en (3).

Si para todos los valores numéricos de las letras siempre resulta una igualdad numérica, entonces se trata de una **igualdad absoluta**, o también llamada IDENTIDAD

E1

Cuando no es éste el caso, se trata de una **igualdad relativa** o ECUACIÓN, en cuyo caso, los valores de las letras que hacen cierta la igualdad pueden ser **infinitos** (*ecuación indeterminada*), **finitas** (*ecuación determinada*) o **no existir** (*ecuación absurda o incompatible*). E2

¿Qué número esconde x?

En cada una de las siguientes igualdades, descubre el valor que esconde x para que la igualdad sea cierta

1. $x - 5 = 18$
2. $4x + 6 = 146$
3. $\frac{x-10}{3} = 9$
4. $\frac{3x+5}{7} = 11$
5. $\frac{x+3}{6} + \frac{x-3}{6} = 7$

E1

- $x(x+1) = x^2 + 1$
- $(a+1)(a-1) = a^2 - 1$
- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

E2

- $x + y = 25$

(*Ecuación indeterminada*)

- $3x^2 = 12$

(*Ecuación determinada*)

- $4(x-1) = 4x + 8$

(*Ecuación incompatible*)

En una ecuación, la letra puede tomar cualquier valor real, pero sólo algunos de ellos hacen que la igualdad sea cierta. Por consiguiente, cuando se resuelve un problema mediante una ecuación, lo que se trata es descubrir dicho valor desconocido.

En la ecuación, la letra cuyo valor se trata de averiguar se llama **incógnita**. El valor de la incógnita que hace cierta la igualdad, se llama **solución**. **Resolver** una ecuación es precisamente hallar la solución, si existe, o demostrar que no tiene, si no tiene solución.

Si la ecuación tiene una sola incógnita, la solución se llama **raíz**.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

Las ecuaciones:

$$3x - 12 = 0 \qquad (1)$$

$$4x - 4 = x + 8 \qquad (2)$$

son equivalentes porque ambas tienen la misma solución $x = 4$.

Para resolver una ecuación, generalmente, ésta se transforma en una ecuación más sencilla, utilizando las propiedades de la igualdad.

5.1.1. Propiedades fundamentales para la transformación de ecuaciones

I. Si a ambos miembros de la ecuación **P = Q** se suma o se resta una misma expresión algebraica entera E (en particular una constante), se tiene una ecuación equivalente.

Si $P = Q \Rightarrow P + E = Q + E$ E1

Observaciones:

1. Una expresión algebraica entera que está sumando (o restando) en un miembro, puede pasar a restar (o sumar) al otro miembro.
2. Si en ambos miembros de una ecuación figura una misma expresión algebraica entera (en particular una constante), ya sea sumando o restando, entonces se puede suprimir.

Sea la ecuación: E1

$$3x - 7 = 2x + 3$$

Sumando a ambos miembros $(7 - 2x)$ *tenemos:*

$$3x - 7 + 7 - 2x = 2x + 3 + 7 - 2x$$

Reduciendo resulta: $x = 10$

Identidades Notables

- $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$
- $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + xy^2 + y^3$
- $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + xy^2 - y^3$
- $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
- $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + xy + y^3$
- $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^3$

Identidades de Legendre

- $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$
- $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$

Identidades de Langrange

- $(ax + by)^2 + (ax - by)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

II. Si ambos miembros de una ecuación **P = Q** se multiplica (o se divide) por un mismo número (diferente de cero) se obtiene una ecuación equivalente.

$$\mathbf{P = Q \Rightarrow kP = kQ \quad si \ (k \neq 0 \wedge k \in \mathbb{R})}$$ E2

Observaciones:

1. Si en lugar de multiplicar ambos miembros de la ecuación por un número, multiplicamos por una expresión entera "E", la ecuación PE = QE que se obtiene, no es en general equivalente a P = Q; pero siempre admite todas sus raíces. Por ejemplo:

Multipliquemos ambos miembros de la ecuación:

$$x + \frac{10}{x-2} = \frac{5x}{x-2} \qquad \ldots (1)$$

por la expresión entera $(x - 2)$, entonces se obtiene:

$$(x-2)x + 10 = 5x \qquad \ldots (2)$$

que no es equivalente a la ecuación (1), porque, (2) tiene como raíces a 2 y 5; en cambio la raíz de la ecuación (1) es solamente 5.

Por eso se dice, que *al multiplicar ambos miembros de una ecuación por una expresión entera, se pueden introducir soluciones extrañas.*

2. Si multiplicamos ambos miembros de una ecuación por una expresión fraccionaria o bien si dividiésemos entre una entera, se podrían perder soluciones.

En consecuencia, si en ambos miembros de una ecuación figura un mismo factor que depende de una incógnita, entonces antes de dividir ambos miembros entre dicho factor (es decir antes de cancelarla) se debe igualar a cero, de este modo se obtiene una de las soluciones de la ecuación. E3

3. Se puede cambiar de signo a todos los términos de una ecuación multiplicando por (–1). E4

4. Un número que esta dividiendo (o multiplicando) en un miembro, puede pasar al otro miembro multiplicando (o dividiendo).

III. Si ambos miembros de una ecuación se eleva a un mismo exponente, se obtiene una ecuación que admi

E2

Si ambos miembros de la ecuación:

$$4(x-3) = 12$$

Lo dividimos entre 4, obtendremos:

$$x - 3 = 3$$

Que es equivalente a la ecuación original.

E3

Dada la ecuación:

$$x^2 - 9 = 4x - 12 \qquad \ldots (1)$$

Factorizando en ambos miembros tenemos:

$$(x+3)(x-3) = 4(x-3) \quad \ldots (2)$$

Antes de cancelar el factor (x – 3) (antes de dividir ambos miembros entre (x – 3)) se debe igualar a cero el término que se va cancelar.

$$x - 3 = 0$$

Transponiendo 3: x = 3 (es una raíz de (1))

Luego cancelando (x – 3) en (2) nos queda:

$$x + 3 = 4$$

Transponiendo 3: x = 1 (es otra raíz de (1))

Por lo tanto, las raíces de (1) son 3 y 1.

E4

Sea la ecuación:

$$7 - 4x = x - 5$$

Multiplicando por –1:

$$-7 + 4x = -x + 5$$

$$5x = 12$$

$$\boxed{x = 2{,}4}$$

te al menos, todas las raíces de la primera. Por ejemplo:
Elevando al cuadrado, ambos miembros de la ecuación:

$$\sqrt{x-4} = 1-\sqrt{x-1} \qquad \ldots(1)$$

obtenemos: $x-4 = 1-2\sqrt{x-1}+x-1$

Reduciendo: $-2 = -\sqrt{x-1}$

Elevando nuevamente al cuadrado, tenemos:

$$4 = x-1$$

transponiendo –1: $5 = x \Longrightarrow x = 5$

Pero $x = 5$ no es raíz de la ecuación (1), ya que al sustituir $x = 5$ en la ecuación original, no se cumple la igualdad. Entonces, se dice que 5 es una solución extraña que se introduce al elevar al cuadrado ambos miembros.

IV. Si ambos miembros de una ecuación se extraen raíces del mismo índice, se obtiene una ecuación que generalmente contiene menos raíces que la original.

Ejemplo: Si extraemos la raíz cúbica de ambos miembros de la ecuación:

$$(x-1)^3 = 8 \qquad \ldots(1)$$

Obtendríamos: $x-1 = 2 \qquad \ldots(2)$

Donde: $\boxed{x = 3}$

La ecuación (2) admite una sola raíz, en cambio la ecuación (1) tiene tres raíces (01) que son:

$\boxed{x_1 = 3}$, $\boxed{x_2 = \sqrt{3}\,i}$ y $\boxed{x_3 = -\sqrt{3}\,i}$

5.1.2. Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

La forma general de la ecuación reducida de primer grado con una incógnita es:

$$\boxed{ax + b = 0}$$

Donde x es la incógnita, a y b son parámetros, es decir, representan valores numéricos o constantes.

Raíz Cuadrada de Ambos Miembros

En la ecuación:

$$x^2 = 9$$

$x = 3$ y $x = -3$ son soluciones de la ecuación porque:

$$3^2 = 9 \text{ y } (-3)^2 = 9$$

Pero $\sqrt{9}$ es 3 y no –3.

Por consiguiente se debe tener en cuenta que

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

En la ecuación:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9} \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow \boxed{x = \pm 3}$$

(01) *Raíces de $(x-1)^3 = 8$*

Sea $(x-1)^3 = 2^3$

Transponiendo 8: $(x-1)^3 - 2^3 = 0$

Desarrollando la diferencia de cubos:

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

$$(x-1-2)\left[(x-1)^2+(x-1)\cdot 2+2^2\right]=0$$

$$(x-3)\left[x^2-2x+1+2x-2+4\right]=0$$

$$(x-3)(x^2+3)=0$$

$$x-3=0 \quad \vee \quad x^2+3=0$$

$$x=3 \quad \vee \quad x=\pm\sqrt{-3}$$

$$\boxed{x=3} \vee \boxed{x=\sqrt{3}i} \vee \boxed{x=-\sqrt{3}i}$$

($i = \sqrt{-1}$, unidad imaginaria)

Para su resolución, se aplica las propiedades fundamentales que acabamos de exponer.

Problema 1

Resolver $2x - [-(-x + 2) - 3] + 4 = 18$

Resolución

Si en una ecuación aparece signos colectores, primero se suprimen estos signos en forma ordenada, partiendo generalmente de los signos colectores más internos.

- Suprimiendo los paréntesis: $2x - [x - 2 - 3] + 4 = 18$
- Suprimiendo los corchetes: $2x - x + 2 + 3 + 4 = 18$
- Reduciendo y transponiendo: $\boxed{x = 9}$

Problema 2

Resolver $\dfrac{x+1}{5} + \dfrac{x+2}{6} = \dfrac{x-1}{4} + \dfrac{x-2}{10}$

Resolución

Si en una ecuación figuran términos con denominadores independientes de la incógnita, se pueden realizar las operaciones de fracciones en ambos miembros.

- Efectuando en ambos miembros:

$$\frac{6(x+1)+5(x+2)}{30} = \frac{5(x-1)+2(x-2)}{20}$$

- Reduciendo: $\dfrac{11x+16}{3} = \dfrac{7x-9}{2}$
- Transponiendo los denominadores:

$$2(11x + 16) = 3(7x - 9)$$

- Multiplicando: $22x + 32 = 21x - 27$
- Transponiendo términos y reduciendo: $\boxed{x = -59}$

Problema 3

Resolver: $\dfrac{x+1}{8} + \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{x+2}{4} + \dfrac{x-2}{6}$

¿Quién está en lo cierto?

En la ecuación:

$$\frac{8x}{3} + \frac{16x}{5} = 88 \qquad (1)$$

Timoco propone resolver cancelando el factor 8 del segundo miembro y en cada uno de los términos del primer mienbro, de modo que, luego de cancelar el factor 8, la ecuación quedaría:

$$\frac{x}{3} + \frac{2x}{5} = 11 \qquad (2)$$

Manolo no está de acuerdo con este procedimiento, porque si se ha cancelado un factor 8 a un solo término del segundo mienbro, también en el primer miembro se debe cancelar a un solo término y no a los dos. De modo que la ecuación, tras la cancelación del factor 8, quedaría:

$$\frac{8x}{3} + \frac{2x}{5} = 11 \qquad (3)$$

o en su defecto

$$\frac{x}{3} + \frac{16x}{5} = 11 \qquad (4)$$

¿Cuál de los dos está en lo cierto?

Resolución

Si los términos de una ecuación contienen denominadores independientes de la incógnita, entonces se puede multiplicar a cada uno de los términos por el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores. (Es otra manera de resolver).

• Multiplicando todos los términos por el MCM de los denominadores, que es **24**.

$$\frac{\overset{3}{\cancel{24}}(x+1)}{\cancel{8}} + \frac{\overset{8}{\cancel{24}}(x-1)}{\cancel{3}} = \frac{\overset{6}{\cancel{24}}(x+2)}{\cancel{4}} + \frac{\overset{4}{\cancel{24}}(x-2)}{\cancel{6}}$$

• Efectuando: $3x + 3 + 8x - 8 = 6x + 12 + 4x - 8$

• Reduciendo: $\boxed{x = 9}$

Problema 4

Resolver: $\dfrac{x+a}{a} + \dfrac{x+b}{b} = 3$

Resolución

Las ecuaciones donde, aparte de las incógnitas, figuran otras letras, se llaman ecuaciones literales. En estas ecuaciones hay que distinguir la incógnita, la misma que saldrá generalmente en función de las otras letras.

• Multiplicando cada uno de los términos por ab, para eliminar los denominadores.

$$\frac{\cancel{a}b(x+a)}{\cancel{a}} + \frac{a\cancel{b}(x+b)}{\cancel{b}} = 3ab$$

• Efectuando: $bx + ab + ax + ab = 3ab$

• Reduciendo y factorizando x : $x(a + b) = ab$

• Dividiendo entre $(a + b)$: $\boxed{x = \dfrac{ab}{a+b}}$

Problema 5

Resolver: $\sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + 3x + \sqrt{x^2 + 3x - 2}}} = x + 1$

Timoco tien razón

La ecuación:

$$5x + 10x = 30 \qquad (1)$$

contiene el factor 5 en el segundo miembro y en cada uno de los términos del primer miembro. Podemos resolver reduciendo el primer miembro

$$15x = 30$$
$$x = 2$$

que es la solución sin ninguna duda.

El otro procedimiento a seguir puede ser factorizando el primer miembro

$$5(x + 2x) = 30$$
$$x + 2x = \frac{30}{5}$$
$$x + 2x = 6 \qquad (2)$$
$$x = 2$$

La ecuación (2) es equivalente a lo que se obtendría de la ecuación (1) cancelando el factor 5 del segundo miembro y de cada uno de los términos del primer miembro.

Por lo tanto Timoco tiene la razón.

Divertijo

¿Quién tiene razón?

Mario y Carmen se disponen a resolver la ecuación que dejó el maestro:

$$\frac{3x+1}{x-1} = \frac{4}{x-1} + 2$$

Para ganar tiempo, ambos se

CONTINUA EN LA SIGUIENTE PÁGINA

Resolución

Si en una ecuación figuran términos radicales, se despeja uno de los términos con radical y se eleva ambos miembros a un exponente igual al índice del radical despejado, hasta terminar de eliminar todos los radicales.

En ecuaciones de esta naturaleza las raíces que se obtienen se debe sustituir en la ecuación original para comprobar si realmente son raíces de la ecuación.

• Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$x^2+\sqrt{4x^2+3x+\sqrt{x^2-2}}=x^2+2x+1$$

• Reduciendo: $\sqrt{4x^2+3x+\sqrt{x^2+3x-2}}=2x+1$

• Elevando nuevamente al cuadrado:

$$4x^2+3x+\sqrt{x^2+3x-2}=4x^2+4x+1$$

• Reduciendo: $\sqrt{x^2+3x-2}=x+1$

• Elevando al cuadrado: $x^2+3x-2=x^2+2x+1$

• Reduciendo: $\boxed{x=3}$

• Sustituyendo $x=3$ en la ecuación original, tenemos:

$$\sqrt{3^2+\sqrt{4(3)^2+3(3)+\sqrt{3^2+3(3)-2}}}=3+1$$

$$\boxed{4=4}$$

∴ $x=3$ es la raíz de la ecuación

ponen a resolver por separado:

Resolución de Mario

$$\frac{3x+1}{x-1}-\frac{4}{x-1}=2$$

$$\frac{3x+1-4}{x-1}=2$$

$$3x-3=2(x-1)$$
$$3x-3=2x-2$$
$$3x-2x=3-2$$
$$\boxed{x=1}$$

Resolución de Carmen

$$\frac{3x+1}{x-1}-\frac{4}{x-1}=2$$

$$\frac{3x+1-4}{x-1}=2$$

$$\frac{3x-3}{x-1}=2$$

$$\frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}=2$$

$$\boxed{3=2}$$

¿Quien tiene razón?

Problemas

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2-3x+[x-2(x-2)+5]-(-x-1)=3$

b) $-5[x-3(2x-1)+3]-[-3x+2(-x+1)]=28$

c) $3x[x-5-2(x-1)]-3(2-x^2)-x=4$

Las soluciones son:

A) 3; 2 y 2 B) –3; –2 y 1 C) 3; 2 y –1

D) 3; –2 y 1 E) 3; 2 y 1

2. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x-1}{3}+\frac{x-2}{2}=2$

b) $\frac{x-4}{4}-\frac{x-5}{5}+\frac{x-6}{6}=\frac{3}{10}$

c) $\frac{2(x+1)}{3}-\frac{3(x-1)}{2}+\frac{2(x+3)}{3}=\frac{1}{6}$

Las soluciones son:

A) 4; 6 y 24 B) 4; 6 y 12 C) 4; 6 y 8

D) 4; 5 y 20 **E)** 4; 6 y 18

3. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x^2+x+\sqrt{x^2-1+\sqrt{4x^2+6x+6}}} = x+1$

b) $\sqrt{4x^2+2x+\sqrt{4x^2+x+16}} = 2x+1$

c) $\sqrt{x^2+x-\sqrt{x^2-3x+\sqrt{25x^2+2x+9}}} = x+1$

Las soluciones son:

A) 1; 5 y 1 **B)** 1; 5 y $\frac{1}{2}$ **C)** 1; 2 y 1
D) 1; 5 y –1 **E)** 1; 5 y 0

4. La solución de la ecuación

$$\frac{x-a}{a}+\frac{x+b}{b}=1 \text{ es:}$$

Las soluciones son:

A) ab **B)** $a+b$ **C)** $\frac{ab}{a+b}$

D) $\frac{a+b}{ab}$ **E)** $\frac{ab}{a-b}$

5. La solución de la ecuación

$$\frac{2-x}{3}+\frac{3-x}{4}+\frac{4-x}{5}+\frac{5-x}{6}=-\frac{3}{4} \text{ es:}$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

6. La solución de la ecuaciones:

$x-\sqrt{x^2-21}=7$ *es:*

A) 3 **B)** 5 **C)** 7
D) 8 **E)** no tiene solución

7. Resolver la ecuación:

$$\sqrt{x-4b+16}=2\sqrt{x-2b+4}-\sqrt{x}$$

A) $\frac{b}{2}$ **B)** $\frac{b}{4}$ **C)** $\frac{b^2}{2}$

D) $\frac{b^2}{4}$ **E)** $2b$

8. Resolver la ecuación:

$$\frac{x+n}{n}-\frac{x+m}{m}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$$

A) $\frac{m}{n}$ **B)** $\frac{mn}{m+n}$ **C)** $\frac{m+n}{m-n}$

D) $\frac{m-n}{m+n}$ **E)** $\frac{mn}{m-n}$

9. Hallar la solución de la ecuación:

$$\frac{x(x-3)}{5}-\frac{x^2+9}{5}-\frac{x-1}{6}=-7$$

A) 2 **B)** 7 **C)** –7
D) 5 **E)** 6

10. Hallar el valor de x en la siguiente ecuación:

$$4\sqrt{x+4\sqrt{x+4\sqrt{x+4\sqrt{x+\ldots}}}}=12$$

A) 3 **B)** 4 **C)** –4
D) –3 **E)** 2

10. Hallar el valor de x en:

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}}=5$$

A) 4 **B)** 5 **C)** –5
D) –4 **E)** 20

5.2 Ecuación cuadrática

Una ecuación reducida de segundo orden o ecuación cuadrática, tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

x : incógnita

a, b y c parámetros y $a \neq 0$ E1

- $3x^2 + 4x + 5 = 0$ E1
- $x^2 - 2x + 6 = 0$
- $3x^2 + 8 = 0$
- $(x - 3)(x + 2) = 0$

Problema 1

Resolver la ecuación $x^2 + 2x - 35 = 0$

Resolución

La resolución de ecuaciones de grado superior al primero se basan en el principio: "si el producto de varios factores es igual a cero, al menos uno de los factores debe ser cero".

Para aplicar este principio, se lleva todos los términos de la ecuación a un miembro dejando cero en el otro.

El primer miembro se expresa en forma de factores (se factoriza) y se obtiene el producto de varios factores en el primer miembro y cero en el segundo.

En la ecuación $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$, *¿Cuál de los factores es igual a cero? ... No siempre es posible saber de antemano. En consecuencia, sólo queda especular diciendo "puede ser que* $x - a = 0$, *en tal caso* $x = a$.." *" O tal vez* $x - b = 0$ *y entonces* $x = b$". *Por último, " es posible que* $x - c = 0$ *en cuyo caso* $x = c$".

Así encontramos que para x hay tres posibles valores. La ecuación tiene tres raíces.

Si la ecuación en cuestión resuelve un problema, no todas las raíces de la ecuación son soluciones del problema.

Por ejemplo $(x - 3)(x + 5) = 0$ *tiene las dos raíces* $x = 3$ *y* $x = -5$. *Pero si x representa los libros que ha leído una persona* $x = -5$ *no es solución del problema.*

Factorizando el primer miembro:

$$(x + 7)(x - 5) = 0$$

Uno de los factores del primer miembro es igual a cero, ¿Cuál de los factores es igual a cero? No hay ninguna información adicional que nos permita descartar o asegurar cuál es; por consiguiente lo que podemos deducir es que: es el primero, o el segundo, o ambos; lo que se

Solución General de la Ecuación Cuadrática

Sea la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Multiplicando por 4a:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Ordenando apropiadamente, transponiendo 4ac y sumando b^2

$$(2ax)^2 + 2(2ax)\,b + b^2 = b^2 - 4ac$$

Recordando que:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

y aplicando al primer miembro:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros

$$|2ax + b| = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

expresa como:

$$x + 7 = 0 \quad \vee \quad x - 5 = 0$$

$$\boxed{x = -7} \quad \vee \quad \boxed{x = -5}$$

Problema 2

Resolver: $x^2 - 2x - 1 = 0$

Resolución

En el caso en que no es posible la factorización del primer miembro, entonces se puede aplicar la fórmula de la solución general, que se deduce de la forma general de la ecuación cuadrática, la cual es:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Donde: $\Delta = b^2 - 4ac$ es el DISCRIMINANTE

Para la ecuación:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2} \quad \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Que son raíces de la ecuación

Discusión de las raíces de una ecuación cuadrática:

A. Si el discriminante $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación tiene 2 raíces reales distintas.

B. Si el discriminante $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación tiene una raíz real de multiplicidad 2 (dos raíces iguales y reales).

C. Si el determinante $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene raíces reales, sino, tiene 2 raíces complejas conjugadas.

Reconstrucción de las ecuaciones cuadráticas a partir de sus raíces

Analicemos la siguiente ecuación:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \qquad \ldots (1)$$

Factorizando el primer miembro tenemos:

$$(x - 5)(x - 1) = 0 \qquad \ldots (2)$$

- De donde se obtiene que las raíces de la ecuación son **5 y 1**.
- Lo que acabamos de hacer es resolver la ecuación, es decir, encontrar las raíces.

  Enseguida se plantea el proceso inverso, es decir, "regresar" a partir de las raíces a la ecuación original.
- Para ello, formamos la ecuación (2) con las raíces 5 y 1.

$$(x - 5)(x - 1) = 0$$

- Multiplicando el primer miembro de la ecuación obtenemos:

$$x^2 - x - 5x + (-5)(-1) = 0$$

- Ordenando: $x^2 - (1 + 5)x + (-5)(-1) = 0$
- Generalizando:

$$\boxed{x^2 - (\text{SUMA DE RAÍCES})x + (\text{PRODUCTO DE RAÍCES}) = 0 \qquad \ldots (1)}$$

Otros ejemplos:

RAÍCES	ECUACIÓN FACTORIZADA	MULTIPLICANDO EL PRIMER MIEMBRO
7; 8	$(x - 7)(x - 8) = 0$	$x^2 - 15x + 56 = 0$
–9; 10	$(x + 9)(x - 10) = 0$	$x^2 - x - 90 = 0$
–6; –8	$(x + 6)(x + 8) = 0$	$x^2 + 14x + 48 = 0$

En el caso en que las raíces sean fraccionarias, irracionales o complejas, es recomendable utilizar la relación (1).

Problema 3

Si las raíces de una ecuación cuadrática son $\frac{7}{2}$ ***y*** $\frac{3}{2}$***, hallar la ecuación:***

Resolución

La ecuación es:

$$x^2-\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\right)x+\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)=0$$

Reduciendo: $x^2-5x+\frac{21}{4}=0$

Multiplicando por 4: $\boxed{4x^2-20x+21=0}$

Problema 4

Reconstruir la ecuación cuadrática cuyas raíces son: $4-\sqrt{2}$ ***y*** $4+\sqrt{2}$

Resolución

La ecuación es:

$$x-\left(4-\sqrt{2}+4+\sqrt{2}\right)x+\left(4-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)=0$$

Reduciendo : $\boxed{x^2-8x+14=0}$

Problema 5

Hallar la ecuación cuadrática, donde una de sus raíces es 4 + 3i.

Resolución

Como las raíces son complejas, la otra será también compleja y la conjugada, es decir, será 4 – 3i.

La ecuación es:

$$x^2-(4+3i+4-3i)x+(4+3i)(4-i)=0$$

Reduciendo: $\boxed{x^2-8x+7=0}$

Observación:

Si las raíces de una ecuación cuadrática son irracionales o complejas, siempre serán conjugadas.

Si $x_1=a+\sqrt{b}$, *entonces* $x_2=a-\sqrt{b}$

si $x_1=a+bi$, *entonces* $x_2=a-bi$

Problemas

1. Resolver las ecuaciones siguientes:

1.	$x^2+3x-28=0$	**11.**	$3x^2-17x+10=0$	**21.**	$x^2-2x-2=0$
2.	$x^2-13x-30=0$	**12.**	$10x^2-23x-42=0$	**22.**	$x^2+4x-1=0$
3.	$x^2+20x-2400=0$	**13.**	$56x^2-29x+3=0$	**23.**	$x^2-8x+14=0$
4.	$x^2-20x+36=0$	**14.**	$48x^2-58x+15=0$	**24.**	$x^2-6x+11=0$
5.	$x^2-35x+306=0$	**15.**	$24x^2-49x+15=0$	**25.**	$x^2+10x+34=0$
6.	$x^2-32x+247=0$	**16.**	$24x^2-62x+35=0$	**26.**	$4x^2+12x+13=0$
7.	$x^2-4x-252=0$	**17.**	$40x^2+3x-54=0$	**27.**	$25x^2+50x+6=0$
8.	$x^2-60x+864=0$	**18.**	$60x^2+32x-15=0$	**28.**	$9x^2-12x-1=0$
9.	$x^2+2x-288=0$	**19.**	$20x^2+x-63=0$	**29.**	$3x^2-2x+1=0$
10.	$x^2-12x-864=0$	**20.**	$72x^2+11x-35=0$	**30.**	$5x^2-2x+3=0$

2. Hallar la ecuación cuyas raíces son:

31. 7; 3

32. –6; 8

33. –10; –12

34. 7; –6

35. $1 \pm \sqrt{3}$

36. $-2 \pm \sqrt{5}$

37. $5 \pm \sqrt{3}$

38. $2 \pm 3i$

39. $-5 \pm 2i$

40. $1 \pm \sqrt{3}\, i$

41. 2/3; 3/5

42. –2/7; 5/6

43. –8/5; –7/3

44. $(8 \pm \sqrt{5})/3$

45. $(5 \pm \sqrt{3}\, i)/4$

3. Hallar el valor de "m" para que una de las raíces de la ecuación:

$x^2 + mx + 15 = 0$ ***sea 5.***

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** –7 **E)** –8

4. La suma de las raíces de una ecuación cuadrática es 17 y el producto de las raíces es 19. ¿Cuál es esta ecuación?. Dar como respuesta el discriminante.

A) 210 **B)** 340 **C)** 213 **D)** 215 **E)** 183

5. El producto de las raíces de una ecuación cuadrática es 18; si la diferencia de sus raíces es 3. ¿Cuál es el coeficiente del término lineal de la ecuación?.

A) 9 **B)** –9 **C)** 9 ó –9 **D)** 18 **E)** 0

6. Hallar "n", en la ecuación:

$x^2 - 6x + n = 0$, ***si una de sus raíces es*** -5.

A) 55 **B)** –55 **C)** 44 **D)** 45 **E)** –45

7. Hallar "m" para que la ecuación :

$x^2 - mx + 64 = 0$, ***tenga una raíz de multiplicidad 2.***

A) 15 **B)** 17 **C)** 18 **D)** 19 **E)** 16

5.3 Sistema de ecuaciones

Se denomina **sistema de ecuaciones**, al conjunto de ecuaciones cuyas soluciones comunes se pretende obtener, en caso de que asistan.

La **solución** del sistema de ecuaciones es todo conjunto de valores de las incógnitas que verifican a la vez todas las ecuaciones del sistema y RESOLVER el sistema, es precisamente, encontrar su solución o demostrar que la misma no existe.

Cuando el sistema no tiene solución se dice que es INCOMPATIBLE Ó ABSURDO. E1

Si el sistema tiene al menos una solución se dice que es COMPATIBLE, que a su vez puede ser:

DETERMINADA, si tiene un número limitado de soluciones. E2

Ó INDETERMINADA si tiene un número ilimitado de soluciones. E3

Si las ecuaciones del sistema son de primer grado, el sistema se llama lineal. Si al menos una de las ecuacio-

E1 *El sistema:*

$$x + 2y = 4$$
$$2x + 4y = 5$$

es incompatible, porque al multiplicar por 2 la primera ecuación resulta:

$2x + 4y = 8$ *que contradice a la segunda ecuación.*

E2 *El sistema:*

$$y^2 + x = 10$$
$$y - x = 2$$

Es compatible y determinada, pues su soluciones son:

$x = 1, y = 3; x = -6, y = -4$

nes es de segundo grado, se llama cuadrática, etc.

Dos sistemas de ecuaciones se consideran equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.

5.3.1. Propiedades de los sistemas equivalentes

A. Si se suma miembro a miembro las ecuaciones de un sistema, multiplicadas previamente por factores arbitrarios (diferentes de cero) y se sustituye por lo obtenido cualquiera de las ecuaciones del sistema, se obtiene un sistema equivalente.

Ejemplo:

Dado el sistema:

$$3x - 5y + z = 6 \quad \ldots(1)$$
$$2x + y - z = 5 \quad \ldots(2)$$
$$x + y + z = 6 \quad \ldots(3)$$

Multipliquemos

(1) × 1	$3x - 5y + z = 6$
(2) × 3	$6x + 3y - 3z = 15$
(3) × 2	$2x + 2y + 2z = 12$
sumando	$11x = 33$
	$x = 3 \quad \ldots(4)$

Ahora sustituyamos la ecuación (1) por la ecuación (4) que hemos obtenido:

$$x = 3 \quad \ldots(4)$$
$$2x + y - z = 5 \quad \ldots(2)$$
$$x + y + z = 6 \quad \ldots(3)$$

Este nuevo sistema es equivalente al original.

B. Si en un sistema se resuelve una ecuación con respecto a una incógnita y el valor obtenido se sustituye en las demás ecuaciones, se obtiene un nuevo sistema equivalente al anterior.

Ejemplo

Del sistema:

$$x - y = 3 \quad \ldots(1)$$
$$x + 2y - z = 4 \quad \ldots(2)$$
$$2x + y + 2z = 13 \quad \ldots(3)$$

El sistema:

$$x + y + z = 2$$
$$x + y + z = 4$$

Es compatible e indeterminado, porque admite un número ilimitado de soluciones, como:

$x = 0, y = 3, z = -1, x = 1, y = 2, z = -1$, *etc.*

Nota (1): *Cuando un sistema de ecuaciones tiene solución también se dice que sus ecuaciones son simultáneas, indicando con ello que los valores de las incógnitas deben verificar simultáneamente todas las ecuaciones del sistema.*

Nota (2): *Si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones del sistema, generalmente el sistema es indeterminado.*

Continuemos resolviendo el sistema del ejemplo:

Sumando (2) + (3):

$$3x + 2y = 11 \quad (5)$$

$x = 3$ en la ecuación (5):

$$3(3) + 2y = 11$$
$$y = 1$$

$x = 3$ e $y = 1$ en (3)

$$3 + 1 + z = 6$$
$$z = 2$$

Resolviendo (1) con respecto a "x" tenemos:

$$x = y + 3 \quad \ldots (4)$$

Sustituyendo (4)

En (2): $(y + 3) + 2y - z = 4$

$$3y - z = 1 \quad \ldots (5)$$

En (3): $2(y + 3) + y + 2z = 13$

$$3y + 2z = 7 \quad \ldots (6)$$

Luego el sistema:

$$x = y + 3 \quad \ldots (4)$$
$$3y - z = 1 \quad \ldots (5)$$
$$3y + 2z = 7 \quad \ldots (6)$$

es equivalente al original. (E1)

C. Si se multiplican (o se dividen) miembro a miembro, las ecuaciones de un sistema y por la ecuación obtenida se sustituye una de las ecuaciones del sistema, se obtiene otro equivalente, siempre que las soluciones de este nuevo sistema no hagan cero simultáneamente los dos miembros de alguna de las ecuaciones multiplicadas (divididas).

D. Si en un sistema se sustituye una ecuación por la que resulta de sumar miembro a miembro con potencias cualesquiera de las ecuaciones previamente multiplicadas por factores arbitrarios, se obtiene un sistema equivalente al primero.

5.3.2. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Como se ha señalado, un sistema de ecuaciones lineales es aquel donde todas las ecuaciones del sistema son de primer grado.

Los métodos de resolución de sistemas lineales que vamos a estudiar se basan en las propiedades de los sistemas equivalentes que acabamos de estudiar.

En lo que sigue, sólo trataremos sobre la resolución de **sistemas determinados** que contienen **tantas ecuaciones como incógnitas**, mas no estudiaremos sistemas indeterminados por escapar a los objetivos del texto.

A) Método de reducción:

Se fundamenta en la primera propiedad de sistemas equivalentes. Este método también se conoce con el nom

Observación

La utilidad de esta propiedad, radica en que se reduce el número de incógnitas. Repitiendo el proceso sucesivamente, se puede ir reduciendo sucesivamente el número de incógnitas hasta quedarse con una.

(E1)

Continuando con la resolución del sistema del ejemplo, tenemos:

Resolviendo (5) con respecto a z:

$$3y - 1 = z \quad (7)$$

Sustituyendo (7) en (6):

$$3y + 2(3y - 1) = 7$$
$$3y + 6y - 2 = 7$$
$$9y = 9$$
$$y = 1$$

$y = 1$ en (7):

$$3(1) - 1 = z$$
$$2 = z$$

$y = 1$ en (4):

$$x = 1 + 3$$
$$x = 4$$

bre de adición y sustracción o MÉTODO DE GAUSS.

Consiste en sumar o restar miembro a miembro las ecuaciones de un sistema, multiplicada previamente por factores convenientes, de tal manera que se elimine una de las incógnitas. Repitiendo reiteradas veces el proceso se logra eliminar las incógnitas a excepción de una incógnita cuyo valor se calcula y el valor de las otras incógnitas se obtiene sustituyendo los valores encontrados en las ecuaciones anteriores.

Problema 1

Resolver:

$$2x - y + z = 7 \quad \ldots (1)$$

$$x + 3y + 2z = 10 \quad \ldots (2)$$

$$3x + 2y - z = 9 \quad \ldots (3)$$

Resolución

Multiplicando la ecuación (1) por 3 y sumando con (2)

$$\begin{array}{ll} (1) \times 3 & 6x - 3y + 3z = 21 \\ (2) & x + 3y + 2z = 10 \\ \hline & 7x + \quad 5z = 31 \quad \ldots (4) \end{array}$$

Ahora multiplicamos la ecuación (1) por (2) y sumamos con la ecuación (3)

$$\begin{array}{ll} (1) \times 2 & 4x - 2y + 2z = 14 \\ (3) & 3x + 2y - z = 9 \\ \hline & 7x + \quad z = 23 \quad \ldots (5) \end{array}$$

Restando la ecuación (4) menos la ecuación (5)

$$\begin{array}{ll} (4) & 7x + 5z = 31 \\ (5) & 7x + z = 23 \\ \hline & 4z = 8 \Rightarrow \textit{obtenemos} \ \boxed{z = 2} \end{array}$$

Sustituyendo este valor en (5) (también puede ser en (4))

$$7x + 2 = 23$$

$$7x = 21 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 3}$$

Sustituyendo los valores de x y z en la ecuación (1) (también puede ser en (2) ó (3))

$$2(3) - y + 2 = 7$$

$$-y = -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 1}$$

∴ La solución del sistema es:

$$\boxed{x = 3;\ y = 1;\ z = 2}$$

Problema 2

Resolver:

$$3x + 4y = 10 \quad \ldots (1)$$

$$5x - 3y = 7 \quad \ldots (2)$$

Resolución

Multiplicando la ecuación (1) por 3 y (2) por (4), (con el objeto de eliminar y) luego sumando miembro a miembro.

$$\begin{array}{ll} (1) \times 3 & 9x + 12y = 30 \\ (2) \times 4 & 20x - 12y = 28 \\ \hline & 29x \quad = 58 \quad \Rightarrow \ \boxed{x = 2} \end{array}$$

Sustituyendo este valor en (1) (también puede ser en la ecuación (2)).

$$3\,(2) + 4y = 10$$

$$4y = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 1}$$

Problema 3

Resolver:

$$x + y + z = 7 \quad \ldots (1)$$

$$y + z + w = 15 \quad \ldots (2)$$

$$z + w + x = 11 \quad \ldots (3)$$

$$w + x + y = 9 \quad \ldots (4)$$

Resolución

Sumando miembro a miembro las cuatro ecuaciones se obtiene:

$$3x + 3y + 3z + 3w = 42$$

Dividiendo ÷ 3: $x + y + z + w = 14 \quad \ldots (5)$

Si de la ecuación (5) restamos sucesivamente cada una de las ecuaciones del sistema, se obtienen las soluciones:

$\boxed{w = 7}$ $\boxed{x = -1}$ $\boxed{y = 3}$ $\boxed{z = 5}$

Ejercita

Resolver los siguientes sistemas e indicar el mayor de los números del conjunto solución

a. $x + y = 22$
$y + z = 17$
$z + x = 19$

b. $x + y = 17$
$y + z = 23$
$x + z = 10$

c. $x + 2y = 18$
$y + z = 16$
$2z + x = 30$

d. $3x = 2y$
$5x + 3y = 76$

e. $4x = 5y$
$x^2 + xy + y^2 = 244$

B) Método de sustitución

Este método se fundamenta en la segunda propiedad de sistemas equivalentes.

Consiste en resolver una de las ecuaciones del sistema respecto a una incógnita y sustituir este valor en las demás ecuaciones, de este modo el número de incógnitas queda reducida en 1.

Problema 4

Resolver:

$$x - y - z = 1 \quad \text{... (1)}$$
$$x + 2y + 2z = 10 \quad \text{... (2)}$$
$$x + y + 2z = 8 \quad \text{... (3)}$$

Resolución

Despejar x de la ecuación (1) se obtiene:

$$x = y + z + 1 \quad \text{... (4)}$$

Sustituyendo el valor de x en las ecuaciones (2) y (3):

$$(y + z + 1) + 2y + 2z = 10$$
$$(y + z + 1) + y + 2z = 8$$

Reduciendo:
$$y + z = 3 \quad \text{... (5)}$$
$$2y + 3z = 7 \quad \text{... (6)}$$

Despejando y de la ecuación (5):

$$y = 3 - z \quad \text{... (7)}$$

Sustituyendo en (6): $2(3 - z) + 3z = 7$

Reduciendo: $\boxed{z = 1}$

Sustituyendo en (7): $\boxed{y = 2}$

Sustituyendo $z \wedge y$ en (4): $\boxed{x = 4}$

$\therefore$ La solución del sistema es:

$$\boxed{x = 4; \quad y = 2; \quad z = 1}$$

C) Método de igualación

Este método, que es una variante del método anterior, consiste en despejar la misma incógnita de todas las ecuaciones e igualar el segundo miembro de una de las ecuaciones despejadas a los segundos miembros de cada una de las restantes; hasta quedarse con una sola incógnita.

Problema 5

Resolver:

$$x - 2y + z = 3 \quad \text{... (1)}$$
$$x + 3y - 2z = 2 \quad \text{... (2)}$$
$$x - y + 3z = 8 \quad \text{... (3)}$$

Resolución

Despejando x de las 3 ecuaciones, obtenemos:

$$x = 3 + 2y - z \quad \text{... (4)}$$
$$x = 2 - 3y + 2z \quad \text{... (5)}$$
$$x = 8 + y - 3z \quad \text{... (6)}$$

Igualando el segundo miembro de (4) con los segundos miembros de (5) y (6):

$$3 + 2y - z = 2 - 3y + 2z$$
$$3 + 2y - z = 8 + y - 3z$$

Reduciendo:
$$5y - 3z = -1 \quad \text{... (7)}$$
$$y + 2z = 5 \quad \text{... (8)}$$

Despejando y de (7) y (8) obtenemos:

$$y = \frac{3z-1}{5} \quad \ldots(9)$$

$$y = 5-2z \quad \ldots(10)$$

Igualando los segundos miembros de (9) y (10):

$$\frac{3z-1}{5} = 5-2z$$

Multiplicando por 5:

$$3z - 1 = 25 - 10z$$

Reduciendo: $13z = 26 \Rightarrow \boxed{z = 2}$

Sustituyendo el valor de z en (10):

$$y = 5 - 2(2) \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

Sustituyendo los valores obtenidos de z e y en (4):

$$x = 3 + 2(1) - 2 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

∴ La solución del sistema es:

$$\boxed{z = 2; \quad y = 1; \quad x = 3}$$

Los métodos expuestos hasta el momento son los más comunes; pero aparte de estos, existen varios otros. Enseguida expondremos la combinación de métodos.

D). Combinación de métodos

La resolución de ecuaciones, más que una técnica es un arte; este arte consiste en escoger el método más conveniente y una adecuada combinación de métodos en caso que se requiera.

Los métodos no se deben aplicar como fórmulas invariables, inertes, sino como una herramienta viva, sobre todo aprovechando al máximo las particularidades del sistema.

Mediante algunos ejemplos ilustraremos algunas de las combinaciones de los métodos estudiados y otros.

Problema 6

Resolver:

$$5x = 7y \quad \ldots(1)$$

$$9x - 4y = 86 \quad \ldots(2)$$

Resolución

Observación:

Aquí aprovechamos la relación $5x = 7y$ que se puede trañsformar en $\frac{x}{y} = \frac{7}{5}$; donde a cada término de la fracción $\frac{7}{5}$ multiplicamos por un factor k *(constante* de proporcionalidad), de esta manera se trabajará con la nueva incógnita k en lugar de $x \wedge y$.

De la ecuación (1):

$$\frac{x}{y} = \frac{7}{5} \quad \begin{cases} x = 7k \\ y = 5k \end{cases} \quad \ldots(3)$$

Reemplazando en (2): $9(7k) - 4(5k) = 86$

$$43k = 86$$

$$\boxed{k = 2}$$

En (3): • $x = 7(2)$ $\quad\quad$ • $y = 5(2)$

$\boxed{x = 14}$ $\quad\quad$ $\boxed{y = 10}$

Números Proporcionales.

La ecuación

$$\frac{x}{y} = \frac{7}{5}$$

es compatible e indeterminada porque tiene infinitas soluciones. Veamos algunas de ellas

$$\frac{x}{7} = \frac{7}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 7; 14; 21; \ldots \\ y = 5; 10; 15; \ldots \end{cases}$$

Podemos observar que las soluciones son proporcionales a 7 y 5. Esto es, las soluciones son de la forma.

$$x = 7k \quad y \quad y = 5k$$

Donde k es un número real diferente de cero.

Luego:

$$\frac{x}{7} = \frac{7}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 7\,k \\ y = 5\,k \end{cases}$$

Problema 7

Resolver:

$$4x = 3y \qquad \text{... (1)}$$

$$7x^2 + 2xy - 5y^2 = 175 \qquad \text{... (2)}$$

Resolución

De la ecuación (1):

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \quad \begin{cases} x = 3k \\ y = 4k \end{cases} \qquad \text{... (3)}$$

Sustituyendo los valores de $x \wedge y$ en (2):

$$7(3k)^2 + 2(3k)(4k) - 5(4k)^2 = 175$$

$$7k^2 = 175$$

$$k^2 = 25$$

$$k = \pm 5$$

Sustituyendo en (3): $\boxed{x = \pm 15}$ $\boxed{y = \pm 20}$

Problema 8

Resolver:

$$3xy + 2y = 40 \qquad \text{... (1)}$$

$$2xy - 3y = 5 \qquad \text{... (2)}$$

Resolución

Factorizando y de los primeros miembros y dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{y(3x+2)}{y(2x-3)} = \frac{40}{5}$$

De donde $\boxed{x = 2}$

Sustituyendo en (2): $\boxed{y = 5}$

Problema 9

Resolver:

$$x^2 + y^2 = 74 \qquad \text{... (1)}$$

$$x + y = 12 \qquad \text{... (2)}$$

Para $x > y$

Resolución

En este tipo de problemas podemos hacer uso de las **Identidades de Legendre**.

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2+y^2) \qquad \text{... (I)}$$

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy \qquad \text{... (II)}$$

Para la resolución del sistema haremos uso de (I): (1) y (2) en (I)

$$12^2 + (x-y)^2 = 2(74)$$

$$(x-y)^2 = 4$$

$$x - y = 2 \qquad \text{... (3)}$$

Sumando (2) y (3): $2x = 14 \Rightarrow \boxed{x = 7}$

Sustituyendo x en (2): $\boxed{y = 5}$

Problema 10

Resolver:

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad \text{... (1)}$$

$$xy = 12 \qquad \text{... (2)}$$

Para $x > y > 0$

Resolución

Para la resolución de este sistema haremos uso de las dos identidades de Legendre.

Sustituyendo (1) en (I):

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(25) \qquad \text{... (3)}$$

Sustituyendo (2) en (II):

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4(12) \quad \ldots(4)$$

Sumando (3) + (4): $2(x+y)^2=98$

$$x+y=7 \quad \ldots(5)$$

Restando (3) – (4): $2(x-y)^2=2$

$$x-y=1 \quad \ldots(6)$$

Sumando (5) + (6): $2x=8$

$$\boxed{x=4}$$

Sustituyendo x en (6): $\boxed{y=3}$

Problema 11

Resolver:

$$\frac{3x^2+2x+9}{3x^2+2x+1}=\frac{3x^2+3x+5}{3x^2+x+5} \quad \ldots(1)$$

Resolución

Acomodando: (01)

$$\frac{(3x^2+2x+5)+4}{(3x^2+2x+5)-4}=\frac{(3x^2+2x+5)+x}{(3x^2+2x+5)-x} \quad \ldots(2)$$

Haciendo $3x^2+2x+5=a$ y sustituyendo en (2):

$$\frac{a+4}{a-4}=\frac{a+x}{a-x}$$

Por analogía $\boxed{x=4}$

(01) *Observación*

Para la resolución de la ecuación, lo que se ha hecho es un cambio de variable; lo cual es recomendable, cuando una expresión compleja se repite varias veces en una ecuación.

Problema 12

Resolver:

$$x+y=120 \quad \ldots(1)$$

$$24x+35y=3652 \quad \ldots(2)$$

Resolución

Para resolver este sistema, donde se conoce la suma de las incógnitas, se trata de conseguir dicha suma en la otra ecuación, de modo que al reemplazar el valor de la suma, quede sólo una incógnita.

- Escribiendo la ecuación (2) como:

$$24x+24y+11y=3650$$

- Factorizando 24:

$$24(x+y)+11y=3650$$

- Reemplazando $(x+y)$:

$$24(120)+11y=3650$$

- Resolviendo en y: $\boxed{y=70}$
- Sustituyendo y en (1): $\boxed{x=50}$

5.4 Planteo de ecuaciones.

Una gran cantidad de problemas que requiere como herramienta para su solución a la matemática se enuncian mediante el lenguaje común y necesitan traducir al lenguaje matemático para hallar su solución.

Por lo tanto se necesita contar con una metodología que permita convertir el enunciado del problema en un enunciado matemático que consta de números y símbolos. Esto se realiza mediante una traducción, con todo los cuidados que se debe tener en cuenta para no incurrir en falta. Este enunciado matemático es una ecuación o inecuación.

Plantear una ecuación es traducir el enunciado de un problema desde el lenguaje común al lenguaje matemático.

5.4.1. Traducción de frases

Empezaremos traduciendo frases cuyo contenido son cantidades, comparaciones y operaciones; por ejemplo, la frase:

El dinero que tiene Raúl

Si esta frase está dentro del enunciado de un problema, se trata de una cantidad cuyo valor no sabemos, en consecuencia lo podemos representar mediante una letra; una vez elegida la letra, ésta ya no puede usarse para representar otra cantidad independiente del dinero que tiene Raúl. Esta letra puede ser "x" o una "d" de dinero o una "R" de Raúl según nos convenga y sea fácil recordar.

FRASE	TRADUCCION
El peso de Carmela	p
El volumen de un recipiente	V
Los libros que tiene María	n
La edad de Victoria	v

Cuando se traducen operaciones o comparaciones, se debe dar especial importancia en los signos de puntuación, por ejemplo, sean las siguientes frases:

El doble de un número aumentado en 3.

El doble, de un número aumentado en 3.

En el primer caso, vamos escribiendo las cantidades, y las operaciones en el orden que son nombrados; sea n el número en mención, entonces la traducción es

$$2 \times n + 3$$

En el segundo caso, tenemos una coma que divide a la frase en dos: la idea de doble: **2** y la idea de un número aumentado en **3**. $n + 3$, la traducción es: $2 \times (n + 3)$; el doble se aplica al número aumentado en tres $(n + 3)$

Ahora veamos las frases:

Un número aumentado en su doble

un número aumentado a su doble

LECTURA

Cuidados en la traducción

Cuando querramos REPRESENTAR, NOTAR, SIMBOLIZAR, una determinada situación usando el lenguaje matemático, debemos tener en cuenta los siguientes aspectos:
La representación escogida debe ser clara, ordenada, para evitar interpretaciones dudosas; debe representar fielmente el orden y las relaciones de los objetos a los que corresponda.
No debe haber ambigüedad. Una misma letra en un mismo problema no puede designar objetos diferentes; ello puede llevarnos a confusiones. Ud. debe reparar mucho en este punto.
Los símbolos y/o signos escogidos deben ser fáciles de recordar y reconocer. Por ejemplo: usualmente al tratarse de representar incógnitas se usan las ultimas letras x, y ó z. Esto no es una regla absoluta; es el uso más común que se le da a dichas letras.

(Oscar Zevallos)

Traducir cada una de las siguientes frases.

Los chanchitos de una granja

Los hermanos de José

La distancia entre A y B

El tiempo que demora Luis

La longitud de un cable

En ambos casos se habla de un número. Vamos a asumir que éste es x. En el primer caso el número x aumento en $2x$, resultando $x + 2x = 3x$. En cambio en el segundo caso, el resultado del aumento es $2x$ (aumentado a su doble), es decir $x + ? = 2x$, ¿en cuánto debe aumentarse? La respuesta es x, de modo que $x + x = 2x$. En resumen, las traducciones son:

Un número aumentado en su doble: $x + 2x$

Un número aumentado a su doble: $x + x$ *ó* $2x$

De manera similar tenemos la traducción de las frases:

Un número disminuido en su cuarta parte:

$$x - \frac{x}{4}$$

Un número disminuido a su cuarta parte: $\frac{x}{4}$

Hasta ahora hemos visto frases referidos a una sola cantidad desconocida (variable) la cual la representamos con una letra.

En las ecuaciones generalmente aparecen dos o más cantidades.

Por ejemplo, la frase:

Suma de 5 números enteros consecutivos:

Una forma de traducir sería

$$a + b + c + d + e$$

es decir, para cada número usamos una letra, pero no estamos expresando el hecho de que son consecutivos. Entonces una mejor traducción sería

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n+3) + (n + 4)$$

pero mucho mejor sería si la traducción es:

$$(n - 2) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 2)$$

En conclusión, al hacer la traducción, se tiene que utilizar al máximo la relación entre las cantidades para no estar utilizando una letra para cada cantidad.

Vamos a analizar cada una de las siguientes frases:

• *Las edades de Juan y Tito suman 30.*

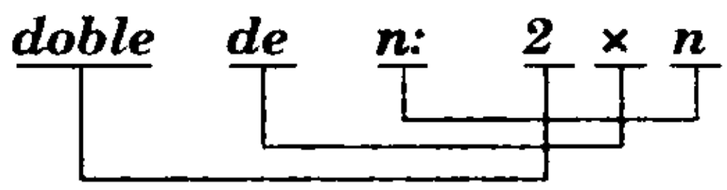
Aquí, si la edad de Juan es n, la edad de Tito no necesariamente se debe representar por otra letra, sino por $30 - n$. Si sumamos $n + (30 - n) = 30$.

Traducciones

Frases

Aumentado en 3: $+3$

Disminuido en 1: -1



El cubo de 2: 2^3

El cuadrado de a: a^2

La mitad de x – 2: $\frac{x-2}{2}$

Elementos recíprocos

El opuesto de n : $-n$

El inverso de n : $\frac{1}{n}$

El opuesto de x –1 : $1 - x$

El inverso de $\frac{3}{x}$ *:* $\frac{x}{3}$

Traducir las siguientes frases:

Tu edad aumentado en 40 años

[ ]

Tu edad dentro de 10 años

[ ]

Tu edad hace 10 años

[ ]

La mitad, de un número disminuido en 6

[ ]

La mitad de un número disminuido en 6

[ ]

El opuesto de – 6 + 8p

[ ]

• *José tiene 100 soles más que Ana.*
Si Ana tiene x soles, el dinero de José será $x + 100$.

• *Victoria tiene el triple de lo que tiene María.*
Si lo que tiene María es n, lo de Victoria será $3n$.

• *La edad de Raúl es la mitad de la edad de Rafo y Ana tiene 12 años más que Rafo.*
Si definimos como x la edad de Raúl, la de Rafo será $2x$ y la de Ana $2x + 12$; así evitamos usar fracciones y varias variables o letras.

5.4.2. Traducción de oraciones

El enunciado de un problema es un párrafo que puede constar de una ó más oraciones; en la mayoría de los casos por cada oración resulta una ecuación, ya que estas oraciones expresan una comparación o una relación de igualdad de dos cantidades mediante el verbo **"es"** o alguna conjugación del mismo verbo a otro similar.

Las palabras que expresan igualdad de cantidades son: **es, igual a, resulta, se obtiene, resulta tal como, es como**, etc.

Pautas para plantear las ecuaciones.

A continuación mencionamos algunas pautas para la traducción de oraciones en ecuaciones.

1. Leer hasta comprender

Como ante cualquier texto, cuyo contenido nos interesa, se recomienda leer pausadamente hasta comprender de lo que trata el problema.

2. Identificar la incógnita

Esto está relacionado con la pregunta del problema. Recuerda que nuestro objetivo es dar respuesta a dicha pregunta. En el mejor de los casos al valor de la incógnita le asignamos una letra, así, una vez resuelto la ecuación se habrá encontrado la respuesta; si no es así, la letra representará alguna cantidad, se resuelve la ecuación y a partir de allí se deducirá la cantidad que da respuesta al problema.

En ambos casos se debe descubrir la relación entre las diferentes cantidades que se mencionan, sólo así se podrá hacer una traducción correcta y obtener ecuaciones que nos permitan encontrar las cantidades desconocidas.

El inverso de $\frac{4x}{3n}$

El opuesto del inverso de $\frac{x}{2}$

Expresar en lenguaje común las siguientes frases numéricas

$4x + 8$

$4\,(x + 8)$

$P + 4P$

$(x - 3)^2$

$\sqrt{2(x-1)} + 10$

Dadas las siguientes expresiones, escribir el valor de las cantidades en función de una sola letra.

• *El producto de tres números enteros consecutivos.*

• *En una granja hay 40 animales entre conejos y patos*

• *El peso de Mili es el triple de la de su hijo.*

• *Entre los dos tienen 500 soles.*

3. Resolución de la ecuación

Aquí, debes tener presente los diferentes métodos que existen para resolver las ecuaciones, elegir el más adecuado, de modo que te permita hallar el valor de la letra de una manera rápida y segura.

4. Comprobar

Si la situación amerita, una de las formas de asegurarse de que se ha llegado al resultado correcto, es mediante la comprobación, es decir, al resultado obtenido se le somete a las operaciones indicadas en el problema o se reemplaza en la ecuación original, si es que es el resultado correcto, debe satisfacer las relaciones de igualdad.

Dos observaciones adicionales

A. Una vez que hayas realizado el "primer paso", es decir, entendido de qué trata el problema, tienes dos opciones para resolver: puedes resolver el problema sin llegar a plantear la ecuación, de esto hemos dado una gama de ejemplos en la resolución de los problemas de los capítulos anteriores. Está demostrado que si un problema se puede resolver mediante una ecuación lineal de una variable, se puede resolver sin la necesidad de una ecuación. La otra opción, obviamente, es resolver mediante una ecuación.

B. Dependiendo del tema que trate el problema, es recomendable apoyarse con gráficos, esto te permitirá tener una visión gráfica del tema o fenómeno descrito en el problema. Así mismo, se recomienda usar cuadros de doble entrada que sirvan para ordenar las diferentes cantidades que intervienen en el problema.

Ahora veamos la traducción de los enunciados en ecuaciones, mediante la resolución de los siguientes problemas:

Problema 1

Hallar un número cuyo doble aumentado en 350 es igual a su triple disminuido en 420

Traducción de oraciones

• *La edad de Carlos hace 5 años era 10 años. ¿Cual es su edad actual?*

Resolución:

Edad actual: x

edad hace 5 años: $x - 5$

era 10 años: $x - 5 = 10$

$$x = 15$$

Rpta.: 15 años

• *Un número disminuido en su tercera parte resulta 12. ¿Cuál es la suma de sus cifras?*

Resolución:

El número es x

$$x - \frac{x}{3} = 12 \quad \ldots (1)$$

(1) × 3: $3x - x = 36$

$$x = 18$$

El número es 18, la suma de sus cifras es $1 + 8 = 9$

Rpta.: 9

• *En una granja donde hay 60 animales entre conejos y pavos; se encuentran 160 patas. ¿Cuántos animales hay de cada especie?*

Resolución

Especies	***Cabezas***	***Patas***
conejos	x	$4x$
pavos	$60 - x$	$2(60 - x)$

Número de patas:

$$4x + 2(60 - x) = 160$$

$$x = 20$$

Número de conejos: 20
Número de pavos: 40.

Rpta.: 20 y 40

Resolución

Hallar un número	x
cuyo doble	$2x$
aumentado en 350	$2x + 350$
es igual	$2x + 350 =$
a su triple	$2x + 350 = 3x$
disminuido en 420	$2x + 350 = 3x - 420$

Resolviendo la ecuación:

$$350 + 420 = 3x - 2x$$

$$\boxed{770 = x}$$

Rpta.: 770

Problema 2

Si el doble de un número aumentado en 35, se le resta la mitad del número, resulta un tercio, del número aumentado en 420.

Resolución

Si el doble,	$2($
de un número aumentado en 35,	$2(x + 35)$
se le resta la mitad del número	$2(x + 35) - \frac{x}{2}$
resulta un tercio,	$2(x + 35) - \frac{x}{2} = \frac{1}{3}($
del número aumentado en 420	$2(x + 35) - \frac{x}{2} = \frac{1}{3}(x + 420)$

Resolviendo la ecuación:

Multiplicando por 6 :

$$12(x + 35) - 3x = 2(x + 420)$$

Efectuando:

$$12x + 420 - 3x = 2x + 840$$

Reduciendo $7x = 420 \Rightarrow \boxed{x = 60}$

Rpta.: 60

Problema 3

Entre Carmela y Anamelba tienen 680 soles; si Carmela le diera 120 soles a Anamelba, ésta tendría una cantidad igual a los dos tercios de lo que le quedaría a Carmela. ¿Cuánto tiene cada una?

Resolución

Entre Carmela y Anamelba tienen 680 soles	$C + A = 680$	(1)
Si Carmela le diera 120 soles a Anamelba	$C - 120$	
ésta tendría una cantidad	$A + 120$	
igual a los dos tercios	$A + 120 = \frac{2}{3}($	
de lo que le quedaría a Carmela	$A + 120 = \frac{2}{3}(C - 20)$	(2)

Resolviendo la ecuación:

Multiplicando (2) por 3 :

$$3A + 360 = 2(C - 120)$$

Reduciendo : $3A + 360 = 2C - 240$

Sumando 3C a ambos:

$$3A + 3C + 600 = 2C + 3C$$

Factorizando 3:

$$3(A + C) + 600 = 5C$$

Reemplazando A + C:

$$3(680) + 600 = 5C$$

$$C = 528$$

$$\Rightarrow \quad A = 152$$

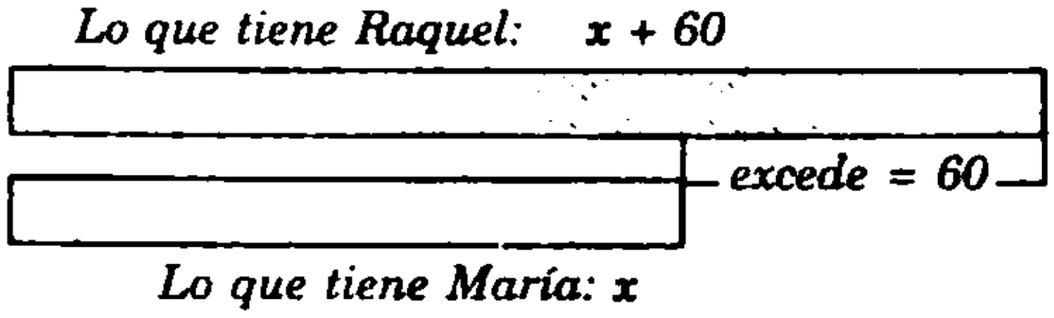
Rpta.: 528 y 152

Problema 4

Lo que tiene Raquel excede en S/. 60 a lo que tiene María. Si entre ambas tienen 420 soles, ¿cuánto es lo que tiene cada una?

Resolución

METODO (1)



La suma es 420 entonces, $x + x + 60 = 420$

$x = 180$

Rpta.: María tiene 180 y Raquel 240

METODO (2)

Si le quitamos a Raquel los 60 que tiene en exceso, ambas tendrían lo mismo, y lo que tendrían entre los dos sería ***420 – 60 = 360****, siendo lo que tiene cada una* ***360 ÷ 2 = 180****, esto es lo que tiene María y lo que tiene Raquel es* ***180 + 60 = 240.***

Así escrito, parece una resolución larga, pero hacer esto mentalmente significa unos cuantos segundos.

Rpta.: 240 y 180

Problema 5

En una prueba de 50 preguntas, un alumno contesta 42 preguntas y obtiene 120 puntos. Si por cada respuesta correcta recibe 5 puntos, por cada errada le quitan 1 punto y las respuestas en blanco no tienen puntaje. ¿Cuántas respondió correctamente?

Resolución

METODO (1)

Rptas.	Cantidad	Puntaje	Obtiene
Correcta	x	5	$5x$
Errada	$42 - x$	–1	$-1(42 - x)$
En blanco	8	0	0

$5x - (42 - x) = 120 \Rightarrow \boxed{x = 27}$

METODO (2)

Si los 42 hubieran respondido correctamente, habría obtenido ***42×5 = 210*** *puntos. Por cada respuesta errada pierde 6 puntos (5 por no ser correcta y 1 por ser errada). De 210 a 120 pierde* ***210 – 120 = 90*** *el cual significa* ***90 ÷ 6 = 15*** *respuestas erradas, entonces ha respondido correctamente* ***42 – 15 = 27*** *preguntas.*

Problema 6

Entre Victoria y María pesan 56 kg, entre Victoria y Medalid pesan 50 kg. Y entre María y Medalid, 58 kg. ¿Cuánto pesa cada una?

Resolución

Peso de Victoria : a

Peso de María : b

Peso de Medalid : c

$$a + b = 56 \quad \ldots(1)$$
$$a + c = 50 \quad \ldots(2)$$
$$b + c = 58 \quad \ldots(3)$$

(1) + (2) + (3):

$$2(a + b + c) = 164$$
$$a + b + c = 82 \quad \ldots(4)$$

(1) en (4): $56 + c = 82$

$$c = 26$$

(2) un (4): $50 + b = 182$

$$b = 32$$

(3) en (4): $a + 58 = 82$

$$a = 24$$

Comprobando

$$a + b = 24 + 32 = 56$$
$$a + c = 24 + 26 = 50$$
$$b + c = 32 + 26 = 58$$

Rpta.: 24; 32 y 26 kg

Problema 7

En un colegio los alumnos de las 4 aulas suman 180. En la primera aula se incrementa 3 alumnos, del tercero se retiran 8 y al cuarto llega un alumno, resultando en cada aula igual número de alumnos. ¿Cuántos alumnos son de la segunda aula?

Resolución

Método (1)

	habían	**hay**
Primera aula :	x	$x+3$
Tercera aula :	y	$y-8$
Cuarta aula :	z	$z+1$
Segunda aula :	w	w

Al final resultan iguales en las cuatro aulas:

$$\underset{(3)}{x+3} = \underset{(2)}{y-8} = \underset{(1)}{z+1} = w$$

$$\begin{cases} De\ (1) : z = w-1 \\ De\ (2) : y = w+8 \\ De\ (3) : x = w-3 \end{cases}$$

En total suman 180. Luego:

$$x + y + z + w = 180$$

Reemplazando :

$$(w-1) + (w+8) + (w-3) + w = 180$$

$$4w = 176$$

Rpta.: w = 44

Método (2)

Tomamos como un todo los 180 alumnos, a esto se incrementa 3, se retira 8 y por último se incrementa en 1 quedando:

$$180 + 3 - 8 + 1 = 176$$

como en los 4 hay el mismo número de estudiantes, entonces hay **176÷4 = 44.** En la segunda aula no varió, entonces hay 44 estudiantes.

Rpta.: 44

Problemas

1. Hallar un número que aumentado en su tercera parte es igual a 360

A) 180 **B)** 200 **C)** 210
D) 270 **E)** 330

2. ¿Cuál es el número que al sumarle 250 resulta igual a su doble disminuido en 128?

A) 278 **B)** 287 **C)** 378
D) 387 **E)** 328

3. Un número cuyo cuádruplo disminuido en 120 es igual a su triple aumentado en 140.

A) 280 **B)** 260 **C)** 250
D) 300 **E)** 360

4. Si Jorge le diera 120 soles a Raúl, éste tendría el triple de lo que le quedaría a Jorge. ¿Cuánto tiene Raúl?

A) 240 **B)** 260 **C)** 360
D) 380 **E)** 420

5. La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es igual al triple del mayor disminuido en 150. El menor es:

A) 120 **B)** 148 **C)** 184
D) 210 **E)** 243

6. ***Cuando le preguntan a Jaimito por el número de hermanos, responde: "el número de mis hermanos excede al de mis hermanas en 2, además si tuviera una hermana menos, el número de mis hermana sería la mitad del número de mis hermanos". ¿Cuántas hermanas tiene Jaimito?***

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

7. ***Si a un número se agrega otro entonces, dicho número se cuadruplica; en cambio si al número se resta 4 resulta la quinta del otro número que se agregó. ¿Cuál es la suma de estos números?***

A) 10 **B)** 20 **C)** 40 **D)** 30 **E)** 25

8. ***Jesús da a su hijo tantos céntimos como soles tiene en el bolsillo y se queda con 396 soles. ¿Cuántos soles tenía en el bolsillo?***

A) S/. 400 **B)** S/. 360 **C)** S/. 310
D) S/. 320 **E)** S/. 410

9. ***En una reunión se cuentan tantos caballeros como tres veces el número de damas; después que se retiran ocho parejas, el número de caballeros que aún quedan, es igual a 5 veces el de damas. ¿Cuántos caballeros habían inicialmente?***

A) 16 **B)** 32 **C)** 48 **D)** 64 **E)** 72

5.5 Problemas sobre edades

Un tipo de problemas matemáticos muy frecuentes es el de edades, que por su peculiaridad, le daremos una atención especial.

Las cantidades que intervienen en los problemas de edades son, obviamente, las edades de las personas, las cuales van aumentando en una unidad por cada año que pasa.

Si actualmente una persona tiene 24 años, entonces hace 8 años tenía **24 – 8 = 16** años y dentro de 8 años tendrá **24 + 8 = 32** años. ¿Ves? ¿Qué fácil, verdad? Bien. Ahora intentemos representar la edad desconocida de una persona, hace 8 años, dentro de 8 años y la que tiene actualmente. ¿Cómo representamos? Como es desconocida, escogeremos una letra para representar la edad. Pero, ¿cuál de las edades? ¿La actual, la de hace 8 años o la que tendrá dentro de 8 años? Eso depende de la conveniencia. Veamos las tres posibles formas de representar.

Hace 8 años	Edad Actual	Dentro de 8 años	Representando con x la edad
x	$x + 8$	$x + 16$	hace 8 años
$x - 8$	x	$x + 8$	actual
$x - 16$	$x - 8$	x	dentro de 8 años

Como ves, en cuanto se escoge una letra para representar la edad en un determinado momento, la edad en cualquier año se representa en función de la letra escogida.

Cuando trata de la edad de una sola persona

Problema 1

Dentro de 16 años tendré el doble de la edad que tenía hace 15 años. ¿Qué edad tengo?

Resolución

Representado con x la edad que tengo:

$$\underset{\text{Hace 15 años}}{x-15} \quad \underset{\text{tengo}}{x} \quad \underset{\text{dentro de 16 años}}{x+16}$$

De acuerdo a la condición:

$$x + 16 = 2(x - 15) \Rightarrow \quad x = 14$$

Rpta: tengo 14 años

Problema 2

Hace n años tenía 18 años y dentro de 2n años tendré 48 años. ¿Qué edad tendré dentro de 3n años?

Resolución

Disponiendo los datos

$$\underset{\text{Hace "n" años}}{18} \quad \underset{\text{Ahora}}{18+n=48-2n} \quad \underset{\text{dentro de 2n años}}{48}$$

De la igualdad:

$$3n = 30 \Rightarrow \boxed{n = 10}$$

Entonces, hace 10 años tenía 18, ahora tengo 28 y dentro de 30 años tendré 58 años.

Rpta: 58 años

Problemas

1. ***José tendrá dentro de 11 años, el triple de la edad que tenía hace 9 años. ¿Qué edad tiene actualmente?***

   A) 18 años **B)** 19 años **C)** 20 años
   D) 21 años **E)** 23 años

2. ***Hace 14 años tenía la mitad de la edad que tendré dentro de 12 años. ¿Qué edad tengo?***

   A) 40 años **B)** 38 años **C)** 36 años
   D) 34 años **E)** 30 años

3. ***Hace x años tenía 12 años y dentro de 3x años tendré 28 años. ¿Cuál es mi edad actual?***

   A) 18 años **B)** 19 años **C)** 16 años
   D) 15 años **E)** 13 años

4. ***Hace 5 años tenía la cuarta parte de la edad que tendrá dentro de 13 años. ¿Cuántos años tendré dentro de 10 años?***

   A) 11 años **B)** 22 años **C)** 24 años
   D) 21años **E)** 23 años

5. ***Julio tenía hace 8 años los dos tercios de la edad que tendrá dentro de 5 años. ¿Cuál es su edad actual?***

   A) 30 años **B)** 32 años **C)** 33 años
   D) 34 años **E)** 35 años

6. ***Cuando pasen 10 años a partir de ahora, tendré el doble de la edad que tenía hace 6 años. ¿Hace cuántos años tenía 18 años?***

   A) 20 años **B)** 22 años **C)** 2 años
   D) 13 años **E)** 4 años

7. ***Cuando tenga el doble de al edad que tendré dentro de 2 años, mi edad será el cuádruplo de la que tenía hace 3 años. ¿Cuál es mi edad actual***

   A) 5 años **B)** 8 años **C)** 20 años
   D) 2 años **E)** 10 años

Cuando trata de las edades de varias personas

Los problemas anteriores están referidos a la edad de una sola persona. Cuando intervienen las edades de dos o más personas, tendremos que tener algunas consideraciones.

Es recomendable el uso de un cuadro de doble entrada en el que dispondremos los datos según los espacios asignados para cada uno.

Personas.- Son aquellas a las cuales corresponden las edades.

Tiempos.- Como las edades varían según van pasando los años, entonces habrán varios tiempos a los cuales corresponderán edades diferentes. Los tiempos se indican mediante diversas frases:

• *Tiempo pasado* : "Hace 5 años" , "tenía", "tuve", etc.

• *Tiempo presente* : "Mi edad es", "tu edad es", etc.

• *Tiempo futuro* : "Dentro de 6 años", "tendré", "tendrás", etc.

Condiciones: Son los datos que señalan las relaciones numéricas entre las edades. **Cada condición** da lugar ya sea a una ecuación o a evitar introducir más incógnitas. Por ejemplo, la condición "hace 10 años mi edad era el doble de la que tenías", permite representar por x la edad que tenías y por $2x$ la mía. La condición "la suma de nuestras edades en ese año era 36 años", permite plantear la ecuación: $x + 2x = 36$

En la **figura 1** te muestro la tabla que aprenderemos a manejar para resolver fácilmente los problemas sobre edades:

Te sugerimos identificar y distribuir los datos en el orden señalado por los números romanos.

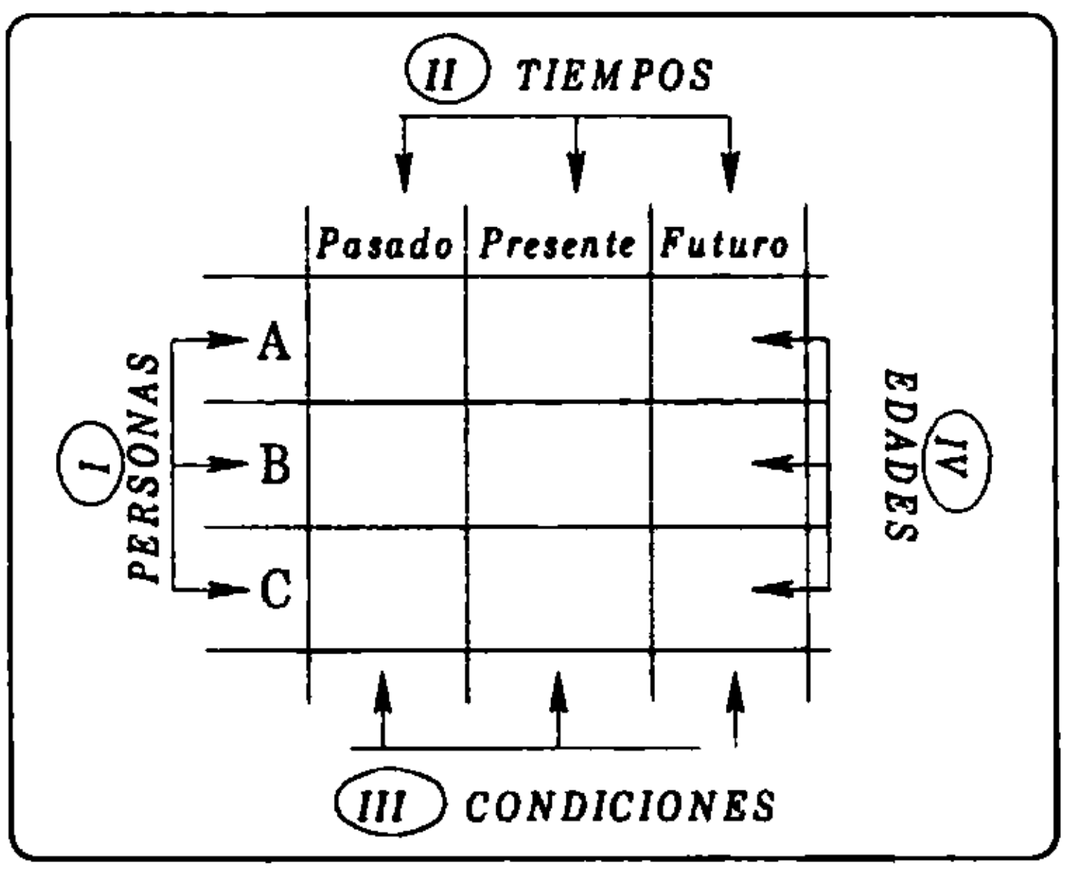


Fig.: 1

Problema 3

La edad de Carlos es el doble de la edad de Pedro, pero hace 10 años, era el triple. Hallar las edades actuales.

Resolución

Primero, identificaremos las personas y los tiempos para poder determinar los casilleros del cuadro.

A. I. Las personas son: Carlos y Pedro

II. Los tiempos son: presente ("es") y pasado ("hace 10 años")

III. Las condiciones: En el presente, la edad de Carlos es el doble de la de Pedro (C = 2P) (1). En el pasado, era el triple (C = 3P) (2)

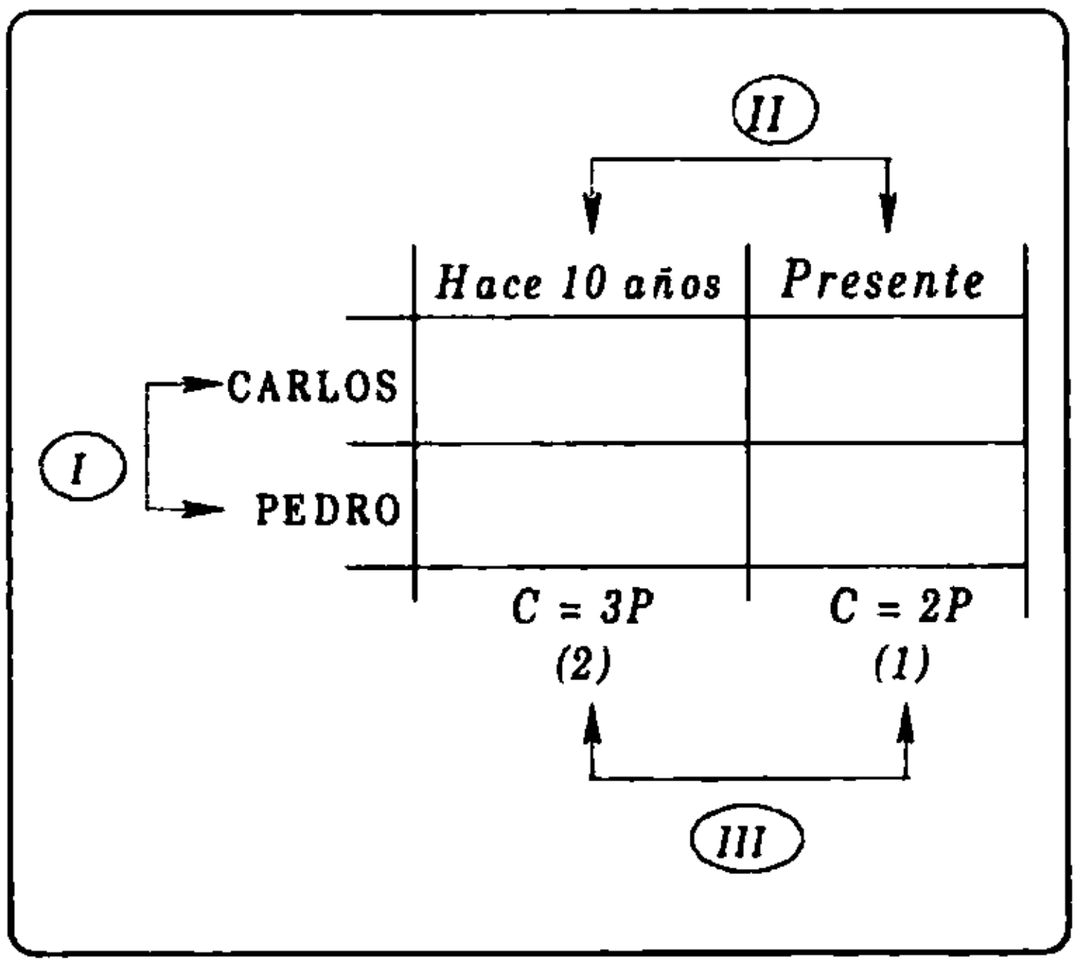


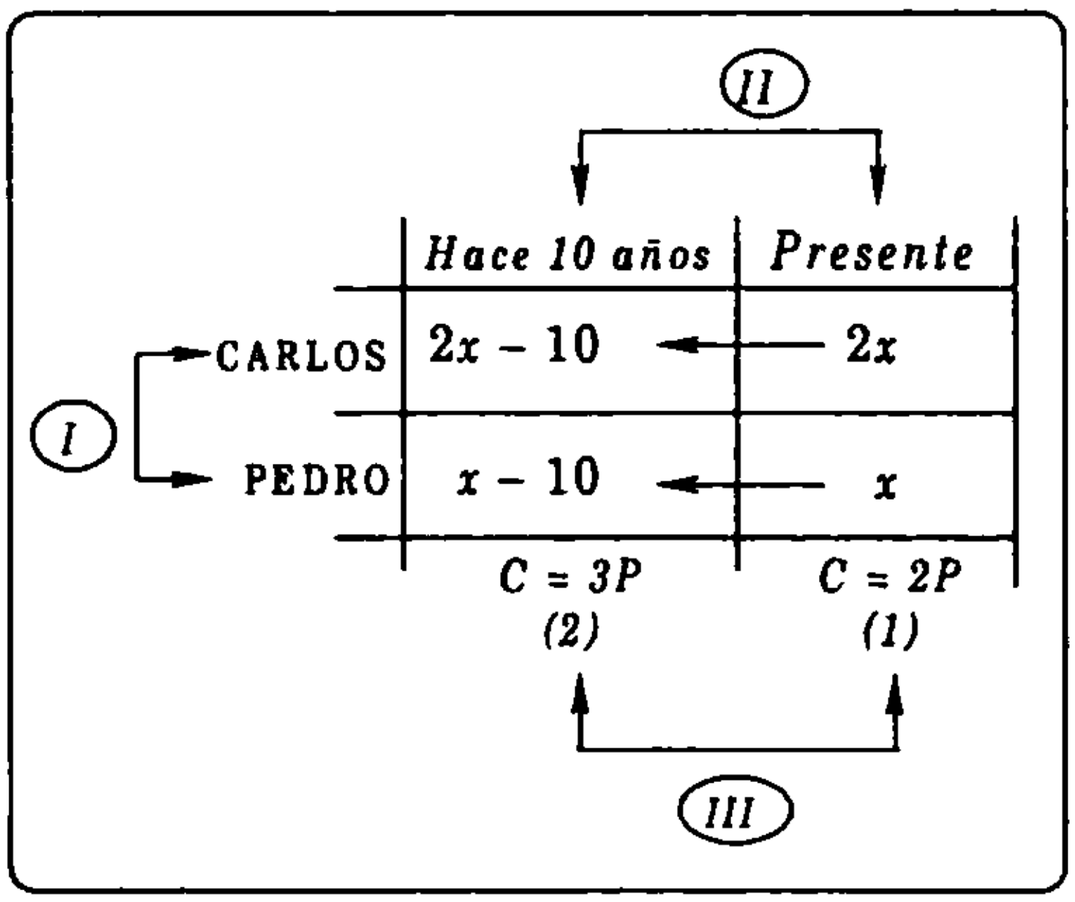
Fig.: 2

B. A Continuación ubicaremos en el cuadro las edades.

a. Representemos con x la edad actual de Pedro y lo ubicamos en el casillero correspondiente.

b. Según la condición (1), la edad de Carlos es el doble de x. Entonces ponemos $2x$ en el casillero respectivo. Ya tenemos ubicadas las edades en el presente. Para ubicar las edades en el pasado vamos a aprovechar el hecho de que corresponden a hace 10 años:

c. Si Carlos tiene $2x$, hace 10 años tenía $2x - 10$. Análogamente, Pedro tenía $x - 10$.



d. Ahora sustituimos las edades del pasado en la igualdad originada por la condición (2).

$$J = 3P \qquad (2)$$

$$2x - 10 = 3(x - 10)$$

$$2x - 10 = 3x - 30$$

$$20 = x \quad \Rightarrow \quad 2x = 40$$

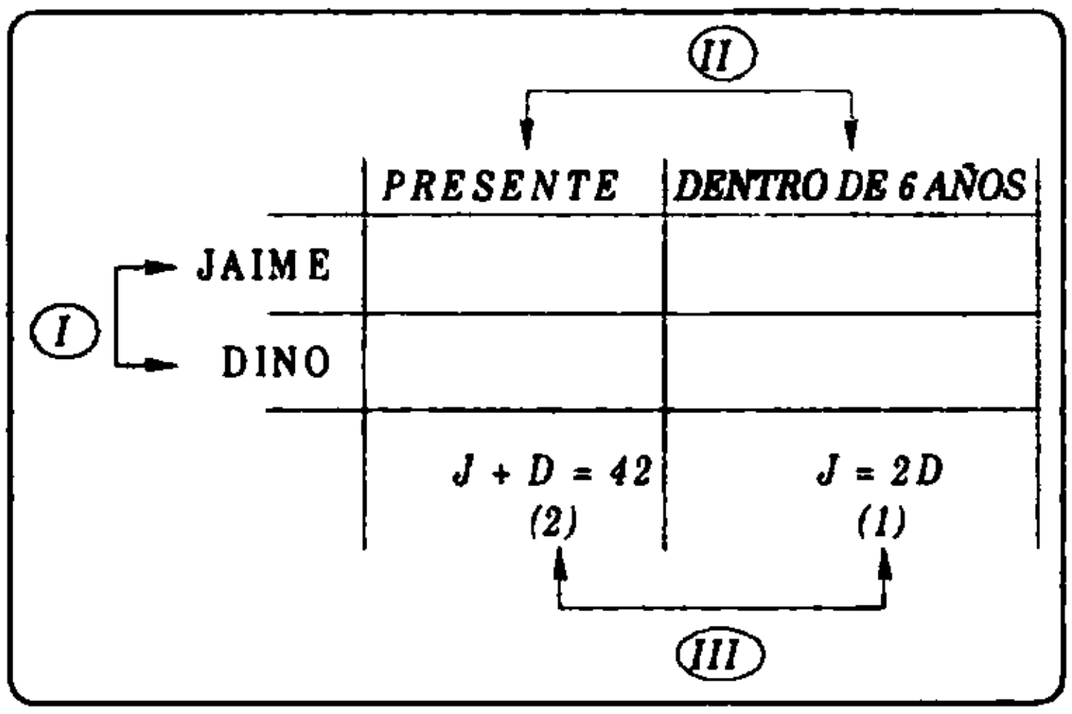
Rpta: 20 años y 40 años

Problema 4

Dentro de 6 años la edad de Jaime será el doble de la que tendrá Dino. Actualmente sus edades suman 42 años. ¿Cuál es la edad actual de Jaime?

Resolución

A. Identificamos los datos y los ubicamos en la tabla en el orden ya sugerido.

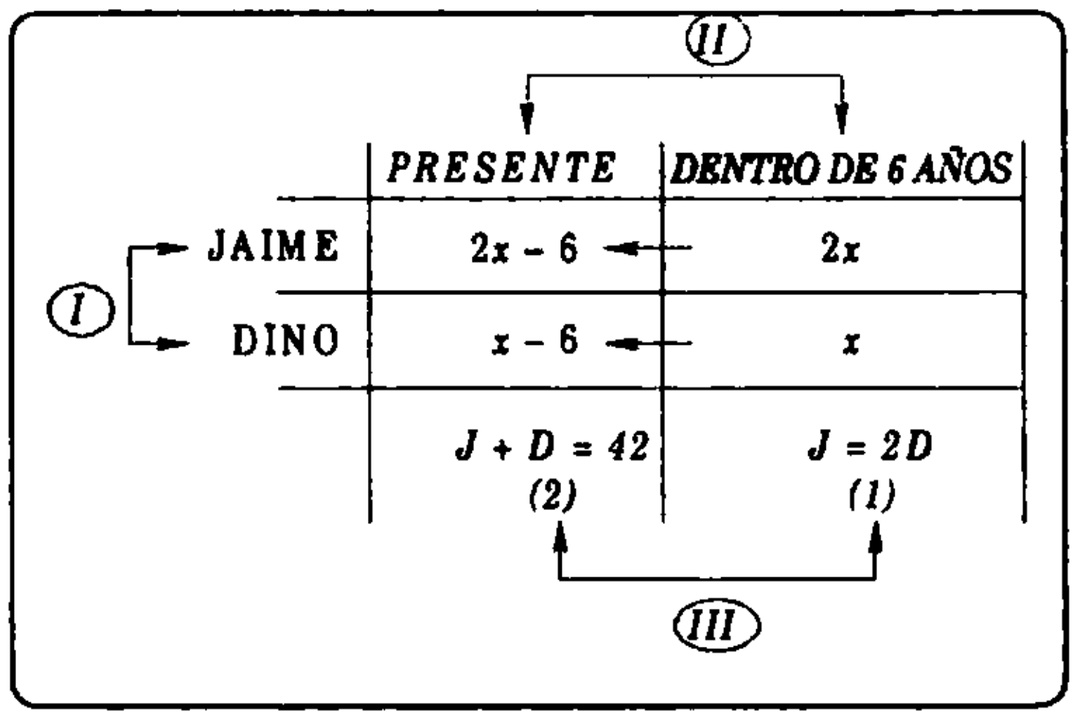


B. Ahora debemos tener cuidado para escoger la edad que debe ser asignada con una letra.

a. Asignemos con x la edad de Dino dentro de 6 años.

b. Según la condición (1), la edad de Jaime en el futuro será $2x$

c. Las edades del presente vamos a deducir de las edades del futuro: si Jaime tendrá $2x$ dentro de 6 años, entonces actualmente tiene $2x - 6$, y Dino, $x - 6$.



d. Aprovechando la igualdad originada por la condición (2), sustituimos en ella las edades del presente:

$$J + D = 42 \qquad (2)$$

$$(2x - 6) + (x - 6) = 42$$

$$3x - 12 = 42 \quad \Rightarrow \quad x = 18$$

La edad actual de Jaime es:

$$2x - 6 = 2(18) - 6 = 30$$

Rpta.: 30 años

Problema 5

Hace 4 años la edad de un padre era el triple de la de su hijo, pero dentro de 5 años, será solamente el doble. ¿Cuál es la suma de sus edades actuales?

Resolución

Para demostrar que estás comprendiendo la resolución de los problemas, completa las expresiones y números que faltan en la tabla:

A. Distribuimos los datos en la tabla según el orden ya conocido.

B. Distribuimos las edades en la tabla, para ello asignamos con x la edad del hijo hace 4 años. Según la condición (1), el padre tenía $3x$ años.

	HACE ... AÑOS	PRESENTE	.... 5 AÑOS
(1) PADRE			
(1) HIJO			
	$P = 3H$ (1)		$P = \ldots$ (2)

A partir de estas edades vamos representando las edades del presente y a partir de éstas las del futuro. ¿Está claro? ...

De acuerdo a la condición (2):

	Hace 4 años	Presente	Dentro de 5 años
(1) PADRE	$3x$	$3x + 4$	$3x + 4 + 5 = 3x + 9$
(1) HIJO	x	$x + 4$	$x + 4 + 5 = x + 9$
	$P = 3H$ (1)		$P = 2H$ (2)

$$P = 2\,H$$

$$3x + 9 = 2\,(x + 9)$$

$$3x + 9 = 2x + 18 \quad \Rightarrow \quad x = 9$$

Entonces las edades actuales son:

$3x + 4 = 3(9) + 4 = 31$ y $x + 4 = 9 + 4 = 13$

Luego, la suma es $31 + 13 = 44$

Rpta: 44 años

Hasta aquí, ¿Cómo ves la resolución de los problemas? ¿Estas entendiendo? Hemos estado utilizando dos gráficos para explicar el procedimiento de la resolución, pero esto lo hacemos sólo por cuestiones didácticas, es suficiente utilizar un solo gráfico. Además, las explicaciones que estamos haciendo no es necesario que las escribas, lo harás mentalmente. Para ello es necesario .... ¡practicar!

Problema 6

Norma le dice a Paco: "tú tienes el triple de la edad que yo tenía cuando tú tenías la edad que tenga, pero cuando yo tengo la edad que tienes, la suma de nuestras edades será 84 años". ¿Cuántos años tiene norma?

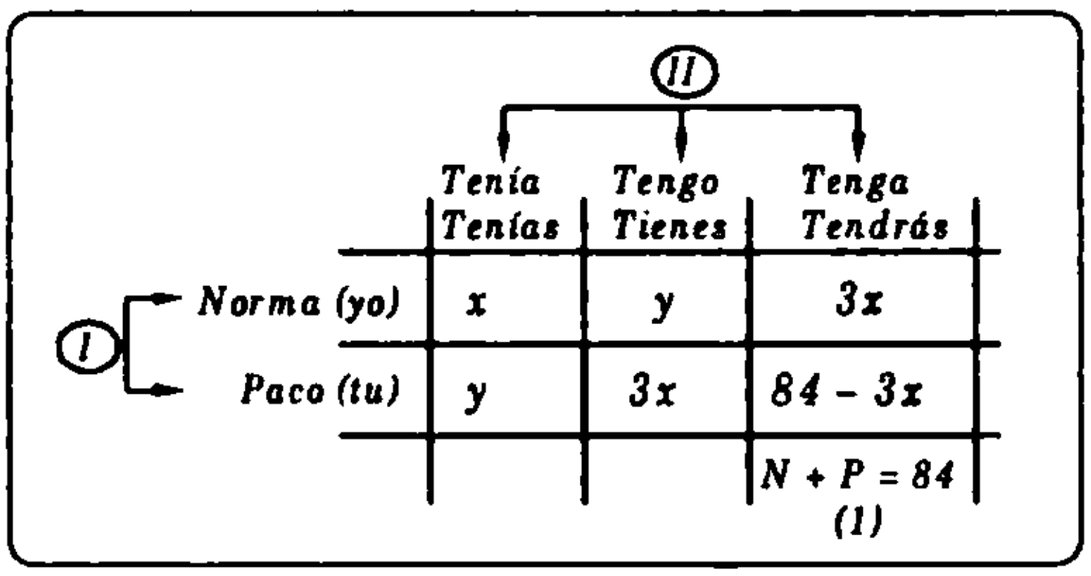
Resolución

Los tiempos están indicados mediante las palabras, tengo (presente), tenías (pasado), tendrás (futuro). Por lo tanto dispondremos los tiempos bajo estos términos.

Procedamos a distribuir las edades. Presta bastante atención.

• Norma le dice a Paco: "Tú tienes el triple de la edad que yo tenía ... "

Asignemos con x lo que "yo tenía" entonces "tú tienes" $3x$



• Continúa: " ... cuando tú tenías la edad que tengo ... ". Si asignamos con y la edad "que tengo", entonces "tú tenías" también y.

• Seguimos: "... pero cuando yo tenga la edad que tienes ..." como "tú tienes" $3x$, entonces será cuando "yo tenga" también $3x$.

• Por último: " ... La suma de nuestras edades será 84" En el futuro, las dos edades deben sumar 84, como una de ellas es $3x$, entonces la otra es $84 - 3x$, según la condición (1)

Aparentemente no hay más condiciones para plantear ecuaciones, pero debemos recordar que la diferencia de edades es la misma en todo momento.

• La diferencia de edades de la primera columna es igual a la diferencia de edades de la segunda columna:

$$x - y = y - 3x \Rightarrow 4x = 2y \Rightarrow y = 2x \qquad (1)$$

• La diferencia de edades de la primera columna es igual a la diferencia de edades de la tercera columna:

$$\begin{aligned} & x - y = 3x - (84 - 3x) \\ \Rightarrow\ & x - y = 3x - 84 + 3x \\ \Rightarrow\ & 84 = y + 5x \qquad (2) \end{aligned}$$

Sustituyendo (1) en (2):

$$84 = 2x + 5x \Rightarrow 84 = 7x \Rightarrow x = 12$$

La edad actual de Norma es:

$$y = 2x \Rightarrow y = 2(12) = 24$$

Rpta: 24 Años

Problemas

1. Dos hermanos cuyas edades suman 51 años, hace 21 años el mayor tenían el doble de la del menor. ¿Qué edad tendrá el mayor dentro de 12 años?

A) 27 años **B)** 39 años **C)** 41 años
D) 29 años **E)** 35 años

2. Si hace 7 años la edad de Pablo era el triple de la que tenía Mario y ahora solamente es el doble ¿Cuál es la suma de sus edades actuales?

A) 14 años **B)** 42 años **C)** 28 años
D) 30 años **E)** 35 años

3. Hace 4 años la edad de Beto era la mitad de la que tenía Arnold y dentro de 8 años sumarán 42 años. ¿Cuál es la edad actual de Arnold?

A) 12 años **B)** 16 años **C)** 18 años
D) 20 años **E)** 24 años

4. Juan le lleva a Miguel por 9 años. Si dentro de 12 años la edad Miguel será los 2/3 de la de Juan, ¿Cuál es la edad actual de Miguel?

A) 18 años **B)** 12 años **C)** 10 años
D) 8 años **E)** 6 años

5. Las edades actuales de un padre y la de sus hijos suman 59 años. Hace 5 años la edad del padre era el triple de la del mayor y dentro de 6 años

será el doble de la del menor. ¿Cuál es la edad actual del padre?

A) 30 años **B)** 31 años **C)** 32 años
D) 33 años **E)** 35 años

6. ***María le dice a Néstor: "Tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tienes y cuando tengas la edad que tengo nuestras edades sumarán 54 años" ¿Cuál es la suma de las edades actuales de María y Néstor?***

A) 45 años **B)** 43 años **C)** 42 años
D) 41 años **E)** 40 años

7. ***Norma le dice a Mabel: "La suma de nuestras edades es 46 años y tu edad es el triple de la edad que tenías cuando yo tenía el triple de la edad que tuviste cuando yo nací". Entonces Mabel tiene actualmente:***

A) 12 años **B)** 34 años **C)** 48 años
D) 24 años **E)** 30 años

Problemas Resueltos

Problema 1

Hallar dos números cuya suma es S y su diferencia es D.

Resolución

• Sean x e y los números:

La suma es S: $x + y = S$ (1)

La diferencia es D: $x - y = D$ (2)

Sumando (1) + (2): $2x = S + D$

Dividiendo ÷2 : $\boxed{x = \frac{S+D}{2}}$

Restando (1) – (2):

$$(x + y) - (x - y) = S - D$$

Eliminando los paréntesis:

$$x + y - x + y = S - D$$

Reduciendo: $2y = S - D$

Dividiendo ÷2 : $\boxed{y = \frac{S-D}{2}}$

Ejemplo:

Si $x + y = 40$
$x - y = 30$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{40+30}{2} = \frac{70}{2} = 35 \\ y = \frac{40-30}{2} = \frac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

Problema 2

Resolver el siguiente sistema para $x > y$:

$$x + y = 30 \quad (1)$$

$$xy = 221 \quad (2)$$

Resolución

Por Legendre:

$$(\underbrace{x+y}_{30})^2 - (x-y)^2 = 4\,\underbrace{xy}_{221} \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3):

$$(30)^2 - (x-y)^2 = 4(221)$$

Transponiendo: $900 - 884 = (x-y)^2$

Reduciendo: $16 = (x-y)^2$

¿Qué número elevado al cuadrado nos da 16?
Respuesta: 4 ó –4. Luego:

$x - y = 4$ ó $x - y = -4$;

pero $x > y$, entonces: $x - y = 4$ ... (4)

De (1) y (4):

$$x = \frac{30+4}{2} \quad \wedge \quad y = \frac{30-4}{2}$$

$\boxed{x = 17}$ $\boxed{y = 13}$

Problema 3

Resolver el siguiente sistema:

$$8x + 5y = 60 \qquad (1)$$

$$5x + 8y = 57 \qquad (2)$$

Resolución

Sumando (1) + (2):

$$(8x + 5y) + (5x + 8y) = 60 + 57$$

$$13x + 13y = 117$$

Dividiendo ÷13: $x + y = 9$ (3)

Restando (1) – (2):

$$(8x + 5y) - (5x + 8y) = 60 - 57$$

Efectuando:

$$8x + 5y - 5x - 8y = 3$$

Dividiendo ÷3: $3x - 3y = 3$

$$x - y = 1 \qquad (4)$$

De (3) y (4):

$$x = \frac{9+1}{2} \quad \wedge \quad y = \frac{9-1}{2}$$

$\boxed{x = 5}$ $\boxed{y = 4}$

Problema 4

Resolver el siguiente sistema para x e y positivos:

$$x - y = 2 \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 = 146{,}5 \qquad (2)$$

Resolución

Por Legendre :

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2) \qquad (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3) :

$$(x+y)^2 + (2)^2 = 2(146{,}5)$$

Reduciendo $(x+y)^2 = 289$

¿Qué número elevado al cuadrado nos da 289?

Respuesta: 17 ó –17. Luego:

$x + y = 17$ ó $x + y = -17$, pero x e y son positivos, entonces: $x + y = 17$ (4)

De (1) y (4):

$$x = \frac{17+2}{2} \quad \wedge \quad y = \frac{17-2}{2}$$

$\boxed{x = 9{,}5}$ $\boxed{y = 7{,}5}$

Problema 5

Resolver el sistema

$$x + y = 30 \qquad (1)$$

$$y + z = 28 \qquad (2)$$

$$x + z = 32 \qquad (3)$$

Resolución

Sumando (1) + (2) + (3) :

$$2x + 2y + 2z = 90$$

Dividiendo $\div 2$: $\underbrace{x + y}_{30} + z = 45$ (4)

(1) en (4) : $30 + z = 45$

$$\boxed{z = 15}$$

(2) en (4) $x + 28 = 45$

$$\boxed{x = 17}$$

(3) en (4): $32 + y = 45 \Rightarrow \boxed{y = 13}$

Problema 6

Resolver el sistema:

$$3x = 4y \qquad (1)$$

$$13x + 7y = 375 \qquad (2)$$

Resolución

De (1) : $3x = 4y$

Transponiendo : $\dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{3}$ $\begin{cases} x = 4k \\ y = 3k \end{cases}$ (3)

(3) en (2) : $13(4k) + 7(3k) = 375$

$$52k + 21k = 375$$

$$73k = 375$$

$$k = \frac{375}{75} \Rightarrow \boxed{k = 5}$$

$k = 5$ en (3) : $x = 4(5) \Rightarrow \boxed{x = 20}$

$y = 3(5) \Rightarrow \boxed{y = 15}$

Problema 7

Un señor acudió al cine, acompañado de su esposa e hijos. Cuando se disponía a comprar entradas de S/. 85, se percató que le iba a faltar S/. 55, por lo que decidió comprar entradas de S/. 60 y le sobró todavía para 2 entradas. ¿Cuántos hijos tiene este señor y de cuánto dinero disponía, para el cine?

Resolución

• Sea x el número de personas e y el dinero que tenía.

• Si comprara entradas de S/. 85 gastaría $85x$, pero para ello le falta S/. 55, entonces lo que tiene es: $y = 85x - 55$ ... (1)

• Si compró entradas de S/. 60 gastó $60x$ y aún le sobró para 2 entradas, o sea $2(60) = 120$; entonces lo que tiene es:

$$y = 60x + 120 \quad \text{... (2)}$$

• Igualando (1) y (2):

$$85x - 55 = 60x + 120$$

• Y resolviendo: $\boxed{x = 7}$

• Sustituyendo x en (2):

$$y = 60(7) + 120$$

$$\boxed{y = 540}$$

• Como son **7** personas, entonces tiene **5** hijos, y la suma con que contaba: **S/. 540.**

Rpta: 5 y 540

Problema 8

Una señora compró cierto número de objetos por la suma de S/. 120. Si por cada objeto hubiera pagado 2 soles menos, habría comprado 3 objetos más por la misma suma. ¿Cuántos objetos compró?

Resolución

• Sea x el número de objetos e y el precio de cada uno

• El gasto en x objetos a S/. y cada uno es:

$$xy = 120 \quad \text{... (1)}$$

• Si comprara a S/. $(y - 2)$ cada objeto, compraría $(x + 3)$ objetos por la misma suma, entonces: $(x + 3)(y - 2) = 120$ ... (2)

• Igualando (1) y (2): $xy = (x + 3)(y - 2)$

• De donde: $xy = xy - 2x + 3y - 6$

• Pasando al 1er miembro:

$$2x - 3y + 6 = 0$$

• Multiplicando por x:

$$2x^2 - 3xy + 6x = 0$$

• Sustituyendo xy por 120:

$$2x^2 - 3(120) + 6x = 0$$

• Factorizando:

$$(x + 15)(x - 12) = 0$$

$$\boxed{x = 12}$$

Rpta: 12

Problema 9

Un carpintero vendió 3 sillas más que mesas; pero tanto en las sillas como en las mesas, obtuvo lo mismo. ¿Cuántos muebles vendió, si las mesas cuestan S/. 360 más que las sillas y recaudó S/. 9600 en total?

Resolución

	#Muebles	Precio	Valor
Mesas	x	$y + 360$	$x(y + 36)$
Sillas	$x + 3$	y	$(x + 3)y$
Total			S/. 9 600

• Como tanto en sillas como en mesas, obtuvo la misma suma:

$$x(y + 360) = (x + 3)y = \frac{9600}{2} \quad \ldots (1)$$

• Tomando la 1ra igualdad:

$$x(y + 360) = (x + 3)y$$

• Efectuando y simplificando:

$$120x = y \quad \ldots (2)$$

• Sustituyendo este valor en la 2da igualdad de (1):

$$(x + 3)(120x) = \frac{9600}{2}$$

• Simplificando y ordenando:

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

• Factorizando:

$$(x + 8)(x - 5) = 0$$

$$\boxed{x = 5}$$

Luego vendió 5 mesas y 8 sillas, que hacen 13 muebles.

Rpta: 13

Problema 10

Un ganadero compró 30 caballos más que vacas y tantos cerdos como vacas y caballos juntos; pagando por las vacas el doble que por los caballos, además por 2 vacas pagó tanto como por 7 cerdos y gastó lo mismo tanto en vacas como en cerdos. ¿Cuántos animales compró?

Resolución

Haciendo un cuadro con los datos:

	# Animales	Precio	Valor
Vacas	v	$2c$	$2cv$
Caballos	$v + 30$	c	$c(v + 30)$
Cerdos	$2v + 30$	d	$d(2v + 30)$

• Por dos vacas pagó tanto como por 7 cerdos:

$$2(2c) = 7d$$

$$\frac{c}{d} = \frac{7}{4} \quad \begin{cases} c = 7k \\ d = 4k \end{cases}$$

• Gastó lo mismo tanto en vacas como en cerdos: $2cv = d(2v + 30)$

• Reemplazando c y d:

$$2(7k)v = 4k(2v + 30)$$

• Resolviendo: $v = 20$

vacas: $v = 20$

caballos: $v + 30 = 50$

cerdos: $20 + 50 = 70$

Total = 140

Rpta: 140

Problema 11

Treinta obreros se comprometieron realizar una obra en 40 días trabajando 8 horas diarias; pero luego de trabajar 10 días, se decidió terminar la obra 10 días antes, por lo que se contrataron más obreros y trabajaron 2 horas más por día. ¿Cuántos obreros se contrataron?

Resolución

• El número de horas de trabajo que requiere toda la obra es **30×8×40 = 9 600** horas.

• En los 10 primeros días se invirtieron **30×80 = 2400** horas de trabajo

• Como deben terminar 10 días antes, les queda solamente 20 días. En estos días trabajaron $(30 + x)$ obreros, **8 + 2 = 10** horas diarias, que hacen $(30 + x)(10)(20)$ horas de trabajo.

• Entonces: $9600 = 2400 + 200(x + 30)$

• Resolviendo: $x = 6$

Rpta: 6

Problema 12

Ochocientos soldados se encuentran en un frente con víveres para 60 días. A los 8 días sufren un ataque y mueren 50 soldados y 12 días más tarde sufren otro ataque con una baja de 100 soldados; 16 días después del último ataque reciben un refuerzo sin víveres, de modo que los víveres alcanzaron para 5 días más. ¿De cuántos soldados estaba constituido el refuerzo?

Resolución

• # total de raciones:

$$800 \times 60 = 48\,000$$

• Los primeros 8 días consumen:

$$800 \times 8 = 6\,400$$

• Los siguientes 12 días consumen:

$$750 \times 12 = 9\,000$$

• Los siguientes 16 días consumen:

$$650 \times 16 = 10\,400$$

• En los últimos 30 días consumen:

$$(650 + x)\,30$$

Luego: $48\,000 = 6\,400 + 9\,000 + 10\,400 + (650 + x)30$

$$48\,000 - 25\,800 = (650 + x)30$$

$$\Rightarrow \quad x = 90$$

Rpta: 90

Problema 13

Hace 12 años las edades de 2 hermanos estaban en la relación de 4 a 3; actualmente sus edades suman 59 años. ¿Dentro de cuántos años sus edades estarán en la relación de 8 es a 7?

Resolución

• Sea dentro de T años, que sus edades están en relación de 8 es a 7.

	Hace 12 años	Ahora	Dentro de "t" años
A	$4k$	$4k + 12$	$4k + 12 + t$
B	$3k$	$3k + 12$	$3k + 12 + t$
	$\frac{A}{B} = \frac{4}{3}$ ...(I)	$A + B = 59$ ... (II)	$\frac{A}{B} = \frac{8}{7}$ ...(III)

• **Según la condición (II):**

$$(4k + 12) + (3k + 12) = 59 \quad \Rightarrow \quad k = 5$$

• **Según la condición (III):**

$$\frac{4k+12+t}{3k+12+t}=\frac{8}{7} \Rightarrow \frac{4(5)+12+t}{3(5)+12+t}=\frac{8}{7} \Rightarrow \quad t=8$$

Rpta.: dentro de 8 años

Problema 14

Carmen le pregunta a Susy sobre los años que tiene, entonces Susy le responde: "tengo el doble de la edad que tú tenías, cuando yo tenía la edad que tienes", ¿cuál es la edad actual de Susy, sabiendo además, que dentro de 6 años sus edades sumarán 68 años?

Resolución

	tenía, tenías	tengo, tienes	dentro de 6 años
Susy (yo)	y ↘ ↙ $2x$		$2x + 6$
Carmen (tú)	x ↗ ↖ y		$y + 6$
			yo + tú = 68 (I)

• Del pasado y presente:

$$2x + x = y + y$$
$$\Rightarrow \quad 3x = 2y \qquad (1)$$

• De la condición (I):

$$(2x + 6) + (y + 6) = 68$$
$$\Rightarrow \quad 2x + y = 56 \qquad (2)$$

• Multiplicando por 2 la ecuación (2) tenemos:

$$4x + 2y = 112 \qquad (3)$$

Reemplazando (1) en (3):

$$4x + 3x = 112$$
$$x = 16$$

Actualmente Susy tiene:

$$2x = 32 \text{ años}$$

Rpta.: 32 años

Problema 15

Saúl le dice a Erik: "tengo el triple de la edad que tú tenías, cuando yo tenía la mitad de la edad que tienes y cuando tengas la edad que tengo, yo tendré el doble de la edad que tenías hace 12 años. ¿Cuántos suman sus edades actuales?

Resolución

	tenía, tenías	tengo, tienes	tendré, tendrás
Saúl (yo)	y ←	$3x$ ←	$2(2x - 12)$
Erik (tú)	x ←	$2y$ ←	$3y$

El tiempo transcurrido es el mismo para ambos, por consiguiente, la diferencia entre la edad del presente y el pasado, para cada uno es la misma. Igualmente la del futuro con la del presente.

•
$$3x - y = 2y - x$$
$$\Rightarrow \quad 4x = 3y \qquad (1)$$

•
$$2(2y - 12) - 3x = 3x - 2y$$
$$\Rightarrow \quad 6y - 6x = 24$$
$$3y - 3x = 12 \qquad (2)$$

• Sustituyendo (1) en (2):

$$4x - 3x = 12$$
$$\boxed{x = 12}$$
$$\boxed{y = 16}$$

Actualmente Saúl, tiene $3x = 36$ años y Erik $2y = 32$ años.

Luego la suma de sus edades es: **36 + 32 = 68** años.

Rpta.: 68 años

Problemas Propuestos

1. *La suma de tres enteros consecutivos es 342. Hallar el menor de los números.*

   A) 113 B) 114 C) 115
   D) 116 E) 117

2. *¿Cuál es el número impar que agregando a los 4 impares que le siguen dan un total de 845?*

   A) 161 B) 163 C) 165
   D) 167 E) 169

3. *Rosa recibió 20 soles y tuvo entonces 5 veces lo que hubiera tenido si hubiera perdido 20 soles ¿Cuánto tenía al principio?*

   A) S/. 24 B) S/. 25 C) S/. 28
   D) S/. 30 E) S/. 35

4. *Hallar la edad de un padre, sabiendo que hace 8 años la edad del padre fue el cuádruple de la de su hijo y que dentro de 12 años solamente será el doble.*

   A) 45 B) 48 C) 50 D) 52 E) 54

5. *La suma de dos números es igual a los 5/4 del primero, aumentados en los 49/64 del segundo. Hallar el mayor de ellos si la diferencia entre ellos es 3.*

   A) 16 B) 32 C) 48 D) 64 E) 36

6. *Se sabe que una manzana y una naranja cuestan S/. 0,5 entre las dos. Sabiendo que 6 naranjas cuestan tanto como 4 manzanas. ¿Cuánto cuestan 8 manzanas?*

   A) S/. 1,60 B) S/. 1,80 C) S/. 2,40
   D) S/. 2,80 E) S/. 3,60

7. *Si compro 7 cuadernos y 3 lapiceros gasto S/. 4,4 y mientras que si compro 7 lapiceros y 3 cuadernos gasto 3,6 soles. ¿Cuánto se gasta comprando 2 lapiceros y un cuaderno?*

   A) S/. 1,1 B) S/. 1,0 C) S/. 1,2
   D) S/. 1,3 E) S/. 1,4

8. *Una persona divide el dinero que tiene en el bolsillo entre 100, obteniendo un entero n, luego da "n" monedas de 10 soles a un mendigo quedándose con 720 soles. ¿Cuánto tenía en el bolsillo?*

   A) S/. 740 B) S/. 860 C) S/. 730
   D) S/. 900 E) S/. 800

9. *Una señora pesa 90 kg más 1/10 del peso de su hija, y la hija pesa 90 kg más 1/10 del peso de la señora. ¿Cuánto pesan las 2 juntas?*

   A) 200 kg B) 180 kg C) 190 kg
   D) 185 kg E) 199 kg

10. *A un número le quito A y el número aumenta en 4. ¿Cuánto debo aumentar a A para convertirlo en su mitad?*

    A) 1 B) 2 C) 4
    D) –2 E) Absurdo

11. *Si subo una escalera de 4 en 4 doy 3 pasos más que subiendo de 5 en 5. ¿Cuántos escalones tiene la escalera?*

    A) 40 B) 15 C) 30 D) 60 E) 120

12. *De los loritos que tenía doña Lola, se le murieron todos menos los que se murieron. ¿Cuántos quedaron vivos?*

    A) Todos B) Ninguno
    C) La mitad D) Faltan datos
    E) Imposible

13. Si compro 4 docenas de objetos, me sobran S/. 27,40; pero para comprar 5 docenas me faltan S/. 17. ¿Cuánto cuesta cada objeto?

A) S/. 3,7 **B)** S/. 5,4 **C)** S/. 4,2
D) S/. 5,7 **E)** S/. 6,3

14. Si: $(r+\frac{1}{r})^2 = 3$ ***entonces:*** $(r^3+\frac{1}{r^3})^2$ ***es igual a:***

A) 1 **B)** 2 **C)** 3
D) 0 **E)** No es posible calcular

15. Un grupo de clavos se divide en 3 grupos que son proporcionales a 5,7 y 11 respectivamente. Si del 3er grupo paso al 2do 8 clavos, en el 3ro habrán doble que en el primero. ¿Cuántos clavos habrán en el 2do grupo?

A) 50 **B)** 56 **C)** 64 **D)** 72 **E)** 80

16. Si a un número le sumo 4 y lo divido entre otro, resulta 12; en cambio si a dicho número le sumo el otro, obtengo 191. ¿Cuál es el número mencionado?

A) 50 **B)** 15 **C)** 176 **D)** 167 **E)** 60

17. Con motivo de la Navidad, los hijos de Toribio decidieron darle un regalo a éste. César propuso dar cada uno 50 soles, pero faltó 50 soles para el regalo, por lo que decidieron aportar cada uno 80 soles; de esta manera aún sobró S/. 100 después de comprar el regalo. ¿Cuál el precio del regalo?

A) S/. 300 **B)** S/. 350 **C)** S/. 250
D) S/. 400 **E)** S/. 50

18. En una reunión hay tantas parejas bailando como hombres parados y 30 mujeres no bailan. Si las personas que no bailan es el triple de las mujeres que bailan y además, hay 10 hombres más bailando que sentados. ¿Cuántos hombres bailan?

A) 10 **B)** 20 **C)** 30 **D)** 40 **E)** 50

19. En una reunión 1/5 de los asistentes son hombres, luego llegaron un número de personas igual al de la mujeres presentes, incrementándose el números de hombres en 30 y hay entonces un número de mujeres que excede al de los hombres en un número igual al de las mujeres inicialmente presente. Hallar el número de personas actualmente presentes.

A) 20 **B)** 180 **C)** 20 **D)** 220 **E)** 240

20. En una reunión donde hay n personas, el número de hombres excede en 10 al de las mujeres. ¿Cuántas mujeres hay en la reunión?

A) $\frac{n+10}{2}$ **B)** $2n$ **C)** $n-10$

D) $\frac{n-10}{2}$ **E)** $n-5$

21. Se reparte una cantidad en 3 partes, tales que cada parte es el doble del anterior. La parte mayor excede a la menor en tantas unidades como exce-de 100 a la parte intermedia. ¿Cuál es la cantidad repartida?

A) 60 **B)** 80 **C)** 120
D) 140 **E)** 160

22. Semanalmente un padre reparte S/. 72 de propina entre sus dos hijos; pero en una oportunidad por equivocación dio al menor la parte del mayor y viceversa. Entonces, para corregir el error, el menor tuvo que entregar al mayor S/. 24 ¿Cuánto recibe semanalmente el mayor?

A) S/. 48 **B)** S/. 50 **C)** S/. 54

D) S/. 60 E) S/. 64

23. En 2 habitaciones hay un total de 90 focos, de los cuales hay un cierto número de focos prendidos. Luego se prenden tantos focos como el número de focos prendidos excede al de los apagados; resultando el número de focos prendidos el doble de los apagados. ¿Cuántos estaban prendidos inicialmente?

A) 50 B) 40 C) 45 D) 55 E) 60

24. Un alambre se divide en 5 partes iguales; con las 4 partes se forma un cuadrado y con la última un triángulo equilátero, resultando el área del cuadrado numéricamente igual a un lado del triángulo. La longitud del alambre es:

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{5}{2}$

25. En un triángulo isósceles, la altura relativa a la base mide 2 cm más que la base y 1 cm menos que uno de los lados iguales. ¿Cuál es el área del triángulo?

A) 120 cm^2 B) 150 cm^2 C) 60 cm^2
D) 72 cm^2 E) 48 cm^2.

26. Se tiene 3 objetos A, B y C de distinto peso; A y B pesan juntos 40 gramos B y C juntos pesan 30 gramos y A y C juntos pesan 60 gramos. ¿Cuánto pesa el objeto menos pesado?

A) 15 g B) 25 g C) 5 g
D) 35 g E) 10 g

27. ¿Cuántas patas de gallinas se pueden contar en un corral, donde hay 90 gallinas más 1/10 del número de gallinas?

A) 90 B) 100 C) 180
D) 200 E) 120

28. En una asamblea, todos deben votar a favor o en contra de una moción. En una primera rueda, los que votaron en contra ganaron por 20 votos; en una segunda vuelta se aprobó la moción por una diferencia de 10 votos. ¿Cuántos asambleístas cambiaron de opinión?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

29. Luisa tiene "a" animalitos entre loritos y monitos; si entre los animales que tiene, se puede observar "p" patas. ¿Cuántos loritos tiene?

A) 4a – p B) $\frac{2a-p}{2}$ C) $\frac{4a-p}{2}$

D) $\frac{4p-a}{2}$ E) $\frac{4a+p}{2}$

30. Un comerciante hizo un pedido de cuadernos de 50 y 100 hojas por un valor de S/. m, pagando S/. b por cada cuaderno de 100 hojas y S/. a, por los de 50 hojas. Recibió el número pedido de cuaderno pero por un valor de S/. n, (n < m). ¿Cuántos cuadernos de 100 hojas de menos ha recibido?

A) $\frac{m-n}{b-a}$ B) $\frac{m+n}{b+a}$ C) $\frac{m-n}{b+a}$

D) $\frac{m-n}{ba}$ E) $(b-a)(m-n)$

31. La suma de dos números menos 15 unidades es igual a 2 veces la diferencia y cuando se suman 10 unidades a la suma, se obtiene 3 veces la diferencia. El mayor de los números es:

A) 40 B) 45 C) 65 D) 35 E) 25

32. Cuando le preguntan a Jaimito por el número de hermanos, responde: "El

número de mis hermanos excede al de mis hermanas en 2, además si tuviera una hermana menos, el número de mis hermanas sería la mitad del número de mis hermanos". ¿Cuántas hermanas tiene Jaimito?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

33. Jesús da a su hijo tantos céntimos como soles tiene en el bolsillo y se queda con 396 soles. ¿Cuántos soles tenía en el bolsillo?

A) S/. 400 **B)** S/. 360 **C)** S/. 310
D) S/. 320 **E)** S/. 410

34. En una reunión se cuentan tantos caballeros como tres veces el número de damas; después que se retiran 8 parejas, el número de caballeros que aún quedan, es igual a 5 veces el de damas. ¿Cuántos caballeros habían inicialmente?

A) 16 **B)** 32 **C)** 48 **D)** 64 **E)** 72

35. En una fiesta se observa 8 mujeres sentadas y tantas parejas bailando como hombres sentados. En la siguiente pieza se observa que todas las mujeres se encuentran bailando y 8 hombres se encuentran sentados. ¿Cuántas personas hay en la fiesta?

A) 56 **B)** 52 **C)** 48 **D)** 16 **E)** 32

36. Un grupo de 60 soldados se dividen en 2 batallones. Si del primer batallón se retiran 12 soldados, en el segundo habrían 10 soldados más que en el primero. ¿Cuántos soldados correspondió a cada batallón?

A) 30; 30 **B)** 31; 29 **C)** 32; 28
D) 33; 27 **E)** 35; 15

37. Se compraron "n" lapiceros de a soles y de b soles. Si se compraran 2 lapiceros más de a soles, el gasto aumentaría en su n-ésima parte. ¿Cuántos lapiceros de b soles se compraron?

A) $\frac{an}{a-b}$ **B)** $\frac{an}{b-a}$ **C)** $\frac{n}{b-a}$

D) $\frac{n}{a-b}$ **E)** $\frac{bn}{a-b}$

38. Un árbol crece anualmente 3 metros durante los 5 primeros años y 2 metros cada año siguiente. La ecuación que representa la longitud L del árbol en un tiempo de t años en: (t > 5)

A) $L = 3 + 2t$ **B)** $L = 15 + 2(t - 5)$
C) $L = 15 + 2t$ **D)** $L = 15 + 2(t + 5)$
E) $L = 15 - 2t$

39. Hace 5 minutos, la cantidad de minutos que habían pasado desde las 8 a.m. era 15 veces el número de meses que han pasado del año. Si la cantidad de minutos que han pasado desde las 8 a. m. hasta el momento, excede en 117 a los meses transcurridos del año. ¿Qué hora es?

A) 8:06 a.m. **B)** 8:10 a.m.
C) 10:05 a.m. **D)** 10:10 a.m.
E) 10:08 a.m.

40. De dos cajas que contienen lapiceros, el segundo contiene el doble que el primero; cuando de ambos se sacan igual número de lapiceros, lo que contiene el segundo es el triple de lo que contiene el primero. Si agregamos 27 lapiceros a lo que quedó en el primero, obtendríamos tantos lapiceros como tenía el segundo al principio. ¿Cuántos lapiceros contenía al principio la primera caja?

A) 9 **B)** 24 **C)** 18 **D)** 27 **E)** 12

41. Se tiene tres grupos de clavos, cuyas

cantidades son número consecutivos crecientes; si del segundo y del tercero se pasan al primero igual número de clavos, resulta que lo que hay ahora en el primero y lo que queda en el tercero están en la relación de 14 a 9 y lo que queda en el segundo con el tercero, en la relación de 17 a 18. ¿Cuántos clavos hay ahora en el primero?

A) 20 **B)** 21 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 28

42. Un señor, diariamente de Lunes a Sábado, se dedica a visitar colegios. Por visitar colegios particulares gana S/. 20 más que por visitar colegios nacionales. En 5 semanas ha ganado S/. 350 ¿Cuántos colegios nacionales ha visitado, sabiendo que por visitar 4 colegios particulares gana S/. 50 más que por visitar 10 colegios nacionales?

A) 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 20

43. Una persona en el mes de Mayo suma a los años que tiene los meses que ha vivido, obteniendo 381. ¿En qué mes nació dicha persona?

A) Diciembre **B)** Enero
C) Febrero
D) Abril **E)** Mayo

44. El número de soles que pagué por cada caramelo más el número de caramelos que compré hacen un total de 25. Si en la compra gasté S/. 156 ¿cuánto cuestan 10 caramelos?

A) S/. 120 **B)** S/. 130
C) S/. 120 ó S/. 130
D) S/. 140 **E)** S/. 120 ó S/. 140

45. En una reunión habían 5 hombres más que mujeres, luego llegaron un grupo de personas cuyo número es igual al de los hombres inicialmente presentes, de modo que en la reunión todos están en parejas y hay 50 hombres en total. Hallar el número de mujeres inicialmente presentes.

A) 20 **B)** 25 **C)** 30 **D)** 32 **E)** 35

46. Por el día de la madre, tres hermanos acordaron regalar un perfume a su mamá, aportando de menor a mayor cantidades que están en progresión aritmética, resultando el aporte total el cuádruple de lo aportado por el menor. ¿Cuánto costó el perfume, sabiendo que si hubiera un cuarto hermano mayor, el intermedio hubiera aportado S/. 3,00 menos?

A) S/. 24,00 **B)** S/. 30,00 **C)** S/. 36,00
D) S/. 48,00 **E)** S/. 60,00

47. Una familia acordó preparar tamales para el día del Trabajador, para ello se sacó un presupuesto, lo cual se cubriría en partes iguales por los miembros de la familia; pero al realizar las compras se gastó S/. 240,00 por lo que cada miembro tenía que aportar S/. 6 más de lo previsto, entonces 3 de ellos acordaron no participar, por lo tanto los restantes tuvieron que aportar el doble de lo previsto, para cubrir el gasto. ¿De cuántas personas consta la familia?

A) 8 **B)** 15 **C)** 8 ó 15
D) 10 ó 16 **E)** 12 ó 18

48. ¿En qué tiempo harían A, B, C un trabajo, juntos, si A solo puede hacerlo en seis horas más, B solo en una hora mas, y C solo en el doble de tiempo?

A) 38 min **B)** 39 min **C)** 40 min
D) 41 min **E)** 42 min

49. Un empresario contrató a dos teno

res A y B. A recibió 5120 soles y B, que cantó en tres funciones menos, 2 000 soles. Después se les contrató de nuevo, figurando A con las funciones que había trabajado B y recíprocamente y recibieron la misma cantidad. ¿Cuánto cobró por función cada uno de los tenores?

A) 640 soles y 600 soles
B) 600 soles y 400 soles
C) 640 soles y 400 soles
D) 500 soles y 450 soles
E) 650 soles y 420 soles.

50. Hallar 2 números tales que su suma multiplicada por la suma de sus cuadrados sea 5 500, y su diferencia multiplicada por la diferencia de sus cuadrados sea 352.

A) 12,8 **B)** 13,7 **C)** 13,9
D) 12,9 **E)** 13,5

51. Hace 2 años tenía la cuarta parte de la edad que tendré dentro de 52 años. ¿Dentro de cuántos años tendré el doble de la edad que tenía hace 5 años?

A) 10 años **B)** 20 años **C)** 30 años
D) 40 años **E)** 50 años

52. La edad que tendrá Pablo dentro de 15 años y la edad que tenía hace "x" años están en la relación de 17 es a 11; mientras que la edad que tendrá dentro de "x" años y la edad que tenía hace 10 años están en la relación de 3 es a 2. Hallar "x"

A) 1 **B)** 6 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 5

53. Una ciudad fue fundada en el siglo XX. En el año que se escribe con las mismas cifras del año de su fundación pero con las 2 últimas cifras invertidas, celebraron tantos años como la suma de sus 2 últimas cifras del año de su fundación. ¿Cuántos años celebraron en aquella fecha?

A) 7 años **B)** 9 años **C)** 12 años
D) 15 años **E)** 17 años

54. Hace 10 años tenía la mitad de la edad que tendré dentro de 8 años. Dentro de cuántos años tendré el doble de la edad que tuve hace 8 años?

A) 10 años **B)** 12 años **C)** 14 años
D) 16 años **E)** 8 años

55. Dentro de 10 años, la edad de un padre será el doble de la edad de su hijo. ¿Cuál es la edad actual del hijo, si hace 2 años, la edad del padre era el triple de la de su hijo?

A) 20 años **B)** 15 años **C)** 16 años
D) 18 años **E)** 14 años

56. Las edades actuales de dos amigos son entre sí como 7 es a 5, pero hace 4 años estaban en la relación de 3 es a 2. ¿Dentro de cuántos años sus edades estarán en la relación de 9 a 7?

A) 4 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

57. La suma de las edades actuales de 2 hermanos es 60 años, dentro de 5 años el mayor tendrá el doble de la edad que tenía el menor hace 5 años. Hallar la suma de cifras de la edad actual del mayor.

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

58. La diferencia de los cuadrados de las edades de Mary y Lucy es 49; si Mary le lleva por un año a Lucy, ¿cuántos años deben transcurrir para que la edad de Lucy sea un cuadrado perfecto por segunda vez?

A) 1 año **B)** 5 años **C)** 10 años
D) 12 años **E)** 15 años

59. Actualmente Susy tiene 36 años y Laura tiene 24 años. Laura afirma que se casará cuando transcurran tantos años, como los transcurridos del año que terminó su secundaria. La suma de las edades de Susy y Laura en el año que se case ésta última y la suma de las edades que tenían cuando Laura terminó su secundaria, son entre sí como 19 es a 11. ¿A qué edad piensa casarse Laura?

A) A los 20 años **B)** A los 24 años
C) A los 28 años
D) A los 30 años **E)** A los 32 años

60. Cuando a Manuel se le pregunta por la edad de su hermana Susy, responde: "Cuando yo tenía 14 años, mi hermana tenía la mitad de la que tenía mi padre, actualmente sucede igual con mi edad y la edad actual de mi padre; en cambio hace 16 años mi edad era la mitad de la edad que tenía mi hermana". ¿Cuántos años tiene Susy?

A) 20 **B)** 13 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 18

61. Las edades actuales de 3 hermanos forman una progresión aritmética. Cuando el menor tenga la edad actual del mayor, éste tendrá el doble de la edad que tenía el menor hace 2 años y cuando el segundo tenía la edad actual del menor, las edades de los otros 2 estaban en la relación de 3 a 2. ¿Cuántos años tiene actualmente el mayor?

A) 20 años **B)** 24 años **C)** 26 años
D) 28 años **E)** 32 años

62. La edad actual de un padre es el doble de la suma de las edades de sus 2 hijos. Hace 6 años la edad del padre era el triple de la suma de las edades que tenían sus 2 hijos. ¿Dentro de cuántos años la suma de las edades de los 3 será el doble de la edad actual del padre?

A) 4 años **B)** 6 años **C)** 8 años
D) 10 años **E)** 12 años

63. La edad actual de Luis y la de Nino son entre sí como 9 es a 8. Cuando Nino tenga la edad que tiene ahora Luis, éste tendrá el doble de la edad que tenía Nino hace 18 años. ¿Cuál es la diferencia de sus edades?

A) 6 años **B)** 5 años **C)** 4 años
D) 3 años **E)** 10 años

64. Cuando Augusto le preguntó a Rubén por la edad que tenía, éste respondió: Tengo el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la mitad de la edad que tienes y cuando tengas la edad que tengo, tendré tanto como tendrás dentro de 8 años". La edad de Rubén es:

A) 32 años **B)** 34 años **C)** 36 años
D) 40 años **E)** 72 años

65. La edad que tendrá una persona dentro de cierto número de años y la edad que tenía hace ese mismo número de años suman 36 años. Sabiendo esto, determinar, hace cuántos años tenía el triple de la edad que tenía hace 13 años.

A) Hace 2 años **B)** Hace 3 años
C) Hace 4 años
D) Hace 5 años **E)** Hace 6 años

66. Una persona nacida en el siglo XX, tiene en 1988, tantos años como la suma de cifras del año de su nacimiento. ¿Cuántos años cumplió en el año 2000?

A) 30 años **B)** 32 años **C)** 34 años
D) 22 años **E)** 26 años

CLAVES DE RESPUESTAS

PÁGINA 252 - 253	1	2	3	4	5	6	7	8
	C	A	B	C	D	E	D	C
	9	10	11					
	B	D	E					

PÁGINA 256 - 257	1	2	3	4	5	6	7	
	i	*ii*	E	C	C	B	E	

PÁGINA 271 - 272	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	C	B	B	B	C	C	A
	9							
	C							

PÁGINA 273	1	2	3	4	5	6	7	
	B	A	C	D	D	E	B	

PÁGINA 277 - 278	1	2	3	4	5	6	7	
	B	B	B	E	C	C	D	

PROBLEMAS PROPUESTOS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	D	B	C	C	A	E	A	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	C	A	D	C	C	A	B	A	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	A	A	D	C	C	D	B	C	A
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	C	A	C	A	B	B	B	C	B
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
E	E	B	C	C	A	C	C	C	C
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A	D	B	B	E	C	D	D	E	A
61	62	63	64	65	66				
D	D	A	C	B	C				

i

1. –7; 4
2. 15; –2
3. –60; 40
4. 18; 2
5. 18; 17
6. 19; 13
7. 18; –14
8. 36; 24
9. –18; 16
10. 36; –24
11. 5; 2/3
12. 3,5; –1,2
13. 0,375; 1/7
14. 0,375; 5/6
15. 0,375; 5/3
16. 1,75; 5/6
17. –1,2; 1,125
18. –5/6; 0,3
19. –1,8; 1,75
20. 0,625; –7/9
21. $-1 \pm \sqrt{3}$
22. $-2 \pm \sqrt{5}$
23. $4 \pm \sqrt{2}$
24. $3 \pm \sqrt{2}\,i$
25. $-5 \pm 6i$
26. $-1{,}5 \pm i$
27. $\dfrac{-5 \pm \sqrt{19}}{5}$
28. $\dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$
29. $\dfrac{1 \pm \sqrt{2i}}{3}$
30. $\dfrac{1 \pm \sqrt{14}}{5}$

ii

31. $x^2 - 10x + 21 = 0$
32. $x^2 - 2x - 48 = 0$
33. $x^2 + 22x + 120 = 0$
34. $x^2 - x - 42 = 0$
35. $x^2 - 2x - 2 = 0$
36. $x^2 + 4x - 1 = 0$
37. $x^2 - 10x + 22 = 0$
38. $x^2 - 4x + 7 = 0$
39. $x^2 + 10x + 27 = 0$
40. $x^2 - 2x + 4 = 0$
41. $15x^2 - 19x + 6 = 0$
42. $42x^2 - 23x - 10 = 0$
43. $15x^2 + 59x + 56 = 0$
44. $9x^2 - 48x + 59 = 0$
45. $16x^2 - 40x + 28 = 0$

Georg Friedrich Bernhard Riemann
(1826 – 1866)

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Nació el 17 de Septiembre de 1826 en Breselenz, Hannover (Ahora Alemania).

Las ideas de Riemann concernientes a la geometría del espacio tuvo profundos efectos en el desarrollo de la teoría física moderna. Clarificó la noción de Integral, definiendo lo que ahora llamamos Integral de Riemann.

Riemann se trasladó de Gottingen en Berlín el año 1846 para estudiar bajo la enseñanza de **Jacobi**, Dirichlet y **Eisenstein**. El año 1849 retornó a Gottingen y su tesis supervisada por **Gauss** fue presentada en el año 1851.

En su informe de la tesis Gauss describe a Riemann como alguien que tenía una fácil y gloriosa originalidad.

Con las recomendaciones de Gauss, Riemann fue nominado para un puesto en Gottingen.

Los escritos de Riemann de 1854 llegaron a ser un clásico en las matemáticas y estos resultados fueron incorporados dentro de la teoría de la relatividad y gravitación de Einstein.

La cátedra de Gauss en Gottingen fue ocupada por Dirichlet en el año 1855 y después de su muerte por Riemann. Aún en esos tiempos sufrió de tuberculosis y estuvo sus últimos años en Italia en un intento por mejorar su salud.

Las ideas de Riemann concernientes a la geometría del espacio tuvo un profundo efecto en el desarrollo de la teoría física moderna y proveía los conceptos y métodos usados después en la Teoría de la Relatividad. Era un original pensador y un anfitrión de métodos, teoremas y conceptos que llevan su nombre.

Las ecuaciones de **Cauchy**-Riemann (conocidas un tiempo antes) y el concepto de la superficie de Riemann aparecen en su tesis de Doctorado.

Falleció el 20 de Julio de 1866 en Selasca, Italia.

6 INECUACIONES

INTRODUCCION

Si comparamos dos números a y b, hay dos posibilidades: que $a = b$ ó que $a \neq b$. En esta sección nos ocuparemos de estudiar el segundo caso, es decir, cuando $a \neq b$. En otras palabras, nos ocuparemos de las desigualdades y todo cuanto tenga que ver con ellas.

Por otro lado, para tener una visión más amplia y una idea gráfica de los números, estudiaremos a éstos ligadas a la recta: así comprenderemos lo que son los intervalos.

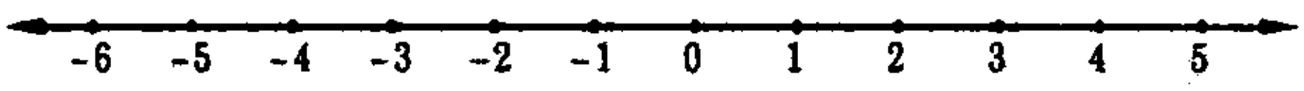
SABERES PREVIOS

- *Debes tener claro lo que son conjuntos y operaciones con los mismos: unión e intersección.*
- *Saber los principales métodos de resolución de ecuaciones.*

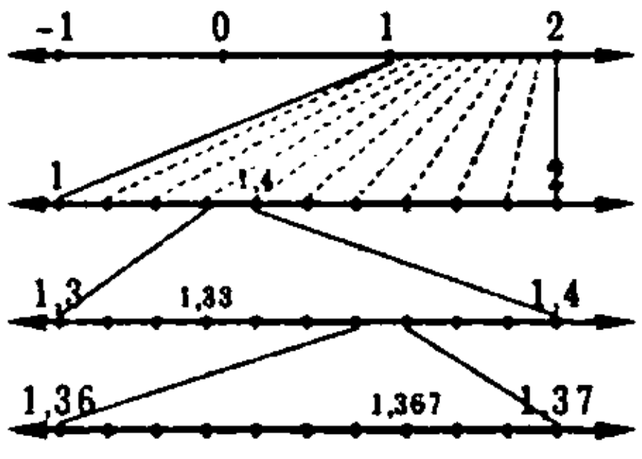
6.1 La Recta Numérica

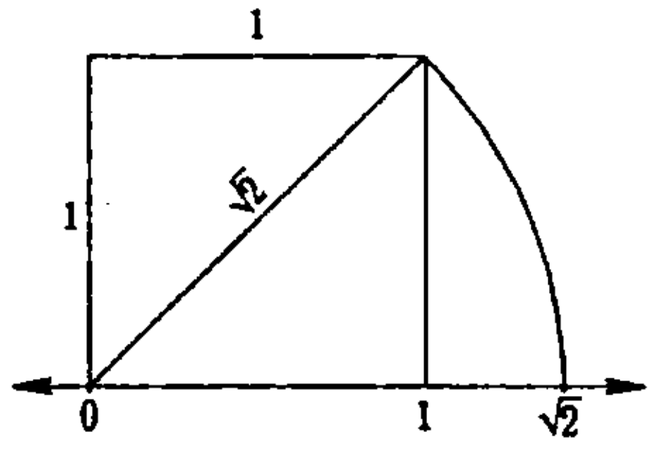
Uno de los grandes saltos en el desarrollo de la matemática fue el hecho de hacer una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre los puntos de una recta y el conjunto de los números reales. Es así como vamos a desarrollar este capítulo.

Tracemos una recta y escojamos un punto al cual le hacemos corresponder el cero y le llamaremos origen (0). A partir de allí, ubicamos puntos equidistantes en una longitud u y a cada uno le asignamos los números enteros.

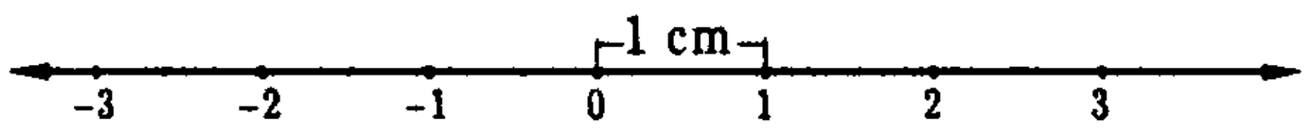


En esta recta numérica, es posible graficar cualquier número real, sea cual sea: negativo, entero, fraccionario o irracional, por más grande o pequeño que sea.





6.1.1 Distancia de un punto al origen. Valor absoluto.



En este caso $u = 1$ cm. Al punto A le corresponde –3 y a B, 3; sin embargo, la distancia de ambos puntos al origen es 3 cm. Este 3 es el valor absoluto de –3 y 3 y se denota por $|-3| = 3$ y $|3| = 3$.

El valor absoluto de un número es la distancia que hay entre el punto correspondiente al número y el origen. En caso de que el número sea negativo, para calcular su valor absoluto le anteponemos el signo negativo, de modo

Reto al ingenio 1

¿Suma o resta?

No sabemos si ha sumado o restado. Lo único que hemos averiguado es que Lupita, lógicamente con la "mala" intención de complicarnos la vida, ha realizado una operación o bien de adición o bien de sustracción, eso tienes que averiguarlo, y ha reemplazado los dígitos con las letras de su nombre.

Cuando ella hace estas cosas, tiene la costumbre de reemplazar dígitos diferentes por letras diferentes y nunca ha reemplazado con letras diferentes el mismo dígito en caso que aparezca más de una vez.

$$\begin{array}{r} L\ U\ P\ I \\ \hline U\ A\ L\ L \end{array}$$
$$P\ T\ P\ I$$

Ella duda, falsa ilusión, que puedas descubrir los dígitos que esconde cada letra y restituir la operación, pero yo sé que tú no dejarás que ella se salga con la suya.

que al aplicar la ley de signos: (–)(–) = + se hace positivo

Ejemplo: $|-2| = -(-2) = 2$.

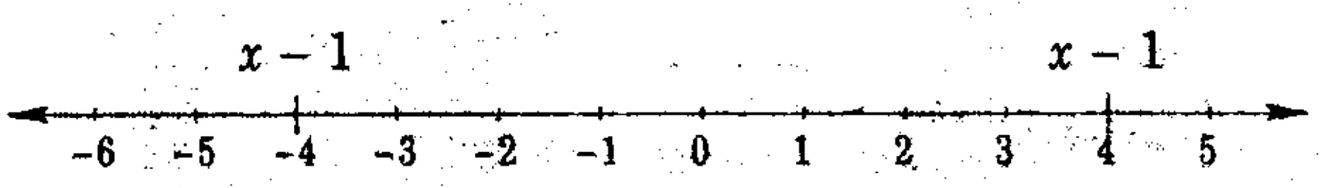
De manera general: $|n| = \begin{cases} n, & si \quad n \geq 0 \\ -n, & si \quad n < 0 \end{cases}$ E1

Problema 1

Hallar el valor de x si $|x-1| = 4$

Resolución

Lo primero es que no sabemos si lo que está dentro de las barras es positivo o negativo. Para resolver tenemos que considerar ambas posibilidades:



• Si $x - 1 = -4 \Rightarrow \boxed{x = -3}$

• Si $x - 1 = 4 \Rightarrow \boxed{x = 5}$

Rpta.: $x = -3$ ***ó*** $x = 5$

Problema 2

Resolver la siguiente ecuación: $|x-3| - 4 = -1$

Resolución

$$|x-3| = -1 + 4 \quad \Rightarrow \quad |x-3| = 3 \qquad ...(1)$$

De (1): $x - 3 = 3 \quad \vee \quad x - 3 = -3$

De donde $\boxed{x = 6} \quad \vee \quad \boxed{x = 0}$

Rpta.: $x = 6$ ***ó*** $x = 0$

Problema 3

Resolver la siguiente ecuación: $||x-3| - 6| = 1$

Resolución

• Si $|x-3| - 6 = 1 \quad \Rightarrow \quad |x-3| = 7 \qquad ...(1)$

De (1): $x - 3 = 7 \quad \vee \quad x - 3 = -7$

$\boxed{x = 10} \quad \vee \quad \boxed{x = -4}$

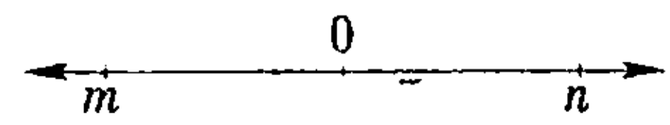
• Si $|x-3| - 6 = -1 \quad \Rightarrow \quad |x-3| = 5 \qquad ....(2)$

De (2): $x - 3 = 5 \quad \vee \quad x - 3 = -5$

$\boxed{x = 8} \quad \vee \quad \boxed{x = -2}$

Rpta.: $x = 10; \quad x = -4; \quad x = 8; \quad x = -2$

Números positivos y negativos



Una vez definido el punto "origen" 0, a la derecha de éste se encuentran los números ***positivos:***

$\boxed{n > 0}$

Y a la izquierda del origen se encuentran los números ***negativos.***

$\boxed{m < 0}$

E1

$|-4| = -(-4) = 4$

$|5| = 5$

$|-100| = -(-100) = 100$

Para resolver ecuaciones con valor absoluto, si

$$|m| = n,$$

entonces $m = n$ *ó* $m = -n$.

Curiosidad

Qué valores puede tomar la función:

$$f(x) = \frac{|x|}{x} + \frac{x}{|x|}; \quad x \neq 0$$

Problemas

1. Resolver la ecuación: $|x + 4| = 1$

A) $x = -5$ ó $x = -2$ **B)** $x = 5$ ó $x = 3$
C) $x = 5$ ó $x = -3$ **D)** $x = -5$ ó $x = -3$
E) $x = 2$ ó $x = 1$

2. Resolver la ecuación: $|x - 4| - 10 = -8$

A) $x = 20$ ó $x = 1$ **B)** $x = 6$ ó $x = 2$
C) $x = 7$ ó $x = 3$ **D)** $x = 10$ ó $x = 2$
E) $x = 0$ ó $x = -3$

3. Resolver la ecuación: $||x - 2| - 4| = 2$

Dar como respuesta la suma de los posibles valores de x

A) 16 **B)** –16 **C)** 8 **D)** 4 **E)** –4

4. Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$$3|x - 2| + 5 = = 4|x - 2|$$

A) {–3; 3} **B)** {7; –7} **C)** {3; –7}
D) {–3; 7} **E)** {–3; –7}

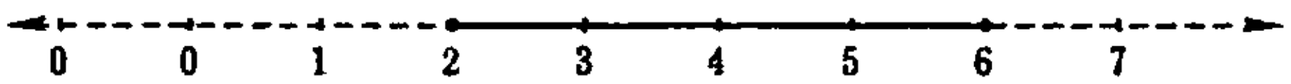
5. Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$$\frac{||x| - 5|}{4} = 2|x| - 1$$

A) {1; –7} **B)** {1; –1}
C) {1; 1/7} **D)** {1; –1; –1/7; 1/7}
E) {1; –1; 1/7}

6.2. Intervalos

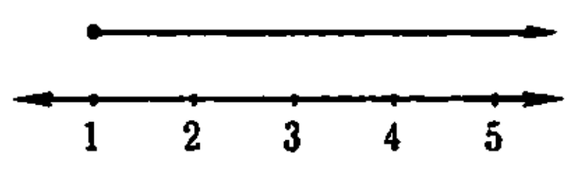
Ya sabemos que los puntos de una recta se hace corresponder con todo el conjunto de los números reales; si de la recta numérica tomamos un subconjunto, es decir, un segmento, entonces a dicho segmento le corresponde un subconjunto de los números reales al que se le denomina INTERVALO



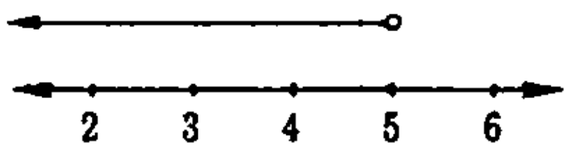
En el gráfico se muestra un segmento de la recta numérica que va desde el punto correspondiente a 2 hasta el punto que corresponde a 6. El intervalo que corresponde a este segmento se denota por: [2; 6]

La forma práctica y usual de graficar los intervalos es del siguiente modo:

Intervalos especiales

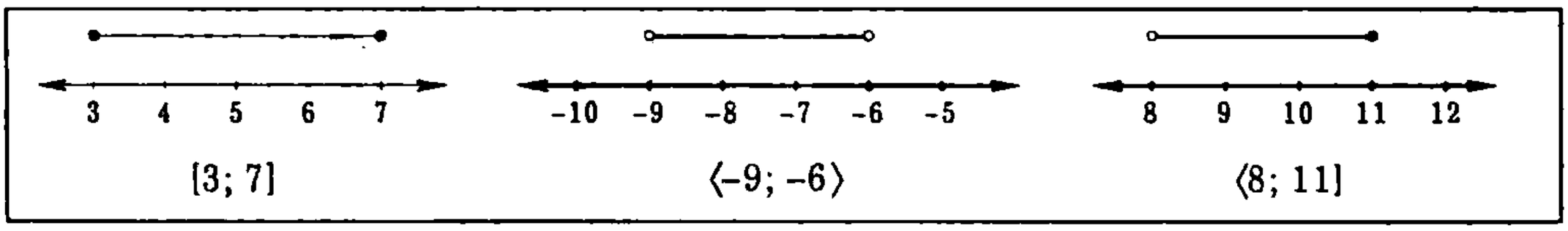


$[1; \infty\rangle$



$\langle -\infty; 5\rangle$

Un extremo de estos intervalos es el infinito (∞) lo cual indica que en dicho extremo el intervalo es necesariamente abierto.



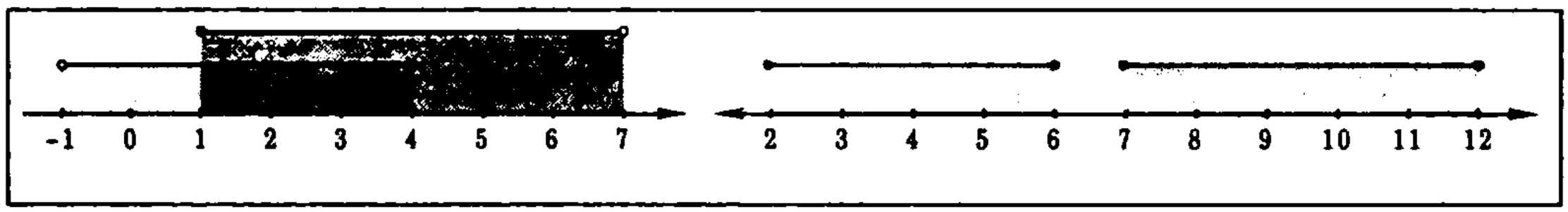
Los intervalos pueden ser cerrado, abierto o semiabiertos dependiendo de que si el punto correspondiente al extremo del intervalo pertenece o no al segmento. La aplicación de esto veremos más adelante.

Por otro lado, siendo los intervalos conjuntos numéricos, tienen toda las propiedades de conjuntos y se puede realizar con ellos las operaciones como unión e intersección.

CURIOSIDAD

Cuántos números enteros contiene el intervalo.

$\langle -10{,}5;\ 2{,}58 \rangle$



Unión

$\langle -1; 4] \cup [1; 7 \rangle = \langle -1; 7 \rangle$

Intersección

$\langle -1; 4] \cap [1; 7 \rangle = [1; 4]$

Unión

$[2; 6] \cup [7; 12]$

Intersección

$[2; 6] \cap [7; 12] = \phi$

6.3. Desigualdades

Si dos números corresponden a un mismo punto de la recta numérica, se dice que dichos números son iguales.

En cambio si los números corresponden a puntos diferentes, entonces se dice que son desiguales; el número que se encuentra a la izquierda es menor que el que se encuentra a la derecha. Ver gráfico.

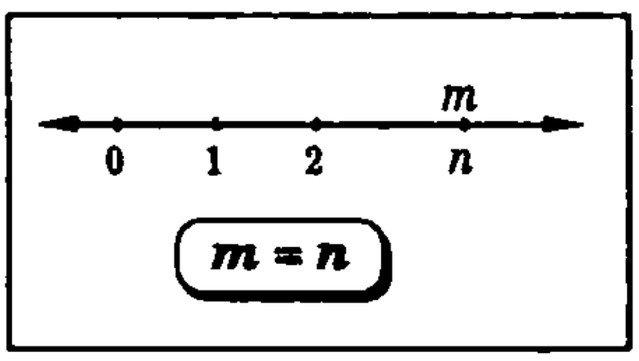
Los símbolos que se utilizan para designar las desigualdades son:

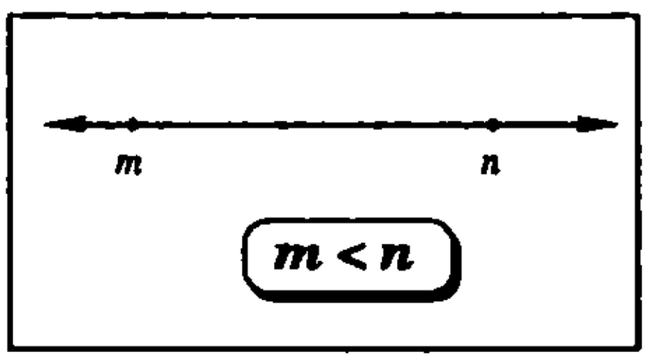
< Se lee: "menor que" (8 < 10)

> Se lee: "mayor que" (15 > 2)

≤ Se lee: "menor o igual que"

≥ Se lee: "mayor o igual que"





Reto al ingenio 2
Tres equipos de fútbol

Tres equipos A, B y C, van a jugar todos al futbol entre sí una vez. Se adjudican 10 puntos por ganar, 5 puntos por empate y 1 punto por cada gol convertido, cualquiera sea el resultado del partido. Después de jugarse algunos de los partidos, o tal vez todos, los puntos eran los siguientes:

***A**: 21*

***B**: 20*

***C**: 4*

En ninguno de los partido se marcaron más de 6 goles.

¿Cuál fue el resultado de cada partido?

Positivo y negativo, lectura de los signos

¿Cómo se lee "$x > 0$"? ... pues comúnmente leemos "x mayor que cero".

Pero este modo de leer no ayuda a captar totalmente la información. En adelante leeremos "x es positivo". Por lo tanto, ¿cómo leeremos "$x < 0$"? ... En efecto: "x es negativo"

Problema 1

Si $x > 0 \wedge y < 0$, ¿cuáles de las siguientes desigualdades son verdaderas?

a) $xy > 0$ **c)** $\frac{x}{y} < 0$ **e)** $x(x - y) < 0$

b) $x - y < 0$ **d)** $x2 + y2 > 0$ **f)** $y(y - x) > 0$

Resolución

"$x > 0$" e "$y < 0$" significa que "x es positivo" e "y es negativo". Para resolver los problemas sólo debes tener en cuenta la ley de los signos.

- *El producto de dos números del mismo signo siempre es positivo (igualmente el cociente)*
- *El producto de dos números de signos contrarios siempre es negativo (igualmente el cociente)*
- *Si anteponemos un signo menos a un número negativo, se vuelve positivo (– (–5) = 5)*

a. $x\,y > 0$ FALSO: x e y tienen signos contrarios, entonces xy es negativo ($xy < 0$)

b. $x - y < 0$ FALSO: y es negativo $\Rightarrow -y$ es positivo, como x también es positivo, la suma es positivo ($x - y > 0$)

c. $\frac{x}{y} < 0$ VERDADERO: Cociente de números de signos contrarios es negativo.

d. $x^2 + y^2 > 0$ VERDADERO: El cuadrado de un número, sea éste positivo o negativo, siempre es positivo. La suma de dos positivos, es positivo.

e. $x(x - y) > 0$ FALSO: Se ha visto que el factor $(x - y)$ es positivo (solución b), entonces al multiplicar por x, el producto es positivo ($x(x - y) > 0$)

f. $y(y - x) > 0$ VERDADERO: $-x$ es negativo, entonces $y - x$ es negativo. Al multiplicar por y negativo, el producto es positivo. ($y(y - x) > 0$)

Reto al ingenio 3

Puedes sacar algunas conclusiones

Cuatro equipos de fútbol —A, B, C y D— van a jugar entre sí una vez. Después de haberse jugado algunos —o tal vez todos— los partidos, se puede confeccionar una planilla como la siguiente en la que aparecen algunos detalles de los partidos jugados (PJ), ganados (PG), perdidos (PP), empatados (PE), goles a favor (GF), goles en contra (GC) y puntos (P):

	PJ	PG	PP	PE	GF	GC	P
A					4	4	
B					5		5
C						4	2
D					0	3	0

(Se adjudican 2 puntos por ganar y 1 punto a cada equipo en caso de empate).

Averigua el resultado de cada partido.

¿Cómo se lee "$x \leq 0$" ? ... pues se lee: "x menor o igual que cero". Esto quiere decir, que x, por ser variable, puede tomar todos los valores desde cero inclusive y menores que cero, lo que no puede tomar como valores son los números positivos. En consecuencia, la lectura de "$x \leq 0$" se debería leer, "x no es positivo" y la lectura de "$x \geq 0$" sería "x no es negativo"

Por ejemplo la desigualdad:

$$x^2 \geq 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Nos está indicando que el cuadrado de **cualquier número real**, nunca es negativo. O sea, puede ser cero o positivo, pero jamás negativo. ¿Estás de acuerdo? Hasta aquí, ¿has comprendido? Si tienes dudas, te sugiero que repases la lectura de los símbolos antes de continuar.

¿Cuál es mayor y cuál es menor?

Problema 2

¿Cuál es mayor $\sqrt[3]{4}$ ó $\sqrt{3}$?

Resolución

Si tuvieras una calculadora a la mano, no tendrías problemas para averiguarlo, calculando las raíces. Veamos cómo nos arreglamos sin calculadora.

Vamos a suponer que son iguales. Entonces, vamos a proceder como si fuera una ecuación. ¡Atención!

Igualando $\sqrt[3]{4} = \sqrt{3}$

Para eliminar las raíces, elevamos ambos miembros a la sexta:

$$\left(\sqrt[3]{4}\right)^6 = \left(\sqrt{3}\right)^6$$

Efectuando $\sqrt[3]{4^6} = \sqrt{3^6}$

$$4^2 = 3^3$$

Ahora podemos ver que no son iguales, entonces reemplazamos el signo igual por el signo correspondiente:

$16 < 27 \Rightarrow \boxed{\sqrt[3]{4} < \sqrt{3}}$ P1

PRACTICA

Si $a < 0 < b$

Escribe el signo que haga que la desigualdad sea verdadera

$ab \square 0$

$a - b \square 0$

$b - a \square 0$

$\frac{a}{b} \square 0$

$a(b - a) \square 0$

$b(a - b) \square 0$

$(a - b)(b - a) \square 0$

P1

PRACTICA

Coloca el signo de desigualdad que corresponda a cada una de las siguientes parejas de números.

$\sqrt[3]{6} \square \sqrt{3}$

$\sqrt{8} \square \sqrt[3]{22}$

$\frac{7}{6} \square \frac{5}{4}$

$\frac{9}{10} \square \frac{11}{12}$

¿Aumenta o disminuye?

¿El cuadrado de un número siempre es mayor que el número?

Por ejemplo, 6 al cuadrado es 36, y 36 es mayor que 6.

Lógicamente si el número es negativo su cuadrado, por ser positivo, siempre será mayor que el número. Pero, ¿es posible encontrar un número que al elevar al cuadrado disminuya en lugar de aumentar? ¿Cuál es mayor, 0,5 ó 0,25? ¿Cuál es mayor $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{9}$? ... En efecto, $0{,}25 < 0{,}5$ y $\frac{1}{9} < \frac{1}{3}$. Pero 0,25 es el cuadrado de 0,5 y 1/9 es el cuadrado de 1/3. Esto es, el número 0,5 al ser elevando al cuadrado disminuye a 0,25, así, el cuadrado del número es menor que el número.

Ahora ¿puedes identificar los números que tienen esta propiedad? ... En efecto, son los números, comprendidos entre 0 y 1, son los números que pertenecen al intervalo $\langle 0;1\rangle$. P2

P2

PRACTICA

Coloca el signo respectivo para cada pareja de números.

$4 \square 4^2$

$5 \square \sqrt{5}$

$-3 \square (-3)^2$

$0{,}8 \square (0{,}8)^2$

$\sqrt{0{,}2} \square 0{,}2$

$\sqrt{\frac{1}{7}} \square \frac{1}{7}$

6.3.1. Propiedades de la desigualdad

A. TRANSITIVA: Si un número a es menor que b y el número b es menor que c, entonces a es menor que c. Simbólicamente:

Si, $\boxed{a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c}$ E1

E1

- $2 < 4 \wedge 4 < 6 \Rightarrow 2 < 6$
- $-1 < 0 \wedge 0 < 10 \Rightarrow -1 < 10$

B. MONOTONIA

Esta propiedad es de vital importancia para resolver problemas de desigualdades. Para ilustrar esta propiedad, y tú mismo(a) deduzcas las conclusiones, te propongo que efectúes la operación en ambos miembros y pongas el signo correspondiente a cada desigualdad.

Partamos de la desigualdad: $360 < 480$

Sumando 120 a ambos miembros: $360 + \mathbf{120} \square 480 + \mathbf{120}$

Restando 200 a ambos miembros: $360 - \mathbf{200} \square 480 - \mathbf{200}$

Multiplicando por 2 ambos miembros: $\mathbf{2}\times 360 \square \mathbf{2}\times 480$

Dividiendo entre 12 ambos miembros: $360 \div \mathbf{12} \square 480 \div \mathbf{12}$

Multiplicando por – 2 ambos miembros: $\mathbf{-2}\times 360 \square \mathbf{-2}\times 480$

Dividiendo entre – 12 ambos miembros $360 \div (-12) \square 480 \div (-12)$

Si has colocado los signos correctamente entonces estarás de acuerdo con las siguientes conclusiones:

Si a ambos miembros de una desigualdad se suma o se resta un mismo número (Sea positivo o negativo), el sentido de la desigualdad se mantiene.

$$Si \quad a < b \Rightarrow \begin{cases} a + c < b + c \\ a - c < b - c \end{cases}$$

Si ambos miembros de una desigualdad se multiplica o se divide por un mismo número (diferente de cero) el sentido de la desigualdad.

- ***Se mantiene**, si el número es positivo*
- ***Cambia**, si el número es negativo*

$$Si \quad a < b \Rightarrow \begin{cases} ac < bc & si \ c > 0 \\ ac > bc & si \ c < 0 \end{cases}$$

Son innumerables las propiedades y teoremas en este tema. Tenemos dos opciones para poder dominar el tema de las desigualdades e inecuaciones: Una, es memorizar todas las propiedades posibles y aplicarlas en el momento requerido y, la otra es, comprender los fundamentos básicos y desarrolla? un criterio general para aplicar en cualquier situación. Obviamente, optaremos por la segunda opción.

Problema 3

A qué intervalo pertenece x si:

$$4(x-3) - 5 < 2x + 17$$

Resolución

La transposición de términos en las ecuaciones está basada en el hecho de que al sumar o restar un número a ambos miembros de la igualdad ésta se mantiene. Esta propiedad también se cumple en la desigualdad. Por consiguiente se puede transponer los términos que están sumando o restando en un miembro, igual que en una ecuación. E1

Operando: $4x - 12 - 5 < 2x + 17$

Transponiendo términos: $4x - 2x < 17 + 12 + 5$

Efectuando $2x < 34$

¿Podemos pasar dividiendo el 2 al segundo miembro? ... Esto es posible en una ecuación porque al dividir ambos miembros por cualquier número (diferente de cero) la igualdad se mantiene.

En una desigualdad, ¿qué sucede al dividir ambos miem-

E1

- $x - 7 > 8$

  $x > 8 + 7$

  $\boxed{x > 15}$

- $x + 10 < 19$

  $x < 19 - 10$

  $\boxed{x < 9}$

- $7 < 18 - x$

  $x < 18 - 7$

  $\boxed{x < 11}$

bros por el mismo número? ¿Cambia o no cambia el sentido de la desigualdad? ... En efecto, se mantiene si el número es positivo y se invierte si es negativo, esto quiere decir que al transponer, dividiendo o multiplicando, un número positivo, el sentido de la desigualdad no cambia y si el número transpuesto es negativo, se invierte el sentido de la desigualdad. E2

Transponiendo 2 $x < \frac{34}{2}$

$$\boxed{x < 17} \Rightarrow \boxed{x \in \langle -\infty; 17 \rangle}$$

Problema 4

Determinar el intervalo al que pertenece x en:

$$\frac{3x^2 - 2x + 5}{x^2 + 7} > 5$$

Resolución

Dado que $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 7 > 0$. Esto es, el denominador del primer miembro es positivo y al transponer, el sentido de la desigualdad no va a cambiar.

Transponiendo $x^2 + 7$: $3x^2 - 2x + 5 > 3(x^2 + 7)$

Efectuando: $3x^2 - 2x + 5 > 3x^2 + 21$

Transponiendo términos: $3x^2 - 2x - 3x^2 > 21 - 5$

Transponiendo –2: $-2x > 16$

$$x < \frac{16}{-2} \Rightarrow \boxed{x < -8} \Rightarrow \boxed{x \in \langle -\infty; -8 \rangle}$$

6.3.2. Desigualdades absolutas

A. El cuadrado de un número

El cuadrado de un número real, jamás puede ser negativo. Siempre es positivo o cero.

$$\boxed{x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}}$$

E2

- $7x < 28$

$$x < \frac{28}{7}$$

$$\boxed{x < 4}$$

- $\frac{x}{5} > 2$

$$x > 2 \times 5$$

$$\boxed{x > 10}$$

- $-12x < 72$

$$x > \frac{72}{-12}$$

$$\boxed{x > -6}$$

- $\frac{x}{-8} > 5$

$$x < 5(-8)$$

$$\boxed{x < -40}$$

¿Dónde está el error?

Sabemos que:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$$

De donde

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Aplicando logaritmos a ambos miembros:

$$\log\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \log\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Aplicando propiedad de logaritmos:

$$2\log\left(\frac{1}{2}\right) > 3\log\left(\frac{1}{2}\right)$$

Cancelando $\log\left(\frac{1}{2}\right)$ tenemos

$$\boxed{2 > 3}$$

B. La raíz cuadrada de un número

Tanto el radicando como el resultado de una raíz cuadrada jamás pueden ser negativos.

$$\sqrt{x} \geq 0; \quad x \geq 0$$

C. El valor absoluto de un número

El valor absoluto de un número siempre es positivo o cero.

$$|x| \geq 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Problema 5

¿Cuál es el intervalo al que pertenece x en

$$\sqrt{5-x} \cdot \sqrt{x+4}(x-2) \leq 0 \ ?$$

Resolución

El primer miembro de la desigualdad consta de tres factores, cuyo producto es negativo o cero.

Los factores $\sqrt{5-x}$ y $\sqrt{x+4}$ no son negativos, entonces lo es el factor $(x-2)$. Esto es:

$$x - 2 \leq 0 \Rightarrow \boxed{x \leq 2} \qquad (1)$$

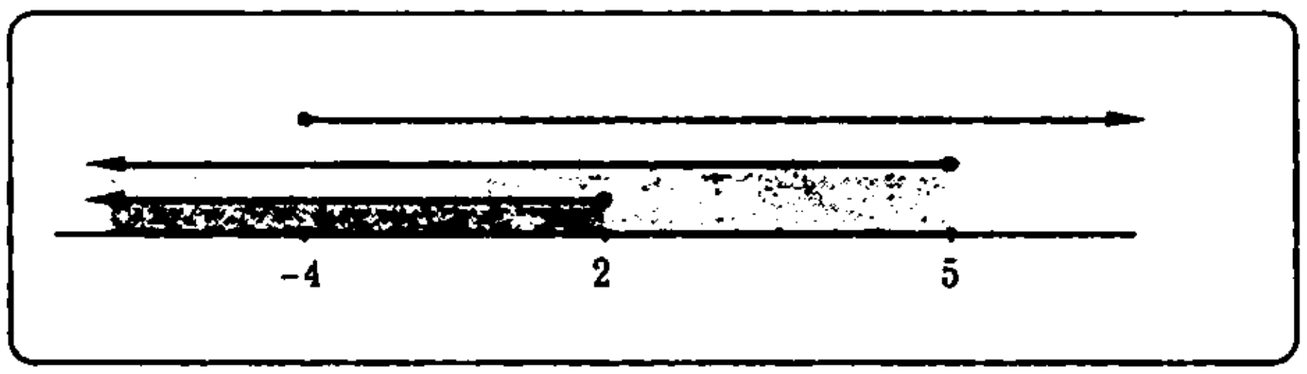
Además las expresiones dentro del radical no deben ser negativos. Entonces:

- $5 - x \geq 0 \ \Rightarrow \ -x \geq -5 \Rightarrow \boxed{x \leq 5} \qquad (2)$
- $x + 4 \geq 0 \ \Rightarrow \boxed{x \geq -4} \qquad (3)$

Para que la desigualdad sea ciertas, las desigualdades (1); (2) y (3) deben ser ciertas simultáneamente. Esto es:

$$\boxed{x \leq 2} \ \wedge \ \boxed{x \leq 5} \ \wedge \ \boxed{x \geq -4}$$

Graficando los intervalos.



¿ES CORRECTO?

¿Es correcto: $\sqrt{9} = \pm 3$? ... ¡No! ... ¡Jamás la raíz cuadrada de un número no negativo puede ser negativo!

Siempre: $\sqrt{9} = 3$

¿Entonces porqué, en:

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$?

No se debe confundir

(1) $x = \sqrt{9} \Rightarrow \boxed{x = 3}$

(2) $x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{x = \pm 3}$

El procedimiento seguido para resolver (2) es:

$$\underbrace{\sqrt{x^2}}_{|x|} = \sqrt{9}$$

$$|x| = 3 \ \Rightarrow \ \begin{cases} x = 3 \text{ ó} \\ x = -3 \end{cases}$$

¿Todo número es mayor que él mismo?

Sea : $a > b > 0$

$\Rightarrow \quad ab > b^2$

$ab - a^2 > b^2 - a^2$

$a(b-a) > (b+a)(b-a)$

$a > b + a$

No sólo es mayor que él, sino, mayor que cualquier número mayor que él. Sabemos que esto es imposible, pero, ¿dónde me equivoque?

Como x tiene que satisfacer las tres condiciones, x pertenece a la intersección de los tres intervalos. Por lo tanto:

$$x \in [-4; 2].$$

6.3.3. Desigualdades relativas. Inecuaciones

A diferencia de las desigualdades absolutas, las desigualdades relativas sólo se cumplen para ciertos valores de las variables. Por ejemplo $x - 2 > 3$, sólo se cumple para $x > 5$. Estas desigualdades, como ya hemos visto, se denominan inecuacines y sus soluciones son intervalos.

Problema 6

Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{x-2}{3} < x + 1$$

Resolución

Transponiendo 3: $x - 2 < 3x + 3$

Transponiendo tnos: $x - 3x < 3 + 2$

Efectuando: $-2x < 5$

Transponiendo –2: $x > \frac{5}{-2}$

Luego: $\boxed{x \in \left\langle -\frac{5}{2}; +\infty \right\rangle}$

Problema 7

Resolver la siguiente inecuación:

$3x^2 + 5x - 1 < (x + 2)(3x - 2) - 1$

Resolución

Operando: $\cancel{3x^2} + 5x - 1 < \cancel{3x^2} + 4x - 5$

Transponiendo: $5x - 4x < -5 + 1$

Efectuando: $\Rightarrow x < -4$

Luego: $\boxed{x \in \langle -\infty; -4 \rangle}$

Problema 8

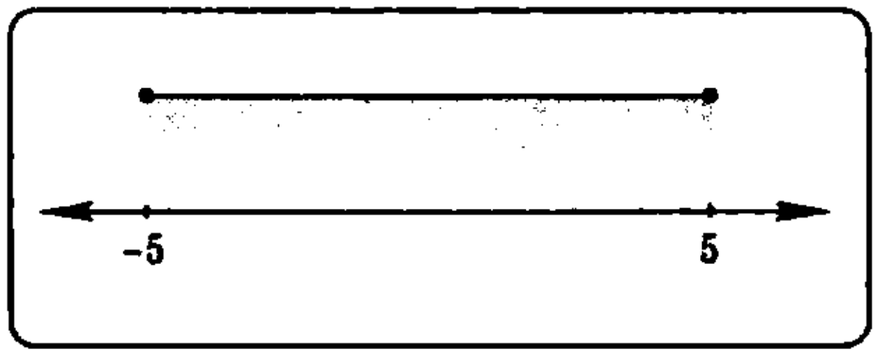
Si $|x| \leq 5$; ¿a qué intervalo pertenece x?

Resolución

El símbolo | | (valor absoluto), como se sabe, sobre el número que afecta, produce el efecto de, si es negativo volverlo positivo y si es positivo mantenerlo tal cual.

Resolver $|x| \leq 5$ es equivalente a preguntarse ¿qué números son tales que al volverlos positivos si son negativos y mantenerlos positivos si lo son, no superan a 5?

De los positivos, todos los que no son mayores que 5 y de los negativos, todos los que no son menores que –5.



Gráficamente, los números, cuyo valor absoluto no es mayor que 5 son los del intervalo mostrado:

Luego:

$$|x| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5 \quad \Rightarrow \boxed{x \in [-5; 5]}$$

Problema 9

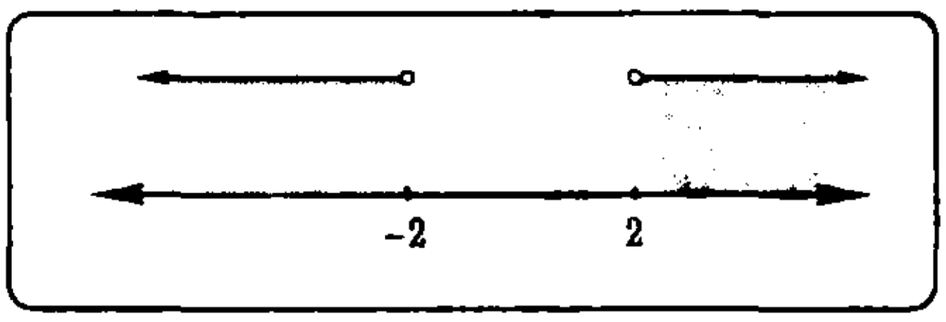
Hallar el intervalo solución de $|x| < 2$

Resolución

La inecuación equivale a preguntarse, ¿qué números, al volverlos positivo si son negativos y mantenerlos tal cual si son positivos, son mayores que 2?

Por ejemplo el –7, al volverlo positivo es 7 y es mayor que 2, entonces x puede ser –7. Prueba con varios valores para x hasta deducir una conclusión.

Gráficamente se muestra el intervalo en el que se encuentra x:



$$|x| < 2 \quad \Rightarrow \quad x < -2 \vee x > 2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x \in \langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle}$$

Problema 10

Resolver la inecuación

$$|x-3| < 5$$

Resolución

Según el problema 8, la expresión afectada del valor absoluto debe estar en el intervalo $\langle -5; 5 \rangle$. Esto es:

$$-5 < x - 3 < 5 \qquad (1)$$

Aquí, la idea es hallar el intervalo en el que se encuentra x y no, $x - 3$. Por consiguiente hay que eliminar –3. Para ello sumamos 3 a los tres miembros de la inecuación (propiedad de monotonía)

$$-5 + 3 < x - 3 + 3 < 5 + 3$$

Efectuando $-2 < x < 8$

Luego: $\boxed{x \in \langle -2; 8 \rangle}$

Problema 11

Resolver la inecuación

$$|x-3| + |x+5| < 15$$

Resolución

Aquí la idea es eliminar las barras del valor absoluto.

Esto es fácil cuando se sabe el signo del número afectado.

Por ejemplo en $|-5|$ el número –5 es negativo y eliminamos las barras volviendo positivo ($|-5| = 5$). En $|7|$ el 7 es positivo, eliminamos las barras manteniéndolo igual ($|7| = 7$). Pero en $|x|$, no sabemos si x es positivo o negativo y no se sabe entonces si cambiar de signo o mantenerlo igual.

En estas condiciones, lo conveniente es trabajar agotando las dos posibilidades:

Si x es negativo $|x| = -x$

Si x es positivo $|x| = x$

En la inecuación, el signo de $x - 3$ y $x + 5$ depende en qué intervalo se encuentra x. Los límites de tales intervalos están determinados por 3 y –5 (que resultan de igualar a cero $x - 3$ y $x + 5$).

Estos puntos vamos a llamarlos PUNTOS CRÍTICOS y por conveniencia diremos que 3 *es punto crítico de* $x - 3$ y –5 es *punto crítico de* $x + 5$. Ubicamos estos puntos en la recta real.

Dado que x es un número real, necesariamente se encuentra en uno de estos tres intervalos. ¿Cuál? No se sabe. Entonces debemos agotar las tres posibilidades.

Estas tres posibilidades son: **que x sea menor que –5,** esto es, $x < -5$. De esta desigualdad podemos deducir los signos de $(x + 5)$ y $(x - 3)$ como sigue:

$$x < -5$$

Transponiendo: $x + 5 < 0$

Con esto hemos determinado que $(x + 5)$ es negativo, entonces al eliminar las barras de $|x + 5|$ debemos cambiar de signo a $(x + 5)$, de modo que:

$$|x + 5| = -x - 5$$

De $x < -5$ también podemos deducir el signo de $x - 3$, como sigue:

$$x < -5$$

Restando 3 a ambos miembros:

$$x - 3 < -5 - 3$$

Efectuando: $x - 3 < -8$

Dado que $(x - 3)$ es menor que –8, entonces es negativo. Entonces: $|x - 3| = -x + 3$.

Análogamente al procedimiento que hemos seguido, podemos analizar las otras dos posibilidades.

A continuación el resumen del análisis:

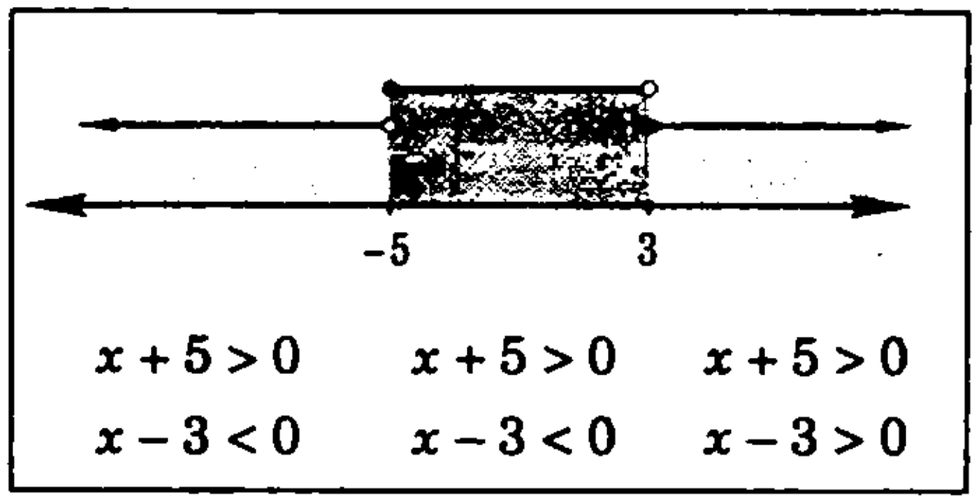
1° Que $x < -5 \Rightarrow \begin{cases} x+5 < 0 \Rightarrow |x+5| = -x-5 \\ x-3 < -8 \Rightarrow |x-3| = -x+3 \end{cases}$

2° Que $-5 \le x < 3 \Rightarrow \begin{cases} x+5 \ge 0 \Rightarrow |x+5| = x+5 \\ x-3 < 0 \Rightarrow |x-3| = -x+3 \end{cases}$

3° Que $x \ge 3 \Rightarrow \begin{cases} x+5 \ge 8 \Rightarrow |x+5| = x+5 \\ x-3 \ge 0 \Rightarrow |x-3| = x+3 \end{cases}$

Observa que en cada posibilidad se puede saber los signos de $x + 5$ y $x - 3$, en consecuencia se puede eliminar las barras del valor absoluto.

Observa con atención la figura:



Como hemos acordado –5 es punto crítico de $x + 5$ y vemos que a la izquierda de –5, la expresión $x + 5$ es negativa, mientras que a la derecha de –5, es positiva.

Igualmente sucede con $x - 3$. En los dos intervalos a la izquierda de 3, la expresión $x - 3$ es negativa y a la derecha de 3 es positiva.

Con todo lo que acabamos de ver es fácil eliminar las barras del valor absoluto.

Resolviendo la inecuación para las tres posibilidades:

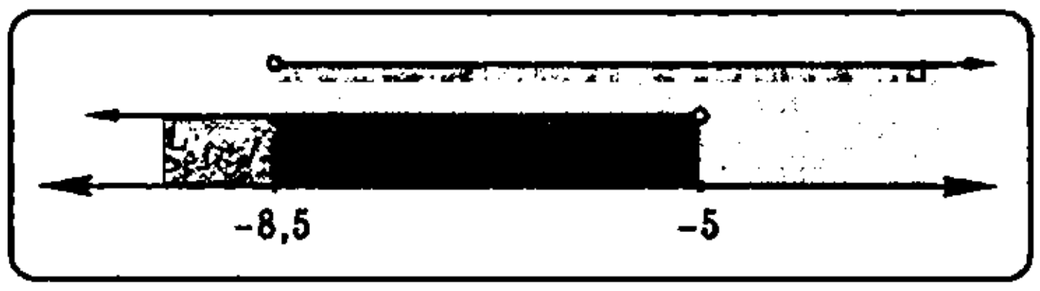
Inecuación: $|x - 3| + |x + 5| < 15$

1° Si $\boxed{x < -5} \Rightarrow -x + 3 - x - 5 < 15$

(1) $-2x < 17$

$\boxed{x > -8{,}5}$ (2)

De (1) y (2):



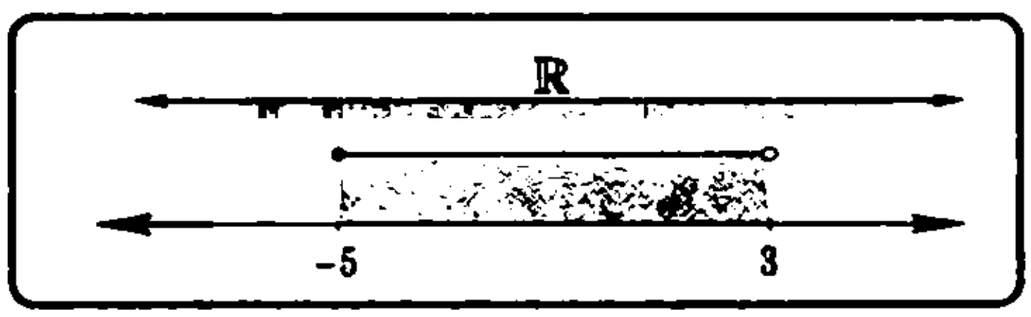
$\boxed{x \in \langle -8{,}5;\ -5 \rangle}$ (a)

2° Si $\boxed{-5 \le x < 3} \Rightarrow -x + 3 + x + 5 < 15$

(3) $8 < 15$

$\Rightarrow \boxed{x \in \mathbb{R}}$ (4)

De (3) y (4):



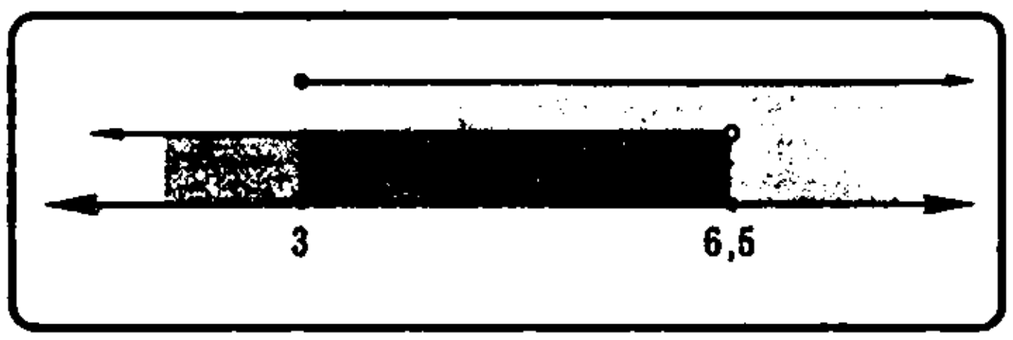
$x \in [-5; -3\rangle$ (b)

3° Si $x \geq 3$ $\Rightarrow$ $x - 3 + x + 5 < 15$

(5) $2x < 13$

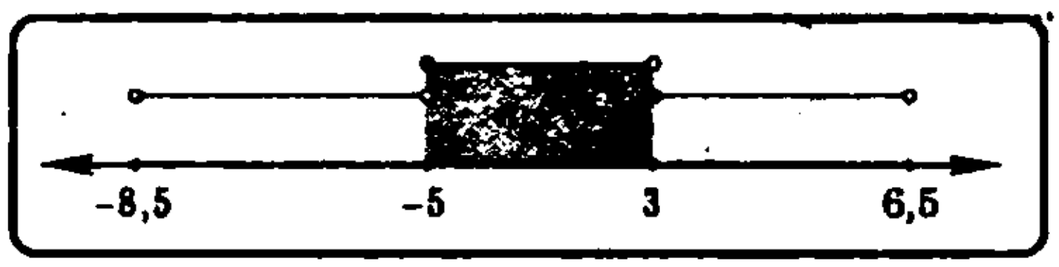
$x < 6{,}5$ (6)

De (5) y (6):



$x \in [3; 6{,}5)$ (c)

De (a), (b) y (c):



$\langle -8{,}5; -5\rangle \cup [-5; 3\rangle \cup [3; 6{,}5\rangle = \langle -8; 6{,}5\rangle$

$\therefore$ $x \in \langle -8{,}5; 6{,}5\rangle$

Como habrás notado, hemos sustentado paso por paso el camino a seguir. En la práctica, una vez que has cogido la idea, la resolución de este tipo de inecuaciones será más simple y sucinta.

Problema 12

Resolver la inecuación:

$$|x + 2| + 2|x - 4| \geq 24$$

Resolución

Los puntos críticos son: –2 y 4

Graficando y determinando los intervalos.

Inecuación:

$$|x + 2| + 2|x - 4| \geq 24$$

1° Si $x < -2$ (1)

$\Rightarrow$ $-x - 2 + 2(-x + 4) \geq 24$

$-3x \geq 18$

$x \leq -6$ (2)

De (1) y (2): $x \in (-\infty; -6]$ (a)

2° Si $-2 \leq x < 4$ (3)

$\Rightarrow$ $x + 2 + 2(-x + 4) \geq 24$

$-x \geq 14$

$x \leq -14$ (4)

De (3) y (4): No hay solución.

3° Si $x \geq 4$ (5)

$\Rightarrow$ $x + 2 + 2(x - 4) \geq 24$

$3x \geq 30$

$x \geq 10$ (6)

De (5) y (6): $x \in [10; +\infty\rangle$ (b)

De (a) y (b):

$x \in \langle -\infty; -6] \cup [10; +\infty\rangle$

Problema 13

Resolver $x^2 < 3x - 2$

Resolución

Transponiendo: $x^2 - 3x + 2 < 0$

Factorizando el primer miembro tenemos:

$$(x-1)(x-2) < 0$$

Uno de los método de resolución se fundamenta en la pregunta, ¿cuándo el producto de dos factores es negativo? El análisis de la respuesta a este problema conduce a la solución. Pero esta técnica es muy larga, sobre todo cuando hay varios factores.

El otro método, cuyo fundamento no lo discutiremos por ahora, es el de los signos.

Que consta de los siguientes pasos:

PASO 1: Pasar todas las expresiones al primer miembro y expresarlas en forma de factores dejando cero en el segundo miembro.

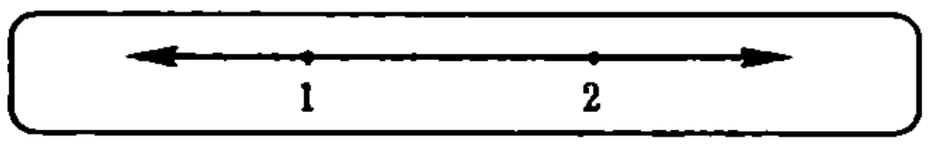
$$x^2 - 3x + 2 < 0$$

$$(x-1)(x-2) < 0$$

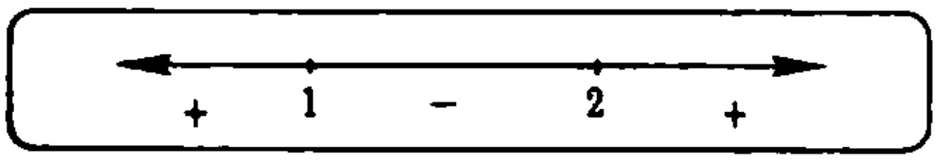
PASO 2: Identificar los puntos críticos (igualando a cero cada factor) y ubicarlos en la recta real:

• $x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$; $x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

Los puntos críticos son 1 y 2. Ubicando en la recta real:

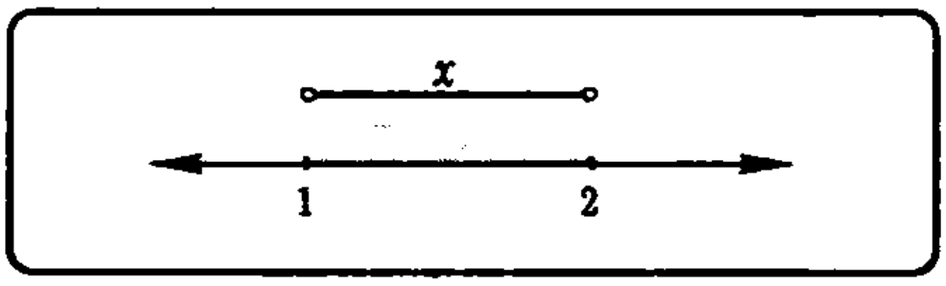


PASO 3: Los puntos críticos determinan en la recta real varios intervalos. En cada intervalo se ubican alternadamente los signos (+) y (–), empezando con el signo (+) en el primer intervalo de la derecha.



PASO 4: Si el signo de la inecuación es mayor ($> \text{ó} \geq$), los intervalos solución son los que tienen el signo (+). Si el signo de la inecuación es menor ($< \text{ó} \leq$), los intervalos solución son los que tienen el signo (–).

Los intervalos son cerrados si el signo de la desigualdad incluye el igual, en caso contrario los intervalos son abiertos.



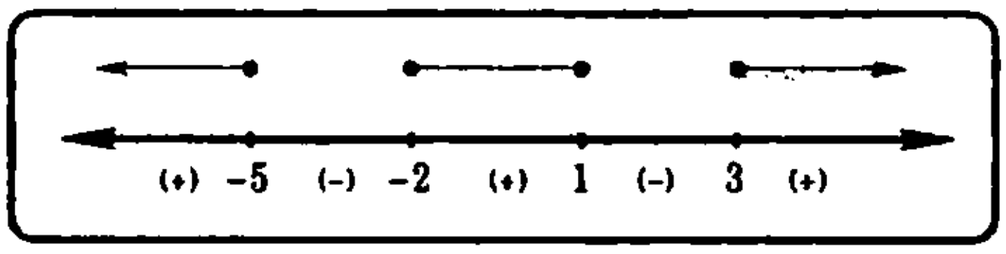
$\therefore x \in \langle 1; 2 \rangle$

Problema 14

Resolver $(x-3)(x-1)(x+2)(x+5) \geq 0$

Resolución

Puntos críticos: 3; 1; –2 y –5



$x \in \langle -\infty; -5] \cup [-2; 1] \cup [3; +\infty \rangle$

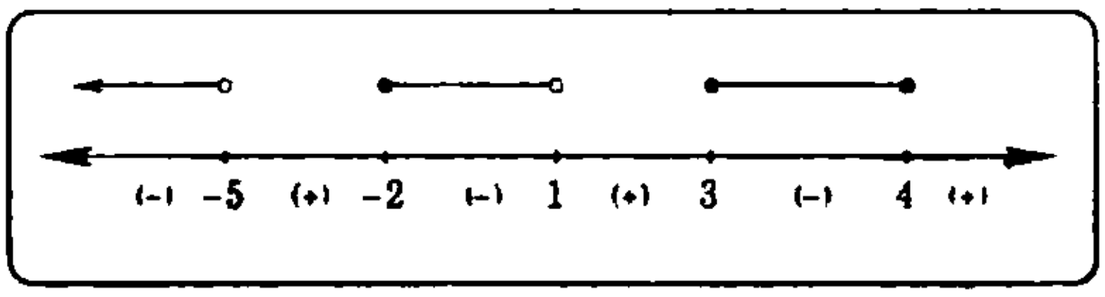
Problema 15

Resolver:

$$\frac{(x-4)(x-3)(x+2)}{(x+5)(x-1)} \leq 0$$

Resolución

Si el cociente de dos números es negativo el producto también lo es. Por consiguiente resolveremos la inecuación como si el primer miembro fuera una multiplicación y no una división, con la única **restricción** de que ninguno de los factores del denominador pueden ser iguales a cero.



Puntos críticos: 4; 3; –2; –5 y 1

Restricción: $x \neq -5; 1$

$x \in \langle -\infty; 5\rangle \cup [-2; 1\rangle \cup [3; 4]$

Problemas Resueltos

Problema 1

¿Si los números m y n son negativos, cuál es el signo de $\frac{1}{mn}$ ***?***

Resolución

Sabemos que $\frac{1}{mn} = \frac{1}{m} \times \frac{1}{n}$

Si m es negativo también lo es $\frac{1}{m}$, del mismo modo. Si $n < 0 \Rightarrow \frac{1}{n} < 0$. Ya que ambos $\frac{1}{m}$ y $\frac{1}{n}$ son negativos, su producto es positivo.

Rpta.: Positivo

Problema 2

¿Si $4 < a < 6$ ***y*** $1 < b < 2$***, entre qué valores varía*** $\frac{a}{b}$ ***?***

Resolución

El cociente de $\frac{a}{b}$ es mínimo cuando a es mínimo y b máximo, entonces el valor mínimo es $\frac{4}{2} = 2$; el valor máximo de $\frac{a}{b}$ es cuando a es máximo y b mínimo, en consecuencia este valor máximo es $\frac{6}{1} = 6$, por lo tanto

$$2 < \frac{a}{b} < 6$$

Rpta.: $\frac{a}{b} \in \langle 2; 6\rangle$

Problema 3

Si $a > b > 0$***, ¿a qué intervalo pertenece*** $\frac{1+a}{b}$ ***?***

Resolución

Del dato: $a > b$ ... (1)

Se sabe que: $1 > 0$ ... (2)

Sumando (1) + (2) : $a + 1 > b$ ... (3)

Como $b > 0$, (3) $\div b$: $\frac{a+1}{b} > \frac{b}{b}$

De donde: $\frac{1+a}{b} > 1$

Rpta.: $\frac{1+a}{b} \in \langle 1; +\infty\rangle$

Problema 4

¿Cuál es mayor, $\sqrt[3]{5}$ ó $\sqrt{3}$?

Resolución

La desigualdad no es evidente debido a la presencia de radicales. Pero si ambos tuvieran el mismo índice la decisión sería inmediata.

Una forma de obtener el mismo índice es homogenizando. Los índices son 3 y 2, cuyo MCM es 6. Luego:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^{6/3}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \\ \sqrt[2]{3} = \sqrt[6]{3^{6/2}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27} \\ \Rightarrow \boxed{\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}}\end{array}$$

Rpta.: $\sqrt{3}$ es mayor

Otro método

Entonces: $\sqrt[3]{5} = \sqrt{3}$

Elevando a 6: $\left(\sqrt[3]{5}\right)^6 = \left(\sqrt{3}\right)^6$

Efectuando: $5^2 = 3^3$

De donde: $25 < 27$

Luego: $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$

Problema 5

Si $2a \leq 5$, ¿cuál es el máximo valor de $2(3a - 4)$?

Resolución

Si $2a \leq 5 \Rightarrow a \leq 2{,}5 \Rightarrow 3a \leq 7{,}5$

$$3a - 4 \leq 3{,}5 \Rightarrow 2(3a - 4) \leq 7$$

Rpta.: 7

Problema 6

Si $x > o > y$, determinar el intervalo al que pertenece $\dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

Resolución

$$x > y \Rightarrow x - y > 0 \Rightarrow (x - y)^2 > 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 > 2xy$$

$$x > 0 > y \Rightarrow xy < 0 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} < 2$$

Rpta.: $\langle -\infty, 2 \rangle$

Problema 8

¿Para qué valores de x se cumple la desigualdad $x^2 - 4x + 5 \geq 0$?

Resolución

Dándole forma apropiada:

$$x^2 - 4x + 4 + 1 \geq 0$$

$$(x - 2)^2 + 1 \geq 0$$

Dado que $(x - 2)^2$ es siempre positivo, $(x-2)^2 + 1$ también lo será. En consecuencia, la desigualdad $x^2 - 4x + 5 \geq 0$ se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$.

Rpta.: $x \in \mathbb{R}$

Problema 9

¿Para qué valor de x se cumple la desigualdad $x^2 - 2x - 3 \leq 0$?

Resolución

Método (1)

Dándole la forma apropiada:

$$x^2 - 2x + 1 - 4 \leq 0$$

$$(x - 1)^2 \leq 4$$

Raíz cuadrada: $\sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{4}$

Operando: $|x-1| \leq 2$

De donde: $-2 \leq x-1 \leq 2$

Sumando 1: $\boxed{-1 \leq x \leq 3}$

Rpta.: $x \in [-1; 3]$

Problema 10

Hallar la solución del sistema formado por

$$x + 4 < 2 - x \quad \ldots (1)$$

$$5 - x \leq \frac{3x}{2} \quad \ldots (2)$$

Resolución

De (1) $2x < -2 \Rightarrow x < -1 \ldots (3)$

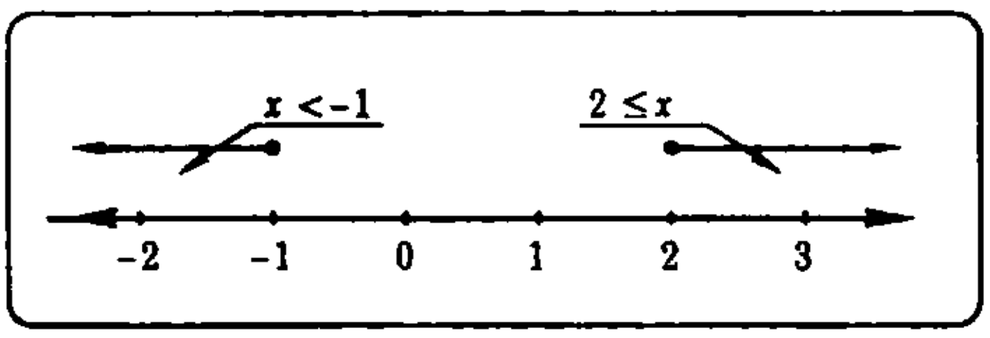
La inecuación (2) por 2:

$$10 - 2x \leq 3x$$

$$10 \leq 5x$$

$$2 \leq x \quad \ldots (4)$$

De (3) y (4)



$$\langle -\infty; -1\rangle \cap [2; \infty\rangle = \phi$$

$\Rightarrow$ El sistema no tiene solución.

Rpta.: ϕ

Problema 11

Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación: $\sqrt{2x+4}\,(x-1)(x+3) < 0$

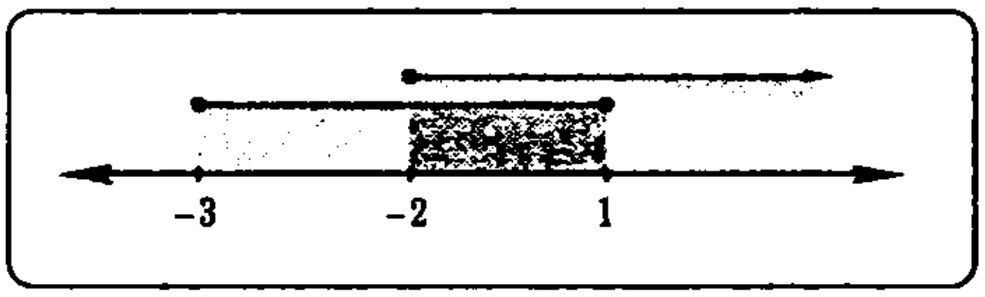
Resolución

$\underbrace{\sqrt{2x+4}}_{positivo}\,\underbrace{(x-1)(x+3)}_{negativo} < 0$ porque: (+) (–) = (–)

$\sqrt{2x+4} > 0 \quad \Rightarrow 2x+4 > 0 \Rightarrow x > -2$

$$(x-1)(x+3) < 0$$

Graficando puntos críticos: 1 y –3



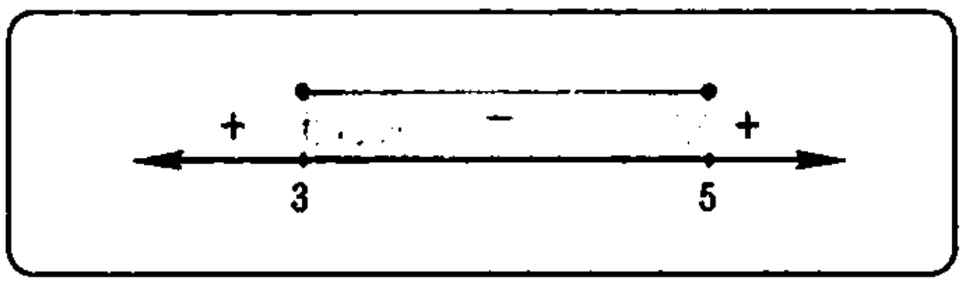
$$\langle -3; 1\rangle \cap \langle -2; \infty\rangle = \langle -2; \infty\rangle$$

Rpta.: $x \in \langle -2; 1\rangle$

Problema 12

Qué valor debe tomar m para que el conjunto solución de la desigualdad $x^2 - mx + 15 \leq 0$ ***sea*** $[3; 5]$

Resolución



Esta solución corresponde a la inecuación

$$(x-3)(x-5) \leq 0$$

$$x^2 - 8x + 15 \leq 0$$

Comparando con $x^2 - mx + 15 \leq 0$

$$\Rightarrow -8 = -m \Rightarrow \quad m = 8$$

Rpta.: $m = 8$

Problema 13

Raquel se dedica a la compra y venta de peras. Si el precio de las peras varían entre 2 y 3 soles. Después de comprar, ella las vende a precios que varían de 3,5 a 4 soles.

¿Cuál es la máxima ganancia que puede obtener en la compra y venta de dos docenas de peras?

Resolución

La ganancia es máxima si el precio al que se compra es mínimo y el precio al que se vende es máximo.

Precio de costo: 2

Precio de venta: 4

Ganancia: $4 - 2 = S/.\ 2$

Ganancia total: $24 \times 2 = 48$ soles.

Rpta: 48 soles

Problema 14

Un microbús cobra por pasaje: S/. 0,30; S/ 0,50 y S/. 1,00. Puede transportar 40 pasajeros sentados o 65 pasajeros entre parados y sentados. Si la mínima cantidad de pasajeros que transporta es 40; ¿entre qué valores varía la recaudación por cada viaje, si tiene sólo un paradero inicial y el final?

Resolución

La mínima recaudación será cuando transporta 40 pasajeros que pagan S/. 0,30, es decir, $40 \times 0{,}30 = 12$. La máxima recaudación será cuando lleve 65 pasajeros cobrando S/. 1,00 a cada uno, es decir $65 \times 1 = 65$.

Varía entre 12 y 65 soles.

Rpta: 12 y 65

Problema 15

Los pesos de las reses varían entre 160 kg y 350 kg; de estas reses, la cantidad que puede entrar en un camión es 24 de los más flacos ó 18 de los más gordos.

¿Cuántas reses transporta, si lleva el máximo peso? Dar como respuesta el peso.

Resolución

Si transporta los flacos lleva $24 \times 160 = 3840$ kg. Si transporta los gordos lleva $18 \times 350 = 6300$ kg este es el máximo peso.

Rpta: 6 300 kg

Problema 16

Las distancias a, b y c son las longitudes de los tres lados de un triángulo. Indicar la longitud del menor lado si:

$$a + c > 2b \qquad (1)$$

$$b + c < 2a \qquad (2)$$

$$a + b < 2c \qquad (3)$$

Resolución

Se pueden restar miembro a miembro las desigualdades de sentidos contrarios, y el resultado lleva el sentido del minuendo.

Entonces (1) – (2):

$$a - b > 2b - 2a$$

$$3a > 3b \quad \Rightarrow \quad a > b$$

Por otro lado: (1) – (3):

$$c - b > 2b - 2c$$

$$3c > 3b \quad \Rightarrow \quad c > b$$

El menor lado es el que tiene longitud b

Rpta: b

Problema 17

En una competencia de fuerza jalando de los extremos de una cuerda, se sabe

que Daniel es más débil que Carlos; Alberto y Carlos juntos tienen menos fuerza que Beto; y Daniel y Carlos juntos tienen la misma fuerza que Alberto y Beto.

Indicar sus fuerzas de menor a mayor (las letras son las iniciales de sus nombres)

Resolución

$$D < C \quad \ldots(1)$$

$$A + C < B \quad \ldots(2)$$

De (2): $C < B \quad \ldots(3)$

$$A + B = D + C \quad \ldots(4)$$

(3) + (4): $A + \cancel{B} + \cancel{C} < D + \cancel{C} + \cancel{B}$

$$A < D \quad \ldots(5)$$

Ordenando:

$$A < D < C < B$$

Rpta: ADCB

Problema 18

Un número de 2 cifras al intercambiar sus cifras resulta otro número menor que el original. ¿Cuál es el número original si el segundo es mayor que 79?

Resolución

$$\overline{ab} > \overline{ba}$$

$$10a + b > 10b + a$$

$$9a > 9b \Rightarrow a > b$$

Si $\overline{ba} > 79 \Rightarrow b > 7$

Por lo tanto $7 < b < a$

$$b = 8 \text{ y } a = 9 \text{ y } \overline{ab} = 98$$

Rpta.: 98

Problema 19

Se compraron pares de zapatos a precios que varían desde 200 soles hasta 350 soles y se venden a precios que varían entre 300 a 450 soles. ¿Cuál es la mayor ganancia posible que se puede obtener de la venta de 8 pares de zapatos?

Resolución

La mayor ganancia es cuando se compra al menor costo y se vende a mayor precio.

Precio de costo: S/. 200

Precios de venta: S/. 450

Ganancia máxima

Por cada par: 450 – 200 = S/. 250

Ganancia total: 8×250 = 2 000 soles

Rpta: 2 000 Soles

Problema 20

Roberto, hijo de José, nació cuando éste tenía 20 años. Hace 5 años la edad del hijo era menor a la cuarta parte de la edad del padre. ¿Cuál es la edad actual del hijo si dentro de 10 años la edad del hijo será mayor que la mitad de la edad del padre?

Resolución

	hace 5 años	actual	dentro de 10 años
Padre	$x + 15$	$x + 20$	$x + 30$
Hijo	$x - 5$	x	$x + 10$

$$x - 5 < \frac{x+15}{4} \Rightarrow 4x - 20 < x + 15$$

$$3x < 35$$

$$x < 11{,}6 \quad \ldots(1)$$

$$x + 10 > \frac{x+30}{2} \Rightarrow 2x + 20 > x + 30$$

$$x > 10 \quad \ldots(2)$$

De (1) y (2): $10 < x < 11{,}6 \Rightarrow x = 11$

Rpta.: 11 años

Problemas Propuestos

1. Si $x > y > 1$. ¿Cuál de las siguientes expresiones es siempre mayor ?

$$m = \frac{x+1}{y+1} \quad n = \frac{x}{y} \quad \text{ó} \quad p = \frac{y+x}{2y}$$

A) m **B)** n **C)** p
D) Ninguno **E)** Son iguales.

2. Siendo a y b dos números reales tales que $a > 0 > b$. ¿Cual de las siguientes relaciones es falsa?

A) $a^2 + b^2 \geq 0$ **B)** $a^2 - ab < 0$

C) $ab < 0$ **D)** $\frac{b-a}{b} > 0$

E) $(b-a)(a-b) < 0$

3. Si, $\frac{b(a+c)}{2} > 0$, $b > 0$ y $c < 0$

Hallar el máximo valor entero de $\frac{a}{c}$

A) –1 **B)** –3 **C)** –4 **D)** –2 **E)** 1

4. Si $4 \leq m \leq 10$ **y** $1 \leq \frac{n}{2} \leq 2$ **hallar la suma entre el mínimo y el máximo valor de** $\frac{2m}{n} + 4$.

A) 6 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 20 **E)** 24

5. Si $b(a-c) > 0$, siendo $b < 0$, ¿cuál es la relación entre a y c?.

A) $a < c$ **B)** $a > c$ **C)** $a = c$
D) $2a > c$ **E)** $3a = c$

6. Si $a - b > 1$, ¿a qué intervalo debe pertenecer b para que $\frac{a}{b+1} < 1$

A) $[2; 3]$ **B)** $[4; 5\rangle$ **C)** $\langle 1; \alpha\rangle$

D) $\langle -\infty; -1\rangle$ **E)** $[-1; 1\rangle$

7. ¿Cuál es mayor: $\sqrt[3]{20}$, $\sqrt{7}$ **ó** $\sqrt[6]{360}$ **?**

A) $\sqrt[3]{20}$ **B)** $\sqrt{7}$ **C)** $\sqrt[6]{360}$
D) Son iguales **E)** N. A..

8. Si $n > m > 0$, hallar el mínimo valor entero de $n - m + \frac{n}{m}$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

9. Si $a > b > 0$, ¿cuál es el mínimo valor entero de $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ **?**

A) –1 **B)** –2 **C)** 0 **D)** 1 **E)** 4

10. Si $m > n \geq 0$, hallar el máximo valor entero de $\frac{m-n}{m+n}$

A) –2 **B)** –3 **C)** –1 **D)** 0 **E)** 1

11. Si $ab = 0$ y $\frac{a+b+1}{b+2} < 1$, **hallar** $\frac{b}{a+b}$

A) –1 **B)** –2 **C)** –3 **D)** 0 **E)** 4

12. $ab = 0$, $a > b$ **y** $\frac{a+b}{a-b} > 1$, **hallar el valor de** $\frac{a+20}{5}$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

13. Si $x < 0 < y$, x y es siempre

A) negativo B) positivo
C) igual a 0 D) mayor que 1
E) menor que 1

14. Hallar el valor de n para que la inecuación $nx + 2x \geq 4$ tenga como solución el intervalo $[1; \infty\rangle$

A) –1 B) 2 C) 3 D) 1 E) 4

15. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera.

A) n^2 es siempre mayor que n, $\forall\, n \in \mathbb{R}$

B) $\frac{1}{n}$ representa siempre un número decimal.

C) n^2 es siempre mayor que $\sqrt{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{R}$

D) $2n$ es siempre mayor que $n+2$, $\forall\, n \in \mathbb{R}$

E) Ninguna de las anteriores.

16. En las siguientes expresiones, n es un número entero mayor que 1, ¿Cuál de todas es la mayor?

A) $\frac{2}{n-1}$ B) $\frac{1}{n}$ C) $\frac{2}{n}$

D) $\frac{1}{n+1}$ E) $\frac{1}{n^2}$

17. Hallar la suma de los valores enteros de x si.

$$\frac{9-x}{2} < \frac{3+4x}{5} \quad \ldots(1)$$

$$\frac{5x}{3} > 3x - 12 \quad \ldots(2)$$

A) 30 B) 16 C) 26 D) 28 E) 32

18. Resolver la siguiente inecuación, y dar como respuesta el extremo inferior del intervalo solución.

$$(x-3)(x+1) \leq (x-1)(x+5)$$

A) –1/3 B) 0 C) 1/3
D) 2/3 E) 3

19. Hallar el mayor valor entero de x

$$si\ \frac{3x-2}{3} \leq \frac{2x-1}{6} + 2 - x$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20. Hallar el mayor valor entero de x en:

$$(x-2)(x+3) \geq (x+3)(x-1)(x+4) - 3 - x^3$$

A) 0 B) 1 C) –1 D) 3 E) 5

21. Hallar el mayor valor entero de x en: $(x-3)^2 - (x+2)^2 > x + 10$

A) 0 B) 1 C) –1 D) 3 E) 5

22. Hallar el máximo valor entero de x en

$$(x-2)^2 - (x-1)^2 + 2x^2 \geq (x+2)^2 + (x+1)^2$$

A) 2 B) 3 C) –1 D) –2 E) –3

23. Hallar el intervalo solución de la inecuación $\sqrt{2x+4}(x-1)(x+3) < 0$

A) $\langle 2; 3\rangle$ B) $\langle -1; 2\rangle$ C) $\langle 1; 4\rangle$
D) $\langle -3; 1\rangle$ E) $\langle -2; 1\rangle$

24. Si $4 \leq m < 10$
Hallar el intervalo al que pertenece

$$\frac{3m+10}{2}$$

Dar como respuesta el extremo inferior del intervalo

A) 10 B) 12 C) 13
D) 11 E) 14

25. Hallar (n + m) si el conjunto solución de la inecuación $mx + x + n \geq 2$ es

el intervalo $[1, \infty\rangle$ $(m > 0)$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

26. Cual es el máximo valor numérico de la expresión $P(x) = 4 + 12x - x^3$

A) 70 **B)** 40 **C)** 80
D) 100 **E)** 20

27. Cuántos números enteros x, satisfacen las siguientes dos inecuaciones

$$x^3 - 9x > 0 \quad \ldots (1)$$
$$x^3 - 3x - 10 < 0 \quad \ldots (2)$$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

28. Qué valor debe tomar a para que la inecuación $x^2 + ax + 10 < 0$ ***tenga como conjunto solución el intervalo*** $\langle 2; 5\rangle$.

A) –6 **B)** 6 **C)** 7 **D)** –7 **E)** 8

29. Qué valor debe tomar $a + b$ ***para que*** x ***pertenezca al intervalo*** $\langle -1; 7\rangle$ ***si***

$$b < \frac{x+3}{2} < a - 1$$

A) 6 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 7

30. Si $x \in [4; 5]$, ***hallar*** $a + b$, ***si***

$$\frac{b+10}{2} \leq \frac{x+3}{2} \leq a - 1$$

A) –2 **B)** –3 **C)** 5 **D)** 2 **E)** 1

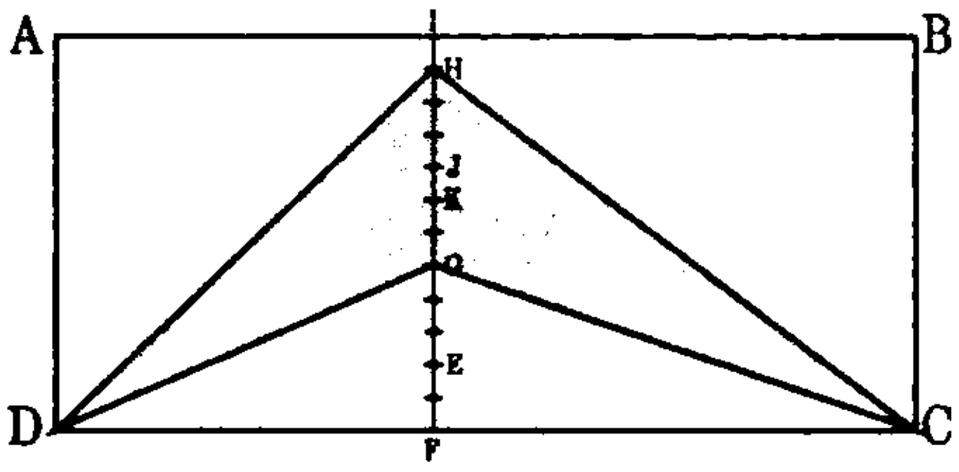
31. Hallar el intervalo al que pertenece x, ***si*** $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \geq 0$. ***Dar como respuesta la cantidad de valores enteros menores que 5***

A) 2 **B)** 10 **C)** 1 **D)** 3 **E)** 4

32. Anita compra frutas que vienen en cajas iguales; pero paga el precio por unidades. En las cajas vienen de 40 a 60 unidades y elprecio de cada fruta varía de 2 a 3,5 soles, según el tamaño. ¿Cuál es el precio del cajón más barato?.

A) S/. 144 **B)** S/. 120 **C)** S/. 140
D) S/. 110 **E)** S/. 280

33. ABCD es un rectángulo. AD = 12 cm y AB = 16 cm; el punto H se mueve hasta J, en tanto que el punto G se mueve hasta el K. ¿Entre qué valores varía el área del cuadrilátero DHCG?



A) 10 a 24 cm **B)** 16 a 72 cm
C) 12 a 18 cm
D) 8 a 72 cm **E)** 32 a 72 cm

34. Se compran cajas de frutas cuyo costo por caja varía entre 4,8 y 6,4 soles si los cajones contienen entre 20 y 30 unidades. ¿Entre qué valores varía el precio de cada una de las frutas? Dar como respuesta la suma de los valores extremos.

A) 0,48 **B)** 0,36 **C)** 0,64
D) 0,54 **E)** 0,24

35. Por un artículo se paga tantos soles por cada uno como unidades se compra. Si el precio aumenta en 2 soles se compra uno menos, todo, por un precio no mayor de 10 soles. ¿Cuál es el máximo precio?.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

36. La suma de dos números enteros y positivos es mayor que 76: su diferencia, menor que 8 y si al mayor se le suma el duplo del menor, el resultado no sobrepasa a 112. ¿Cuáles son los números?

A) 30 y 40 **B)** 41 y 36 **C)** 35 y 42
D) 36 y 45 **E)** 38 y 50

37. La suma de dos números es mayor que 24; su diferencia es menor que 6. Además el doble del primero más el triple del segundo es menor que 68. ¿Cuál es la suma de los dos números?

A) 25 **B)** 24 **C)** 30 **D)** 35 **E)** 150

38. La suma de tres números enteros consecutivos es mayor que 30. Si el triple del mayor es menor que el menor aumentado en 28. Hallar el menor de dichos números.

A) 7 **B)** 10 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 12

39. Si al numerador de 1/9 se le aumenta un número entero, resulta mayor que 5/4; en cambio, si al denominador del mismo se le aumenta dicho número resulta mayor que 1/21. Hallar la mencionada cantidad.

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

40. Entre Pedro y Luis tienen menos de 6 hijos; Luis tiene más hijos que Ramón y aunque Pedro tuviera un hijo menos, seguiría teniendo más hijos que Ramón. ¿Cuántos hijos tiene cada uno de ellos? Todos tienen por lo menos un hijo y ninguno tiene la misma cantidad de hijos que el otro.

A) 1; 2; 3 **B)** 3; 4; 5 **C)** 0; 1; 4
D) 2; 3; 5 **E)** 2; 4; 5

41. Un campesino tenía menos de 5 caballos y más de 8 vacas. Una vez que compra tantos caballos como los que tiene, entre todo sus animales no llegan a 12. ¿Cuántos caballos y cuántas vacas tenía al inicio?

A) 2 y 10 **B)** 3 y 11 **C)** 1 y 8
D) 1 y 9 **E)** 3 y 7

42. Entre tres cazadores A, B y C, reúnen más de 8 perros, B piensa adquirir 4 perros más, y entonces tendrá más perros que A y C juntos. B tiene menos perros que C, y los que éste tiene no llegan a 5. ¿Cuántos perros tiene cada cazador?

A) 2; 3; 4 **B)** 2; 4; 5 **C)** 1; 2; 3
D) 2; 4; 6 **E)** 3; 4; 7

43. En un número de tres cifras se verifica: que la suma de las cifras extremas, disminuida en la central, es menor que 2; que si se resta la cifra de las centenas del doble de la cifra de las unidades, el resultado es mayor que cero y que la cifra de las centenas, aumentada en una unidad, es mayor que la cifra de las decenas. ¿Cuál es el número?

A) 111 **B)** 412 **C)** 312
D) 381 **E)** 366

44. Un revendedor disponía de una cantidad para comprar un cierto número de objetos. Pensaba comprarlos al precio de 50 soles y le faltaban más de 48 soles; después pensó comprarlos al precio de 40 soles, y le sobraban más de 152 soles; y, por último, los compró a 30 soles, y le sobraron menos de 372 soles. ¿Cuál fue el número de objetos comprados?

A) 20 **B)** 22 **C)** 24 **D)** 21 **E)** 31

45. Se tiene un cierto número de monedas. Si se hacen montones de a siete, no se pueden completar 8 de aquellos, y si se hacen de a seis, se completan 9

y queda un sobrante. ¿Cuál es el número de monedas?

A) 54 B) 55 C) 56 D) 63 E) 51

46. Un propietario vendió un año la tercera parte de sus casas, al año siguiente vendió la quinta parte de las que primitivamente tenía y 5 más, y al año siguiente vendió la cuarta parte de las que primitivamente tenía y 3 más. En el primer año vendió menos casas que en el segundo y más que en el tercero. ¿Cuántas casas tenía este propietario antes de vender?

A) 27 B) 38 C) 37 D) 42 E) 53

47. Se han comprado cucharas, tenedores y cuchillos. Entre cucharas y tenedores no llegan a 6; el número de tenedores es mayor que el de cuchillos, y el número de cucharas es mayor que el de cuchillos aumentado en 1. ¿Cuántas piezas de cada clase se han comprado?

A) 3; 1; 4 B) 4; 1; 4 C) 1; 4; 3
D) 3; 2; 1 E) 2; 2; 3

48. A tres hermanos. A, B y C, les regalaron el mismo número de manzanas. A, comió los 7/12 de las suyas, más la mitad de una; B, comió la mitad de las que tenía, más una, y C comió 1/3 de una y la mitad del número que resultaría si le hubieran regalado una más. A comió menos que B y más que C ¿Cuántas manzanas recibió cada hermano?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

49. Un muchacho empezó comiendo un cierto número de naranja. Después compró 5 más, que también se las comió, resultando que había comido más de 10 naranjas. Compró 8 naranjas más, y, al comérselas, observó que había comido, en total, más del triple de naranjas que comió la primera vez. ¿Cuántas naranjas comió, en total, ese muchacho?

A) 16 B) 19 C) 18 D) 17 E) 15

50. Cuatro secretarias A, B, C y D discutían en una reunión acerca de sus edades y la única conclusión era la siguiente: Que A era mayor que B; que A y B juntas suman menos años que B y C juntas; que C y D juntas suman tanto como A y B. Indique las edades de mayor a menor.

A) ABCD B) CABD C) DCBA
D) ADCB E) DBAC

51. Un matrimonio dispone de 320 soles para ir al teatro con sus hijos. Si toma entradas de a 50 soles, les falta dinero, y si las toma de a 40 soles, les sobra. ¿Cuántos son los hijos?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

52. De los valores de "x" que simultáneamente verifican las inecuaciones, indicar uno de los intervalos.

$$I.\ 2x^2 - 24x + 64 > 0$$

$$II.\ 3x^2 - 39x + 66 < 0$$

A) $-\infty < x < \infty$ B) $4 < x < 8$
C) $2 < x < 11$
D) $x < 11$ E) $8 < x < 11$

53. Hallar un número entero y positivo, sabiendo que la tercera parte del que le precede, disminuida en una decena, es mayor que 14, y la cuarta parte del que sigue, aumentada en una decena, es mayor que 29.

A) 65 B) 70 C) 73 D) 74 E) 64

CLAVES DE RESPUESTAS

PÁGINA 296	1	2	3	4	5
	D	B	C	D	B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	D	D	A	D	A	C	D	E
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	A	B	E	A	A	C	A	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	C	E	D	A	B	C	D	E	D
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	B	E	A	C	C	B	B	D	A
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
D	A	A	D	B	C	D	C	B	B
51	52	53							
D	E	D							

Reto al ingenio

1. 2861 +
   6061

   8922

2. A vs B: 2 – 2
   A vs C: 4 – 2
   B vs C: 3 – 2

3. A vs B: 0 – 2
   A vs C: 2 – 2
   A vs D: 2 – 0
   B vs C: 2 – 2
   B vs D: 1 – 0

René Descartes (1596 – 1650)

René Descartes

Nació el 31 de Marzo de 1596 en La Haye, Touraine, Francia

Descartes tiene fama de filósofo y el intelecto más grande de los que contribuyeron a crear la llamada «Edad de la Razón».

Descartes nació en una familia francesa noble en la Turena, y fue el tercero y último hijo de la primera esposa de su padre, quién murió poco después del nacimiento de René. Su padre era un hombre de raro sentido común que hizo todo lo posible por compensar a sus hijos la pérdida de su madre. Un aya excelente ayudó al débil y enfermizo René a sobrevivir; y creció para convertirse en un niño pálido y serio, que siempre deseaba conocer la causa de todas las cosas que existían bajo el Sol.

Debido a la mala salud de su hijo, su padre aplazó la educación formal hasta que llegó a la edad de ocho años. Entonces escogió el colegio jesuita de La Flèche como la escuela ideal. El rector se

encariñó en seguida con el pálido y confiado niño.

Evidentemente, decidió que necesitaba ayudar a fortalecer el cuerpo del pequeño si quería educar su mente. Como René parecía requerir más descanso que los niños normales de su edad, se le permitía levantarse tan tarde como quisiera antes de reunirse con sus condiscípulos. Durante su vida, Descartes siguió esta costumbre de levantarse tarde después de pasar tranquilamente la mañana en silenciosa meditación. Cursó estudios normales de lógica, ética, metafísica, historia, ciencias y literatura. Luego se dedicó a trabajar independientemente en el álgebra y geometría, que se convirtieron en sus materias favoritas «debido a la certidumbre de sus pruebas». Prosiguió sus estudios en la Universidad de Poitiers, donde cursó las materias de derecho. En cuanto recibió su diploma, «abandonó del todo el estudio de las letras y resolvió no aspirar ya a ninguna otra ciencia que no fuera el conocimiento de sí mismo o de los grandes libros del mundo».

Siguiendo este propósito, fue a París para divertirse con los juegos de azar. Pronto se cansó de ellos y se retrajo al mundo de la erudición. Pasó dos años siguientes en la soledad, estudiando matemáticas. A la edad de veintidós años se ofreció como voluntario en el ejército del príncipe Mauricio de Nassau.

Después de ingresar en el ejército, fue enviado a Breda, en Holanda. Un día, cuando se reunía una multitud frente a un cartel, pidió a un anciano caballero que se lo tradujera. Éste leyó el problema matemático contenido en el cartel y el reto para resolverlo. Al punto, Descartes procedió a resolver el problema para el caballero, el cual era Isaac Beeckman, uno de los más grandes matemáticos y doctores de Holanda.

Beeckman comprendió en seguida que Descartes no era un soldado común y se convirtió en su amigo y mentor. A Descartes lo entusiasmó tanto esta amistad accidental, que menos de cuatro meses después informó a su amigo el descubrimiento de una nueva manera de estudiar la geometría.

Lo inquietaron los métodos de los geómetras griegos para llegar a sus ingeniosas pruebas sin un sistema fundamental de ataque y se propuso corregirlos mediante el manejo de líneas y figuras tridimensionales en una gráfica. Dibujaba la gráfica marcando unidades en una línea horizontal (eje X) y una línea vertical (eje Y); así, cualquier punto de la gráfica podía describirse con dos números. El primer número representaba una distancia en el eje X y el otro número representaba una distancia en el eje Y. Aunque conservaba las reglas de la geometría euclidiana, combinaba el álgebra y la geometría, consideradas entonces como independientes, para formar una nueva disciplina matemática llamada geometría analítica.

En el 1629 decidió irse a vivir a Holanda, allí estudió otras cosas aparte de filosofía y las matemáticas, comprendiendo la óptica, la física, la química, la anatomía y la medicina. En 1634 aún no publicaba nada, pero seguía dedicado a incorporar todos sus conocimientos, desde la astronomía hasta la anatomía humana, en un impresionante tratado que se llamaba El mundo. Todo París esperaba con gran curiosidad la obra maestra de Descartes pero este se enteró de que la Inquisición condenó por atreverse a defender la teoría copernicana de que el Sol era el centro del Universo.

El 8 de Junio de 1637 Descartes dio al mundo su geometría analítica como un apéndice modesto de su obra maestra Discurso del método.

Al propalarse la fama de Descartes, la realeza comenzó a cortejarlo. Carlos V de Inglaterra y Luis XIII de Francia invitaron al famoso filósofo a adornar sus respectivas cortes. En 1646, Descartes vivía en feliz aislamiento en Egmond, Holanda, meditando, cuidando su pequeño jardín y sosteniendo correspondencia con intelectuales de Europa, cuando la reina Cristina de Suecia le suplicó que fuera a su corte. Descartes partió en el otoño de 1649. Todo podría haber resultado perfecto para Descartes si Cristina no hubiera insistido en hacer que le enseñara filosofía a partir de las cinco de la mañana en un aposento grande y frío. Descartes era demasiado bien educado para quejarse de esta desagradable circunstancia, aunque siempre odiaba el frío y rara vez se levantaba antes del mediodía. Después de tres meses de estas espantosas clases antes del amanecer, enfermó de gravedad y murió de una enfermedad respiratoria, que probablemente fue pulmonía. Diecisiete años más tarde, su cadáver volvió a París, donde fue sepultado en lo que hoy es el panteón.

Falleció el 11 de Febrero de 1650 en Estocolmo, Suecia.

7 ANALISIS COMBINATORIO

INTRODUCCION

Contar cuántos estudiantes hay en un salón de clases no requiere más que conocer los números naturales. Pero contar cuántos grupos diferentes de cinco estudiantes se puede formar con ellos, no es tan sencillo, requiere de una serie de técnicas que corresponden al campo del ***análisis combinatorio.***

En este capítulo vamos a estudiar, los principios matemáticos utilizados en las técnicas de conteo, sobre todo lo concerniente a las combinaciones y las permutaciones.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para comprender sin dificultades, el contenido de este capítulo, te recomiendo practicar la simplificación de fracciones y la resolución de ecuaciones cuadráticas.

La esencia de este capítulo consiste en distinguir entre una ***combinación*** *y una* ***permutación.*** *Una vez establecida claramente la diferencia entre ambas, calcular el número de ellas es mucho más sencillo.*

7.1. Factorial de un número

Se llama factorial de un número entero positivo n, que se simboliza por $n!$ o $\underline{|n}$ y se lee "*factorial de n*", al producto de todos los enteros desde 1 hasta el número n.

$$\underline{|n} = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1)n \quad \text{E1}$$

Para $n = 0$ se define $0! = 1$

Propiedad:

$$n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1)}_{(n-1)!} n$$

$$n! = (n-1)!n \quad \text{E2}$$

E1

$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

E2

* $4! = \underbrace{1 \times 2 \times 3}_{3!} \times 4$

  $4! = 3! \times 4$

* $5! = 4! \times 5$
* $30! = 29! \times 30$
* $45! = 43! \times 44 \times 45$

Problema 1

Simplificar cada una de las siguientes expresiones.

a. $\dfrac{7!}{6!}$ **b.** $\dfrac{25!}{23!}$ **c.** $\dfrac{12!15!}{16!9!}$

Resolución

a. $\dfrac{7!}{6!} = \dfrac{6!7}{6!} = 7 \Rightarrow \boxed{\dfrac{7!}{6!} = 7}$

b. $\dfrac{25!}{23!} = \dfrac{24!25}{23!} = \dfrac{23!24 \times 25}{23!} = 600 \Rightarrow \boxed{\dfrac{25!}{23!} = 600}$

c. $\dfrac{12! \cdot 15!}{16! \cdot 9!} = \dfrac{9!10 \times 11 \times 12 \times 15!}{15!16 \times 9!} = \dfrac{165}{2} = 82{,}5 \Rightarrow \boxed{\dfrac{12! \cdot 15!}{16! \cdot 9!} = 82{,}5}$

Demostrar que

$$1! = 1$$

Sugerencia: aplica la propiedad anterior

Problemas

1. Efectuar cada una de las siguientes operaciones:.

$M = \dfrac{10!}{8!} + \dfrac{12!}{10!} + \dfrac{15!}{13!}$; $N = \dfrac{20!}{18!} - \dfrac{30!}{29!}$

y $P = \dfrac{100!}{99!} + \dfrac{200!}{199!}$. Hallar M – N + P

A) 600 **B)** 652 **C)** 350 **D)** 330 **E)** 382

2. Hallar el valor de la siguiente expresión

$$A = \frac{10!}{8!+9!} + \frac{24!}{22!+23!} + \frac{30!}{28!+29!}$$

A) 60 **B)** 61 **C)** 63 **D)** 400 **E)** 600

3. El resultado de simplificar

$$E = \frac{8! + 9! + 10!}{8! + 9!} \text{ es:}$$

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

4. ¿Cuál es el resultado de simplificar:

$$B = \frac{(a+3)!}{(a+2)! + (a+1)!} \ ?$$

A) a **B)** $a+1$ **C)** $a+2$ **D)** $a+3$ **E)** $a+4$

5. Reducir

$$M = \frac{(n!)! \cdot n! + (n!)!}{(n! - 1)! \cdot n!}$$

A) $n!$ **B)** $n! + 1$ **C)** $(n+1)!$
D) $n! + 2$ **E)** $(n+2)$ ¡

6. Simplificar:

$$P = \frac{(n-1)! + n! + (n+1!)!}{n! + (n-1)!}$$

A) n **B)** $n-1$ **C)** $n+2$ **D)** $n+1$ **E)** 1

7.2. Principios de conteo

Consideremos que Iván tiene tres camisas de la marca Van Housen, obviamente en colores distintos, y cuatro camisas de la marca Camman, también en colores distintos entre sí y de las anteriores. Consideremos también que tiene cuatro pantalones de la marca Baronet.

a. ¿De cuántas maneras puede lucir las camisas?

Dado que hay tres camisas Van Housen hay tres modos de lucir las camisas Van Housen y cuatro maneras de lucir la camisas Camman. En total hay:

$$3 + 4 = 7$$

maneras de lucir las camisas.

b. ¿De cuántas maneras puede lucir una camisa Van Housen y un pantalón Baronet?

Si escoge la primera camisa Van Housen puede combinar con uno de los cuatro pantalones, entonces hay cuatro posibilidades para la primera camisa. **Ej**

Si escoge la segunda camisa, tiene nuevamente la posibilidad de combinar con cualquiera de los cuatro pantalones. Igualmente para la tercera camisa.

De modo que por cada camisa hay cuatro posibilidades y dado que hay tres camisas, en total hay:

$$3 \times 4 = 12$$

posibilidades.

Ej

V1 → B1 → V1B1
V1 → B2 → V1B2
V1 → B3 → V1B3
V1 → B4 → V1B4

V2 → B1 → V2B1
V2 → B2 → V2B2
V2 → B3 → V2B3
V2 → B4 → V2B4

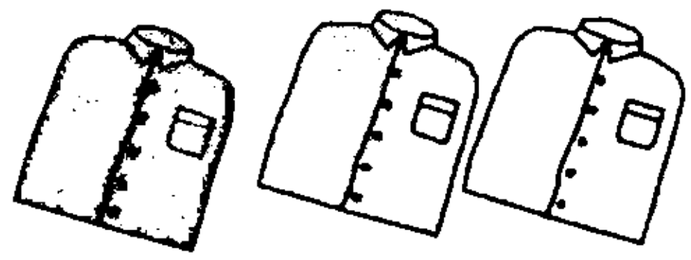
V3 → B1 → V3B1
V3 → B2 → V3B2
V3 → B3 → V3B3
V3 → B4 → V3B4

Llamemos **evento** al hecho de lucir una de las prendas de vestir mencionadas arriba.

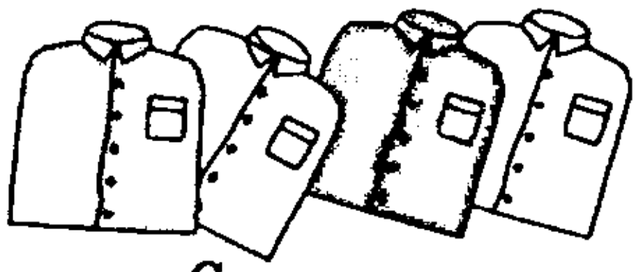
Los **eventos** *"lucir una camisa Van Housen" y "lucir una camisa Camman"* son **mutuamente independientes**, porque ambos eventos no pueden suceder simultáneamente, un evento sucede independientemente del otro.

Los eventos *"lucir una camisa Van Housen" y "Lucir un pantalón Baronet"* son **mutuamente dependientes**, porque por cada evento de escoger una camisa es posible escoger un pantalón distinto y cuando se escoge otra camisa se puede volver a escoger el mismo pantalón ya escogido para combinar con la primera camisa, esto es, cada una de las posibilidades del primer evento puede ser seguido por cualquiera de las del segundo evento.

Para contar los eventos independientes se puede utilizar el **principio de adición** y para contar el número de eventos mutuamente dependientes, el **principio de multiplicación**.



Van Housen



Camman

Baronet

Principio de adición

Si se puede realizar un **primer** procedimiento de ***m* maneras**, mientras que un **segundo** procedimiento se puede realizar de ***n* maneras**, y no se puede realizar los dos procedimientos simultáneamente, entonces, realizar cualquiera de ellos se puede lograr de

$m + n$ maneras

Principio de multiplicación

Supongamos que un **primer** procedimiento se puede efectuar de ***m* maneras** y un **segundo** procedimiento se puede efectuar de ***n* maneras**; también, que cada una de las maneras de efectuar el primero puede ser seguido de cualquiera de las maneras de efectuar el segundo. Entonces, el primer procedimiento seguido del segundo, se puede efectuar de

$m \times n$ maneras diferentes

Problema 1

En un salón de 18 hombres y 20 mujeres se elige al azar un delegado para que represente al salón en una asamblea de delegados del colegio. ¿Cuántas posibilidades hay para elegir dicho representante?

Resolución

Puede ser elegido uno de los *18* hombres o una de las *20* mujeres. Entonces, hay 18 + 20 = **38 posibilidades.**

Problema 2

En el problema anterior, en lugar de elegir un solo representante, se desea elegir una pareja formada por un hombre y una mujer. ¿Cuántas son las posibilidades de elegir?

Resolución

Escojamos uno de los *18* hombres, él puede hacer pareja con cualquiera de las *20* mujeres. Cada hombre tiene *20* posibilidades de hacer pareja. Dado que hay *18* hombres, entonces hay $18 \times 20 = 360$ maneras de hacer parejas, 360 maneras de elegir una pareja.

7.3. Combinaciones y permutaciones

Problema 3

Vamos a suponer que el directorio de una empresa está conformado por 5 socios, todos con iguales derechos para ocupar cualquier cargo de la empresa. Ellos deben elegir por sorteo una comisión de tres socios para que viajen al extranjero. Además, deben nombrar, también por sorteo, a tres de ellos para ocupar los cargos de Gerencia General (GG), Subgerencia (SG) y Gerencia Técnica (GT):

a. ¿De cuántas maneras diferentes pueden elegir la comisión de tres socios?

b. ¿De cuántas maneras diferentes pueden elegir a los tres cargos?

Resolución

a. Socios A, B, C, D, E

Posibles comisiones:

ABC	ADE
ABD	BCD
ABE	BCE
ACD	BDE
ACE	CDE

Son 10 posibilidades

b. Socios A, B, C, D, E

Posibles distribuciones de cargos:

GG	SG	GT
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

Hay *6* ordenamientos para cada combinación. Como hay *10* combinaciones:

Son $10 \times 6 = 60$

60 posibilidades

Cada comisión es un **grupo** de tres personas, sin alguna jerarquía. En las comisiones sólo interesa quiénes integran la comisión y **no interesa** el orden en que ocupen la comisión. Cada comisión es un grupo de tres elementos.

En la distribución de cargos, las mismas tres personas son consideradas 6 veces, porque las tres se pueden ordenar de 6 maneras.

En la distribución de cargos, aparte de saber quiénes asumen los tres cargos, **interesa el orden** en que los asumen. Cada manera de asumir los cargos es un ordenamiento de tres elementos.

Las maneras de escoger los tres miembros de una comisión de un total de 5 candidatos, se llama COMBINACIONES de 5 elementos tomando 3 a la vez.

Las maneras de elegir para tres cargos de un total de 5 candidatos, se llama PERMUTACIONES de 5 elementos tomando 3 a la vez. A1

A1 VARIACIONES

En muchos textos se hace la distinción entre variaciones y permutaciones.

Dado un conjunto de elementos, llaman permutación cuando intervienen en el ordenamiento todos los elementos y variación cuando intervienen parte de los elementos.

No es necesario hacer esta distinción para resolver problemas de este tema.

Combinaciones

Combinar n elementos tomándolos de k en k ($k \leq n$), es formar con los n elementos todos los **grupos** posibles diferentes entre sí de k elementos cada uno.

El número de combinaciones de n elementos tomados de k en k se puede calcular por:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Permutaciones

Permutar n elementos tomándolos de k en k, es ordenar de todas las maneras posibles los n elementos tomando k elementos para cada ordenamiento.

El número de permutaciones de n elementos tomando k a la vez, se puede calcular mediante:

$$P(n;k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Problema 4

Combinar los elementos A, B, C y D tomándolos de 2 en 2. Además indicar el número de combinaciones obtenidas.

Resolución

Elementos: A, B, C y D.
Combinaciones:

AB	BC
AC	BD
AD	CD

Son 6 combinaciones

Número de combinaciones

Si nuestro interés fuera solamente conocer el número de combinaciones, podríamos aplicar la relación:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!} \Rightarrow C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{24}{4} = \boxed{6}$$

Problema 5

Permutar los elementos A, B, C y D tomándolos de 2 en 2. Además indicar el número de permutaciones obtenidas.

Resolución

Elementos: A, B, C y D
Permutaciones:

AB	BA	BC	CB
AC	CA	BD	DB
AD	DA	CD	DC

Son 12 permutaciones

Número de permutaciones

Si nuestro interés fuera solamente conocer el número de permutaciones, podríamos aplicar la relación:

$$P(n;k)=\frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow P(4;2)=\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4!}{2!}=\frac{24}{2}=\boxed{12}$$

Problemas

1. ***En un salón hay 15 alumnas y 24 alumnos. ¿Cuántas parejas diferentes se pueden formar con los alumnos de este salón?***

A) 120 **B)** 240 **C)** 300 **D)** 360 **E)** 450

2. ***En un estante hay 5 libros de aritmética y 8 libros de geometría. ¿De cuántas maneras diferentes se puede coger un libro de aritmética y otro de geometría?***

A) 20 **B)** 25 **C)** 30 **D)** 35 **E)** 40

3. ***Dos amigos que desean comprar polos se encuentran en un bazar. La vendedora les ofrece polos en 8 modelos diferentes. Cada modelo es de color distinto. ¿De cuántas maneras diferentes pueden escoger un polo cada uno, si los dos amigos no desean tener el mismo modelo?***

A) 49 **B)** 56 **C)** 64 **D)** 72 **E)** 80

4. ***Dados los elementos: A, B, C y D ¿Cuántas combinaciones se obtienen***
   a) tomándolos de 3 en 3?
   b) tomándolos de 1 en 1?
   c) tomándolos de 4 en 4?

A) 4; 4; 4 **B)** 4; 1; 1 **C)** 1; 4; 1
D) 4; 4; 1 **E)** 1; 4; 4

5. ***Dados los elementos: A, B, C y D ¿Cuántas permutaciones se obtienen***
   a) tomándolos de 3 en 3?
   b) tomándolos de 1 en 1?
   c) tomándolos de 4 en 4?

A) 24; 1; 24 **B)** 24; 4; 4 **C)** 24; 1; 4
D) 24; 4; 1 **E)** 24; 4; 24

6. ***Demostrar las siguientes identidades.***

a. $C_{20}^{100}=\dfrac{81\times82\times83\times\ldots\times100}{20!}$

b. $C_k^n=\dfrac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)n}{k!}$

c. $C_k^n=C_{n-k}^n$

d. $C_k^n=\dfrac{P(n,k)}{k!}$

7. *Señalar si son combinaciones (C) o permutaciones (P) cada uno de los siguientes eventos:*

a. Embolsar 8 juguetes de 3 en 3

b. Acomodar 5 personas en una banca de 4 asientos

c. De un estante donde hay 10 libros coger dos de ellos

d. Obtener el primer o segundo lugar en una competencia de atletismo donde participan 20 atletas

e. Pintar tres carros de colores diferentes teniendo disponibles 5 colores

A) CPCPP **B)** CPCPC **C)** CPPPP
D) PPCPP **E)** PCPPC

8. *Con los dígitos 4; 6; 8 y 9; ¿cuántos números de tres cifras, sin repetir alguna de ellas, se puede formar?*

A) 12 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 24 **E)** 36

9. *Con los dígitos 1; 5; 7; 8 y 9, ¿cuántos números pares de cuatro cifras se puede formar sin repetir cifra alguna en el mismo número?*

A) 18 **B)** 24 **C)** 30 **D)** 60 **E)** 120

10. *¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar las letras de la palabra HOMBRE, de manera que siempre esté presente la sílaba RE?*

A) 24 **B)** 60 **C)** 72 **D)** 80 **E)** 120

7.4 Permutaciones con repetición y permutaciones circulares

Tanto en las combinaciones como en las permutaciones que hemos visto, los elementos que han intervenido son diferentes entre sí. A continuación vamos a analizar el caso en que participan elementos repetidos, elementos que no son distinguibles entre sí:

Problema 1

¿Cuál es el número de permutaciones de las letras de la palabra NENA?

Resolución

Vamos a realizar las permutaciones de las letras de NENA en dos formas: en una, no vamos a distinguir las dos N y en la otra las distinguimos mediante subíndices como N_1 y N_2.
El número de permutaciones de 4 letras distintas es 4!. El número de permutaciones de N_1 y N_2 es 2! = 2. Por cada permutación sin distinguir las N, hay 2 permutaciones haciendo la distinción:

2×(*número de permutaciones de las letras N, E, N, A*) = (número de permutaciones de las letras N_1, E, N_2, A)

NNAE	N_1N_2AE	N_2N_1AE
NNEA	N_1N_2EA	N_2N_1EA
NANE	N_1AN_2E	N_2AN_1E
NENA	N_1EN_2A	N_2EN_1A
ANNE	AN_1N_2E	AN_2N_1E
ENNA	EN_1N_2A	EN_2N_1A
ANEN	AN_1EN_2	AN_2EN_1
ENAN	EN_1AN_2	EN_2AN_1
AENN	AEN_1N_2	AEN_2N_1
EANN	EAN_1N_2	EAN_2N_1
NAEN	N_1AEN_2	N_2AEN_1
NEAN	N_1EAN_2	N_2EAN_1

Si denotamos por *P(4: 2; 1; 1)* el número de permutaciones de 4 elementos, donde 2 de ellos se repiten, tendríamos:

$$P(4:2;1;1) = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = \frac{24}{2} = 12$$

Rpta.: 12

Problema 2

¿Cuántas son las permutaciones, de todas las letras de la palabra RELEER?

Resolución

Hay 3! = 6 permutaciones si se diferencia la E de cada permutación en la que se distingue E y 2! = 2 al distinguir la R. Luego:

3! × 2! × (*número de permutaciones de las letras R, E, L, E, E, R*) = (*número de permutaciones de las letras* R_1, E_1, L, E_2, E_3, R_2)

De donde:

$$P(6:3;2;1) = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = \frac{\cancel{3!}\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{\cancel{3!}\cdot 2} = \frac{120}{2} = 60$$

Rpta.: 60

En general, si hay n objetos con n_1 de un tipo, con n_2 de un segundo tipo, ... , n_k de un k-ésimo tipo, donde $n_1 + n_2 + n3 + ... + n_k = n$, entonces, el número de permutaciones de los n elementos está dado por:

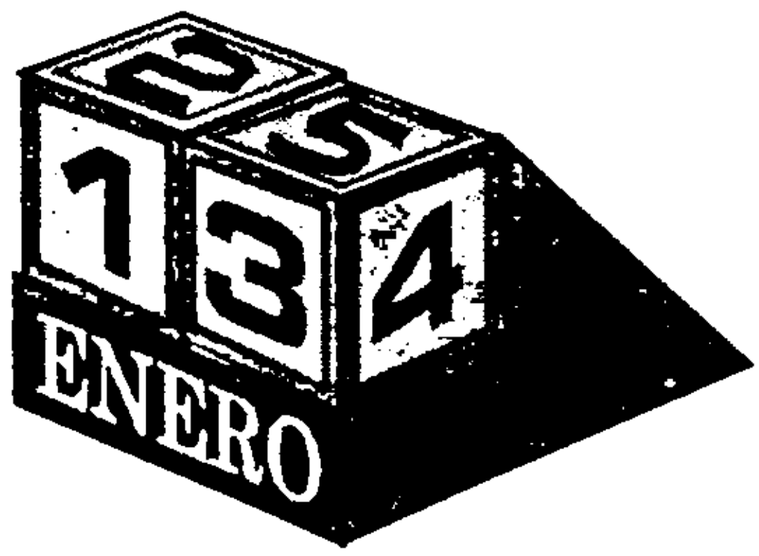
$$P(n:n_1;n_2;n_3...;n_k) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!...;n_k!}$$

Problema 3

¿Cuántos números de 5 cifras, son tales que tres de sus cifras es 8 y las dos restantes es 7?

Divertijo 1

Un calendario de sobremesa (Ver figura) tiene la siguiente particularidad: Para señalar el día se colocan los cubos de manera que sus caras frontales den la fecha. En cada cubo, cada una de las caras porta una cifra, distribuidos con tanto acierto que siempre podemos construir fechas 01; 02; 03;; ...; 31; disponiendo adecuadamente. ¿Con qué cifras están marcadas las caras no visibles de estos cubos? Dar como respuestas la suma de ellos.



Divertijo 2

La reyna "vanidosa I" compró 27 perlas, todas del mismo color y tamaño. Días después de la compra, informaron a la reyna, que una de las perlas es falsa, la cual podía identificarla por pesar menos que las demás. Inmediatamente la reyna encargó a uno de sus ministros la identificación de la perla falsa. ¿Cuántas pesadas tuvo que efectuar el ministro, si para ello utilizó una balanza de 2 platillos?

Resolución

Son 5 elementos donde 3 son de un primer tipo y 2 de un segundo tipo. Luego, el número de permutaciones es:

$$P(5:3;2) = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2} = 10$$

Rpta.: 10

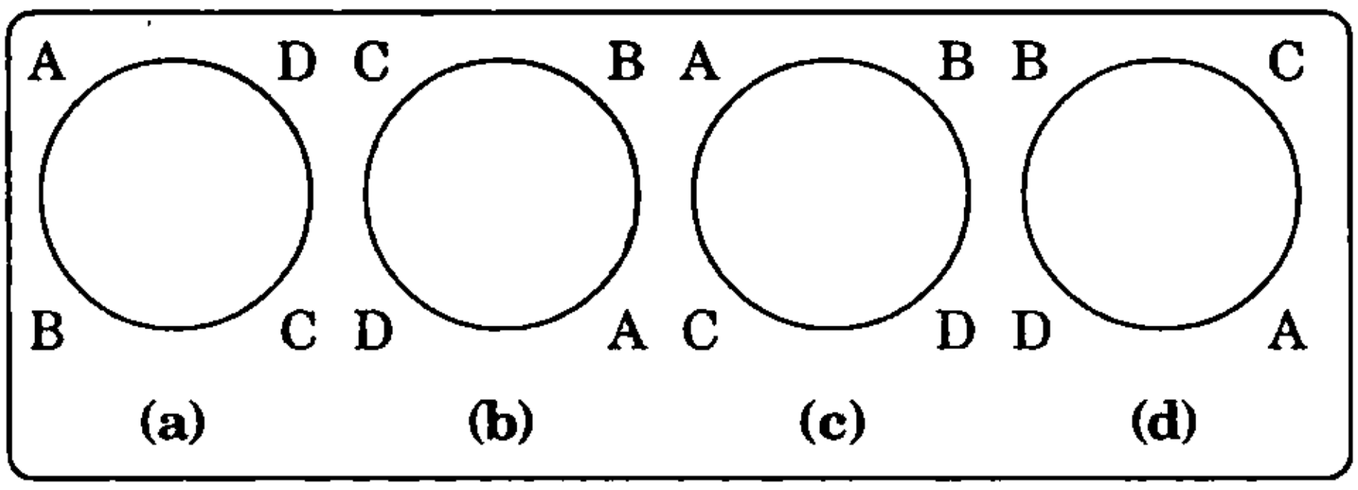
Permutaciones circulares

Problema 4

Si se sientan 4 personas A, B, C y D alrededor de una mesa circular, ¿cuántas disposiciones circulares distintas se pueden realizar tomando a uno de ellos como fijo?

Resolución

Observa las siguientes disposiciones circulares:



Las disposiciones (a) y (b) se consideran iguales, porque partiendo de una de las letras, por ejemplo A, y en sentido horario, listamos las letras y hallamos la misma disposición lineal: A D C B.

Las disposiciones (b), (c) y (d) son distintas, ya que mediante el mismo proceso anterior obtenemos:

A D C B A B D C A D B C

que son disposiciones lineales diferentes. Para calcular el número de permutaciones circulares, ubicamos uno de los elementos en un punto fijo, quedando ubicaciones libres donde se disponen las tres letras como si fuera una permutación lineal.

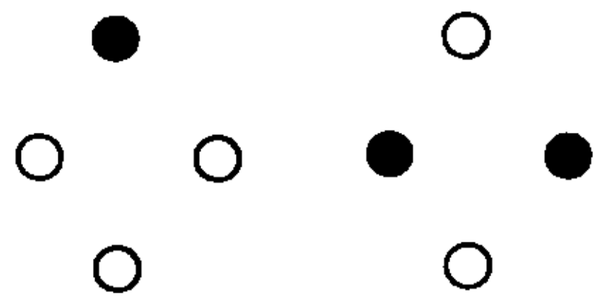
Luego, el número de permutaciones circulares de las 4 personas, sería 3!. Esto es:

$$P_c(4) = (4-1)! = 3! = 6$$

Rpta.: 6

Divertijo 3

Un día Perico se puso a jugar solo a las canicas. Hizo 4 hoyos formando un rombo. Puso una canica negra en un vértice y blancas en los hoyos restantes. Hizo luego otra figura, poniendo canicas negras en dos vértices opuestos y blancas en lo otros dos. ¿Cuántas figuras diferentes pudo haber hecho?



Divertijo 4

El profesor de aritmética propone a sus alumnos que tomen un número cualquiera de 5 cifras, luego les pide que hallen la diferencia entre el número tomado y el que resulte de invertir el orden de las cifras del mismo, en seguida tachen una de las cifras de la diferencia y sumen las cifras restantes. Con el conocimiento de esta suma, el profesor promete adivinar la cifra tachada. Si uno de los alumnos le proporciona 24 como resultado. ¿Cuál será la respuesta del profesor?

En general, si permutamos circularmente n elementos, tomando **uno fijo como referencia**, quedan $n - 1$ para realizar las permutaciones, de modo que:

$$\mathbf{Pc(n) = (n - 1)!}$$

Problema 5

Ricoto ha convocado a una reunión urgente a 7 de sus colaboradores para tratar asuntos relacionados con su empresa. Ellos se disponen a sentar alrededor de una mesa redonda para iniciar la discusión. ¿En cuántas disposiciones diferentes pueden sentarse los 8 hombres, si el asistente de Ricoto tiene que sentarse a su lado?

Resolución

Ricoto y su asistente lo podemos considerar como un solo elemento, con lo que habría $P_c(6) = (6 - 1)! = 5! = 120$ disposiciones.

Pero el asistente puede sentarse al lado derecho o izquierdo de Ricoto, por lo que habría 2 disposiciones por cada una de las 120.

Por lo tanto, se pueden sentar en $2 \times 120 = 240$ disposiciones diferentes.

Rpta.: 240

Problemas

1. ***¿Cuál es el número de permutaciones de las letras de la palabra MAMA?***

   A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

2. ***¿Cuál es el número de permutaciones de las letras de la palabra: TORRENTE?***

   A) 5040 **B)** 720 **C)** 1440
   D) 2150 **E)** 5400

3. ***Supóngase que disponemos de 5 bolas rojas y 4 azules. ¿En cuántas disposiciones diferentes se pueden ubicar en fila las 9 bolas?***

   A) 120 **B)** 126 **C)** 132
   D) 156 **E)** 162

4. ***Se disponen de 8 vasos diferentes, 5 de las cuales se deben llenar con vino y los 3 restantes con pisco. ¿De cuántas maneras diferentes se puede realizar el llenado?***

   A) 34 **B)** 36 **C)** 48 **D)** 50 **E)** 56

5. ***¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar 5 elementos alrededor de un círculo?***

   A) 20 **B)** 21 **C)** 24 **D)** 30 **E)** 120

6. ***¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar 7 personas para sentarse alrededor de una mesa circular?***

   A) 120 **B)** 720 **C)** 840
   D) 900 **E)** 600

7. ***¿De cuántas maneras diferentes se pueden disponer 7 niños para jugar a la ronda, si uno de ellos no quiere separarse de su hermanito?***

   A) 120 **B)** 720 **C)** 600
   D) 240 **E)** 1440

7.5. Nociones de probabilidad

Si introducimos en una caja, 8 bolas rojas y 2 blancas, y proponemos, extraer de la caja una bola al azar y te pido que adivines el color de la bola antes de mostrártela. ¿Qué color elegirías? ... , obviamente el rojo porque **"es más probable"** que sea roja que blanca.

La teoría de las probabilidades es una parte de la matemática que se aplica sobre hechos cuyo resultado no se puede determinar con certeza, por eso se llaman "experimentos aleatorios". Si bien, la probabilidad no determina cuál será el resultado de un experimento aleatorio, pero puede "medir" el grado de posibilidad de ocurrencia de cada resultado.

Así, si extraemos una bola de la caja, no podemos calcular y asegurar que es roja o blanca, pero podemos afirmar que la posibilidad de que sea roja es de 8 en 10; mientras que de la blanca es de 2 en 10.

Esta información es tan valiosa en el campo de la toma de decisiones, que el estudio de las probabilidades se ha convertido en una rama muy importante de la matemática aplicada.

Problema 1

En una caja se introducen fichas numeradas del 1 al 9. Se extrae una ficha al azar y se lee el número de la ficha.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de la ficha sea mayor que 7?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de la ficha sea par?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de la ficha sea impar y menor que 6?

Resolución

Para el cálculo de las probabilidades es importante distinguir dos conjuntos asociados a los resultados del experimento aleatorio:

Los resultados posibles.- *Al extraer la ficha, el número de la ficha puede ser cualquiera de los números del 1 al 9. Entonces se dice que hay 9 CASOS POSIBLES (Cp).*

Los resultados favorables.- *Un resultado se considera favorable si es mayor que 7, en el caso de la pregunta a), porque queremos calcular la probabilidad de que el número de la ficha sea mayor que 7.*

Los resultados favorables son, 8 y 9. Entonces se dice que hay 2 CASOS FAVORABLES (Cf)

a. Para fines de este texto, vamos a definir la probabilidad de un evento P(E) como el cociente del número de casos favorables en que puede ocurrir el evento, entre el número de casos posibles o resultados posibles del experimento aleatorio.

$$P(>7) = \frac{\text{Número casos favorables (Cf)}}{\text{Número de casos posibles (Cp)}} = \frac{2}{9}$$

Rpta.: $\frac{2}{9}$

b. Dado que el problema está referido al mismo experimento, el número de resultados posibles sigue siendo 9. ($Cp = 9$)

El resultado, en este caso, es favorable cuando el número es par: 2; 4; 6 y 8. Son 4 resultados o casos favorables ($Cf = 4$).

Luego:

$$P(par) = \frac{Cf}{Cp} = \frac{4}{9}$$

Rpta.: $\frac{4}{9}$

c. En este caso, los resultados favorables son: 1; 3 y 5; que son 3 casos favorables. Como en los casos anteriores, el número de casos posibles sigue siendo 9. Luego:

$$P(impar < 6) = \frac{Cf}{Cp} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Rpta.: $\frac{1}{3}$

Problema 2

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda legal, salga cara?

Resolución

Los resultados del lanzamiento de una moneda son sólo 2: cara (C) o sello (S). Entonces $Cp = 2$.

Hay un solo resultado favorable, cuando sale cara. Entonces $Cf = 1$. Luego:

$$P(cara) = \frac{Cf}{Cp} = \frac{1}{2}$$

Rpta.: $\frac{1}{2}$

Problema 3

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar consecutivamente una moneda tres veces, en los dos primeros lanzamientos salga cara?

Resolución

Primero listemos todos los resultados posibles de los tres lanzamientos.
Sale cara (C) y sale sello (S):

1°	2°	3°	
C	C	C	← favorable
C	C	S	← favorable
C	S	C	
S	C	C	
C	S	S	
S	C	S	
S	S	C	
S	S	S	

Son 8 resultados posibles ($Cp = 8$) de los cuales, sólo 2 son favorables ($Cf = 2$). Luego:

$$P(CC) = \frac{Cf}{Cp} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Rpta.: $\frac{1}{4}$

Problema 4

De una urna que contiene igual número de bolas rojas y bolas blancas, se extraen al azar 3 bolas. ¿Cuál es la probabilidad que 2 de las bolas sean rojas?

Resolución

Casos posibles: RRR, RRB, RBB, BBB.

$$\Rightarrow \quad Cp = 4$$

Casos Favorables: RRB $\Rightarrow$ $Cf = 1$

$$\therefore \ P(RRB) = \frac{1}{4}$$

Rpta.: 0,25

Problemas Resueltos

Problema 1

Estoy en una juguería. Veo papaya, plátanos, piña, durazno. Deseo un jugo de dos frutas; ¿cuántas opciones tengo para escoger?

Resolución

Cada opción es la combinación de dos frutas. No interesa el orden. Luego:

$$\#\,opciones = C_2^4 = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{3\times4}{2} = 6$$

Rpta.: 6

Problema 2

Se tira un dado de 6 caras y un dado chino de cuatro caras. El número de maneras diferentes que pueden caer éstos es:

Resolución

El primero puede caer de 6 maneras y el otro de 4 maneras. Entre los dos de **6 × 4 = 24** maneras.

Rpta.: 24

Problema 3

En una biblioteca hay 10 libros latinos y 6 griegos. ¿De cuántas, maneras se puede colocar 5 libros en un estante, de los cuales 3 sean latinos y 2, griegos.

Resolución

$$C_3^{10}\times C_2^6 = \left[\frac{10\times9\times8}{3\times2}\right]\left[\frac{6\times5}{2}\right] = 1800$$

Rpta.: 1800

Problema 4

Una de las personas que asistió a una reunión observó que los apretones de manos entre los asistentes fueron 78. ¿Cuántas personas concurrieron a la reunión?

Resolución

Si "*n*" es el número de personas, cada una saludó a (*n* – a) personas, entonces hubieron $n(n-1)$ apretones de mano; pero aquí estamos contando dos veces cada saludo; luego:

$$\#\,apretones = \frac{n(n-1)}{2} = 78 \Rightarrow$$

$$n(n-1) = 13\times12$$

$$n = 13$$

Rpta.: 13

Problema 5

Seis niños participan en un concurso de ajedrez. Cada uno de ellos tiene que jugar una partida con cada uno de los demás. ¿Cuántas partidas se jugarán en total?

Resolución

Cada uno de los 6 juega 5 partidas, en consecuencia son **6×5 = 30** partidas. Pero en el razonamiento estamos contando los partidos de ida y vuelta. Ya que se trata de partidos de una sola vuelta, son **30÷2 = 15** solamente.

Rpta.: 15

Problema 6

El mayor número de banderas diferentes que se pueden construir disponiendo de

3 colores y con un máximo de 2 costuras es:

Resolución

Sean A, B y C los colores:

1° Sin costura: A, B y C → 3 banderas

2° Con 1 costura AB, BA, AC, CA, CB y BC → 6 banderas

3° Con 2 costuras: ABC, ACB, BAC, BCA, CAS, CBA, ABA, BAB, ACA, CAC, BCB, CBC → 12 banderas.

Total = 3 + 6 + 12 = 21 banderas.

Rpta.: 21

Problema 7

Supongamos que tenemos 5 objetos distintos y 3 cajas diferentes, deseamos averiguar en cuántas formas diferentes podemos colocar un objeto en cada caja.

Resolución

Sean los objetos A, B, C, D y E

Las cajas: (1), (2) y (3)

(1)	(2)	(3)	
☐	☐	☐	
A	**B**	**C**	... (α)
B	**C**	**A**	... (β)
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	

Nos preguntamos, si la situación (α) es lo mismo que la (β); observarás que no; luego, importa el orden, entonces se trata de **permutaciones**. ¿Qué elementos permutaremos? ... los objetos (que son 5 elementos); ¿de cuánto en cuánto vamos a permutar? ... de 3 en 3.

$$P(5;3)=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{2!\times 3\times 4\times 5}{2!}=60$$

Rpta.: 60

Problema 8

¿Cuántos comités de 3 miembros se pueden elegir de entre 8 personas?

Resolución:

Un comité estará constituido por un grupo de 3 personas, sin importar el orden en que han sido nombrados; esto se puede elegir de:

$$C_3^8=\frac{8!}{5!3!}=\frac{5!\times 6\times 7\times 8}{5!\times 6}=56\ maneras$$

Rpta: 56

Problema 9

Del problema anterior, ¿cuántos comités de 3 personas se pueden formar de modo que uno sea presidente; el 2do vicepresidente y el tercero secretario?

Resolución

En este caso interesa el orden en que van a formar el comité. Luego, este proceso se puede realizar de:

$$P(8;3)=\frac{8!}{(8-3)!}=\frac{5!\times 6\times 7\times 8}{5!}=336$$

maneras diferentes.

Rpta.: 336

Problema 10

Siete corredores, ¿de cuántas maneras diferentes pueden llegar en los tres primeros puestos?

Resolución

Interesa el orden en que llegan a la meta, luego:

$$P(7;3)=\frac{7!}{4!}=5\times 6\times 7=210$$

Rpta.: 210

Problema 11

Doris desea comprar una falda y una blusa. Un comerciante le muestra 5 faldas y 6 blusas de colores diferentes, en los modelos que a Doris le gusta; ¿de cuántas maneras distintas puede escoger lo que desea comprar?

Resolución:

Hay 5 maneras de escoger una falda de las 5 que hay y 6 maneras de escoger una blusa de las 6 que hay; una falda y una blusa se puede escoger de **5 × 6 = 30** maneras diferentes.

$$\#\,maneras = \begin{bmatrix} N°\ de\ mane- \\ ras\ de\ escoger \\ 1\ falda \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} N°\ de\ mane- \\ ras\ de\ escoger \\ 1\ bluza \end{bmatrix}$$

$\#\ maneras = 5 \times 6 = 30$

Rpta.: 30

Problema 12

En una urna hay 5 fichas numeradas del 1 al 5 y en otra urna hay 4 fichas numeradas del 6 al 9. Se saca una ficha de la primera urna y otra de la segunda urna. Con los números de las 2 fichas se forma un numeral. ¿Cuántos son todos los valores posibles de este numeral?

Resolución

Supóngase que el número de la ficha de la primera urna sea 3 y el de la ficha de la segunda urna sea 7, entonces con estos 2 números se pueden formar los numerales 37 y 73, es decir con cada par de números se pueden formar 2 numerales. Por tanto, para calcular todos los numerales posibles, primero hallaremos todos los pares posibles que se pueden formar con las fichas y luego este resultado lo multiplicaremos por 2.

$$\#\,valores\ posibles = 2 \begin{bmatrix} N°\ de\ fichas \\ de\ la\ 1^{ra} \\ urna \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} N°\ de\ fichas \\ de\ la\ 1^{ra} \\ urna \end{bmatrix}$$

$\#$ valores posibles $= 2 \times (5) \times (4) = 40$

Rpta.: 40

Problema 13

En el transcurso del mes de Marzo, un comerciante debe realizar 5 viajes a Ica y 3 viajes a Trujillo. ¿Cuántas maneras diferentes en cuanto al orden hay, para realizar estos 8 viajes?

Resolución

I : viaja a Ica

T : viaja a Trujillo

Luego, las posibilidades son:

ITTITIII

TIIIITTI

TTTIIIII

⋮

Observe que son ordenamientos en los que un elemento se repite 3 veces (**T**) y un segundo elemento, 5 veces (**I**). Es un caso de permutaciones con repetición.

Entonces:

$$\#\,maneras = P_r(8:3;5) = \frac{8!}{3!5!} = \frac{5!\times 6\times 7\times 8}{6\times 5!} = 56$$

Rpta.: 56

Problema 14

Los hijos de la Sra. María son: Carlos, José, Roger, Carmen y Néstor, ninguno son mellizos. Si uno desea averiguar el orden en que nacieron estos hermanos, ¿cuántas posibilidades hay?

Resolución

Interesa el orden en que nacieron y además en cada ordenamiento entran los 5 herma-

nos, luego:

$$\#\ posibilidades = P(5;5) = \frac{5!}{(5-5)!} = 5! = 120$$

Rpta.: 120

Problema 15

Un comerciante tiene 4 pelotas blancas, 5 negras y 3 amarillas. Un día vende sus pelotas en el siguiente orden:

BBAANBBANNNN.

¿En cuántos otros órdenes podría haber vendido sus 12 pelotas?

Resolución

El número de órdenes está dado por:

$$P_r(12;4;5;3) = \frac{12!}{4!\,5!\,3!}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5!\times 6\times 7\times 8\times 9\times 10\times 11\times 12}{24\times 5!\times 6} = 27720$$

La respuesta a la pregunta es:

$$27720 - 1 = 27\,719$$

Rpta.: 27 719

Problema 16

De 6 números positivos y 5 número negativos, se escogen 4 números al azar y se multiplican. Calcular el número de formas que se pueden multiplicar, de tal manera que el producto sea positivo.

Resolución

Para que el producto sea positivo, el número de factores negativos en la multiplicación debe ser par.

1ra Posibilidad: 0 números (–) y 4 números (+)

$$\#\ formas\ de\ multiplicar = C_4^6 = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$$

2da Posibilidad: 2 números (–) y 2 números (+)

$$\#\ formas\ de\ multiplicar = \begin{bmatrix} N°\ de\ maneras \\ de\ escoger \\ 2\ números\ (-) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} N°\ de\ maneras \\ de\ escoger \\ 2\ números\ (+) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{6!}{4!\,2!} \times \frac{5!}{3!\,2!} = 150$$

3ra Posibilidad: 4 números (–) y 0 números(+)

$$\#\ formas\ de\ multiplicar = C_4^5 = \frac{5!}{4!} = 5$$

Total = 15 + 150 + 5 = 170

Rpta.: 170

Problema 17

¿Cuántos triángulos se pueden formar como máximo, empleando n rectas coplanares?

Resolución

Cada 3 rectas coplanares forman como máximo un triángulo, cuando ninguna recta es paralela a otra. Luego el máximo número de triángulos está dado por: C_3^n

Rpta.: C_3^n

Problema 18

¿Cuántas palabras diferentes de 4 letras, aunque no necesariamente tengan sentido, se puede formar con las letras de la palabra AMOR, de modo que:

*a) Tengan siempre la sílaba **MA***

*b) La letra O esté siempre antes que **R***

Dar como respuesta, la suma de los 2 resultados.

Resolución

a) Las palabras posibles son: **MA**OR, **MA**RO, R**MA**O, O**MA**R, OR**MA**, RO**MA**

Observe que **MA**, se puede tomar como un solo elemento

Luego: # la palabras = P(3; 3) = 3! = 6

b) Las palabras posibles son: OMAR, OAMR, AMOR, MAOR, etc

Obsérvese que, si hiciéramos todas las permutaciones con las 4 letras, en la mitad de ellas la letra O estaría antes que R y en la otra mitad, R estaría antes O. Luego:

$$\begin{pmatrix} N°\,Palabras\ tales\ que \\ O\ esté\ antes\ que\ R \end{pmatrix} = \frac{1}{2}P(4;4) = \frac{1}{2}\times 4! = 12$$

La respuesta es entonces: 6 + 12 = 18

Rpta.: 18

Enunciado

Don Rafael y su esposa María organizaron una reunión, teniendo como invitados a su sobrina Nora y su esposo Darío, su hija Rosario y su novio Juan y los vecinos de la casa: Luis, Alberto y Carmen; por ende, la reunión está constituida por 5 hombres y 4 mujeres. (Probs. 19 - 22)

Problema 19

¿Cuántas parejas mixtas se pueden formar con todos los asistentes?

Resolución

de parejas

= [# de hombres]×[# de mujeres]= 5 × 4 = 20

Rpta: 20

Problema 20

¿Cuántos grupos de 5 personas se pueden formar con todos los asistentes, de modo que 3 sean hombres y 2 mujeres?

Resolución

$$N°de\ grupos = \begin{bmatrix} N°\ de\ modos \\ de\ escoger \\ 3\ \ hombres \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} N°\ de\ modos \\ de\ ecoger \\ 2\ \ mujeres \end{bmatrix}$$

$$N°\,de\,grupos = C_3^5 \quad \times \quad C_2^4 = \frac{5!}{2!3!}\times\frac{4!}{2!2!} = 60$$

Rpta.: 60

Problema 21

¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar las 9 personas, de modo que las esposas y las novias estén junto y a la derecha de sus respectivas parejas?

Resolución

Nos interesa el orden en que pueden sentarse, además de acuerdo al enunciado del problema, a cada pareja podemos tomarlo como un solo elemento, así tendríamos sólo 6 elementos para permutar.

maneras = P(6; 6) = 6! = 720

Rpta.: 720

Problema 22

¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar de modo que todas las mujeres estén juntas y los hombres por su parte?

Resolución

$$N°de\ maneras = 2\times\begin{bmatrix} N°\ de\ maneras \\ de\ sentarse\ las \\ 4\ \ mujeres \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} N°\ de\ maneras \\ de\ sentarse\ los \\ 5\ \ hombres \end{bmatrix}$$

$N°\,de\,maneras$

= 2×P(4; 4) × P(5; 5) = 2×24 × 120 = 5 760

Rpta.: 5 760

Problema 23

En una urna hay 8 bolas negras y 5 bolas blancas. Se extrae una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad que sea de color negro?

Resolución

- Al extraer una bola al azar, pueden salir cualquiera de las 13 bolas, entonces $Cp=13$
- Que la bola extraída sea de color negro, puede suceder solamente en el caso de que salga una de las 8 bolas negras, o sea, $Cf = 8$

$\therefore$ Probabilidad que la bola sea negra es:

$$P(N) = \frac{8}{13}$$

Rpta: $\frac{8}{13}$

Problema 24

En una habitación, 6 personas tienen respectivamente S/. 1, S/. 2, S/. 3, S/. 4, S/. 5 y S/. 6. Se eligen 3 personas al azar y se apunta el número de soles que tienen cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que el menor número de soles sea 3?

Resolución

El conjunto de soles que tienen es: A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}; si se eligen 3 números al azar de este conjunto, los casos posibles son:

$$C_p = C_3^6 = \frac{6!}{3!3!} = 20 \text{ elementos}$$

Los subconjuntos de A con 3 elementos, en los que 3 es el menor, son: {3, 4, 5}, {3, 4, 6}, {3, 5, 6}, que son 3, de modo que $Cf = 3$

Luego: la probabilidad pedida es:

$$P = \frac{3}{20}$$

Rpta.: $\frac{3}{20}$

Problema 25

¿Cuál es la probabilidad que al lanzar 3 veces una moneda, se obtenga 2 caras?

Resolución

Al lanzar 3 veces una moneda, los resultados posibles son: sss, ssc, **scc**, ccc, **ccs**, **csc**, scs, css $\Rightarrow Cp = 8$

- $Cf = 3$ (Las que están en negritas)

Luego: probabilidad pedida es: $P = \frac{3}{8}$

Rpta: $\frac{3}{8}$

Problema 26

Se lanza un dado legal. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un puntaje mayor que 2?

Resolución

Los posibles puntajes son:

1; 2; 3; 4; 5 y 6 $\Rightarrow Cp = 6$

Los puntajes favorables son:

3; 4; 5 y 6 $\Rightarrow Cf = 4$

$$P(A) = \frac{C_f}{C_p} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Rpta.: $\frac{2}{3}$

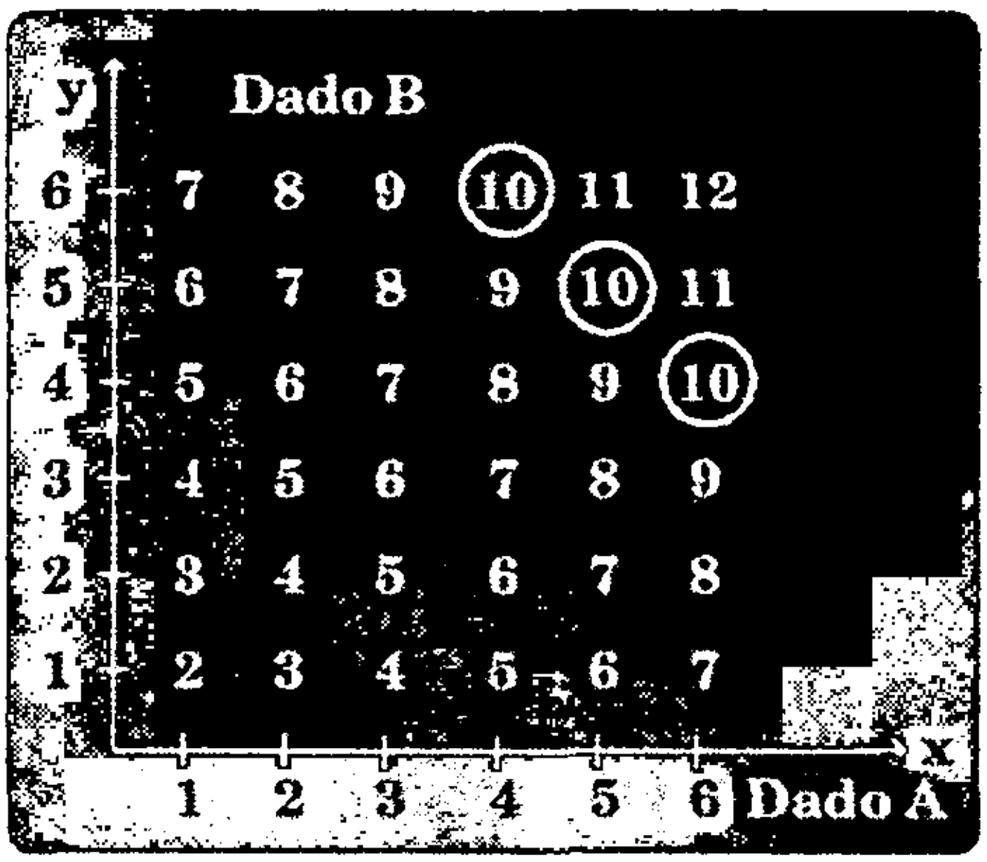
Problema 27

Si se lanzan 2 dados, ¿Cuál es la probabilidad de obtener 10 puntos?

Resolución

Primero hallemos todos los puntajes posibles que se pueden obtener lanzando 2 dados. Para ello haremos uso de los ejes cartesianos. En el eje X graficamos los puntajes que tiene el dado A, lo propio hacemos

en el eje Y para el dado B. Uniendo un puntaje del dado A con cualquiera de los puntajes que puede obtenerse en el dado B, obtenemos el puntaje obtenido en el lanzamiento de los dos dados, lo que está representado en el plano.



Nótese que todos los puntajes posibles que se pueden obtener lanzando 2 dados son 36. (Los números en el plano). Entonces: $Cp = 36$

Los casos posibles son 3 (en círculo). O sea $Cf = 3$

∴ Probabilidad de obtener 10 puntos es

$$P(10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Rpta: $\frac{1}{12}$

De acuerdo a la distribución de probabilidades hecha a la izquierda, el puntaje que saldrá con mayor frecuencia al lanzar 2 dados reiteradas veces, es el punto 7 y los puntajes que saldrán con menos frecuencia son el 2 y el 12.

- $P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
- $P(2) = P(12) = \frac{1}{36}$

La probabilidad de que al lanzar 2 dados se obtenga 7, es 6 veces la probabilidad de obtener el punto 2 ó 12.

Problemas Propuestos

1. Se escriben al azar los dígitos 1; 2 y 3. ¿En cuántos casos pueden estar desordenados?

A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 10

2. ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 3; 5; 7; 4 y 8, sin repetirlos en el mismo número?

A) 30 **B)** 60 **C)** 120 **D)** 72 **E)** 48

3. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse 6 hojas de examen si deben quedar de tal manera que la hoja mejor contestada y la peor contestada queden juntas?

A) 120 **B)** 240 **C)** 360
D) 720 **E)** 540

4. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse una consonante y una vocal de las letras de la palabra RAZONAMIENTO?

A) 10 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 24 **E)** 18

5. Pedro, Luis, José, Juan, Hugo, Jorge y Carlos, son candidatos para formar parte de la comisión de delegados del salón. Si esta comisión debe tener 3 miembros, ¿cuántas comisiones diferentes se pueden formar con dichos candidatos?

A) 42 **B)** 35 **C)** 32 **D)** 30 **E)** 70

6. Se van a examinar seis pruebas de examen, dos de ellas de matemática. ¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse las pruebas, de manera que las dos sobre matemática no estén en sucesión?

A) 450 **B)** 460 **C)** 480
D) 490 **E)** 500

7. Con cinco colores: blanco, rojo, negro, azul y amarillo (siempre utilizando el amarillo) ¿Cuántas banderas de tres franjas horizontales de distintos colores se podrá formar?

A) 12 **B)** 24 **C)** 36
D) 48 **E)** 18

8. Hay 5 finalistas en el concurso de aritmética, 6 en biología y 4 en lengua. ¿De cuántas maneras pueden alcanzar el primer lugar, si todos están en la posibilidad de ganar el cóncurso en su respectiva asignatura?

A) 24 **B)** 30 **C)** 60 **D)** 120 **E)** 180

9. Se tienen 3 niños y 3 niñas. De cuántas maneras distintas se pueden ubicar en forma alternada en una butaca de seis asientos

A) 36 **B)** 18 **C)** 72 **D)** 24 **E)** N. A.

10. En el último torneo juvenil de Ajedrez participaron 60 personas, donde todos compitieron una vez y se observó que el número de partidas ganadas fue igual al número de partidas empatadas. ¿Cuántos jugadores terminaron empatados?

A) 10 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 25 **E)** 30

11. En un estante hay 4 libros de aritmética y 5 del álgebra. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden coger 5 libros de modo que 2 sean de aritmética y 3 de álgebra?

A) 30 **B)** 60 **C)** 54 **D)** 24 **E)** 120

12. ¿Cuántos números de 5 dígitos tienen como sus 2 últimas cifras 2 y 5 en este orden?

A) 900 **B)** 990 **C)** 899
D) 998 **E)** 999

13. En una tienda hay 6 camisas y 5 pantalones que me gustan, todos diferentes. Si decido comprar 3 camisas y 2 pantalones, ¿de cuántas maneras diferentes puedo escoger las prendas que me gustan?

A) 10 **B)** 20 **C)** 100
D) 200 **E)** 150

14. En una urna hay 6 pares de guantes negros y 8 pares de calcetines blancos. El menor número de extracciones de 1 en 1 y al azar que se deben realizar para obtener con seguridad un par de guantes negros utilizables es x y un par de calcetines blancos es y; entonces (x + y), es:

A) 45 **B)** 36 **C)** 44 **D)** 37 **E)** 30

15. En el club de Rocío hay 8 varones y 6 mujeres, incluida ella. Para participar en las elecciones, desean formar una lista de 6 personas (mitad varones y mitad mujeres) encabezada por Rocío. ¿De cuántas maneras se puede formar esta lista?

A) 650 **B)** 560 **C)** 360
D) 120 **E)** 210

16. De la ciudad A hasta la ciudad B se conocen 7 caminos y de B a C, 5; determinar el número de caminos diferentes que conducen desde A hasta C pasando por B.

A) 12 **B)** 32 **C)** 34 **D)** 35 **E)** 37

17. ¿Cuántos triángulos, como máximo, forman 6 rectas coplanares?

A) 10 **B)** 14 **C)** 20 **D)** 36 **E)** 45

18. Si 4 forasteros llegan a un pueblo donde hay solamente 3 hoteles. ¿Cuál es el máximo número de maneras diferentes en que se pueden alojar estos forasteros, durante una noche en los hoteles mencionados?

A) 45 **B)** 36 **C)** 18 **D)** 60 **E)** 99

19. En una urna se tienen 5 fichas numeradas del 1 al 5. ¿Cuántas posibilidades hay de obtener 5 puntos al extraer 2 fichas al azar?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

20. Si en una urna tengo 5 fichas numeradas del 1 al 5, ¿cuál es la probabilidad de que al extraer 2 fichas al azar la suma sea 7?

A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{1}{20}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{7}$

21. El equipo de fulbito de un salón de clase debe escoger 2 madrinas, una para el equipo y otra para las camisetas. Si en total hay 6 candidatas, ¿de cuántas maneras diferentes se puede escoger las dos madrinas?

A) 10 **B)** 20 **C)** 15 **D)** 30 **E)** 40

22. En el campeonato de ajedrez por el aniversario de un colegio habrán premios diferentes para el 1er, el 2do y el 3er puesto. Si participan 5 semifinalistas, ¿de cuántas maneras diferentes pueden ganar los premios?

A) 20 **B)** 30 **C)** 40 **D)** 50 **E)** 60

23. Seis personas deben levantar un cilindro circular recto lleno de agua, abierto en la parte superior. ¿De cuántas maneras se pueden colocar alrededor del cilindro?

A) 60 **B)** 24 **C)** 120 **D)** 720 **E)** 840

24. ¿Cuántas permutaciones se pueden realizar con las letras: M, E, R Y de modo que:

a) *M, siempre esté antes que R*
b) *Siempre aparezca la sílaba "ME"*
c) *M y E estén juntos*
d) *R y M no estén juntos*

Indique la alternativa que no corresponde a ninguna de las respuestas.

A) 20 **B)** 12 **C)** P(3; 3)
D) 2P(3; 3) **E)** 6

25. En un sorteo, para repartir un trabajo, las personas A, B, C introducen en una ánfora 4 fichas enumeradas del 1 al 4. Hallar la probabilidad de que al sacar cada uno de ellos una ficha.:

a) *El N° 3 le toque a B*
b) *El N° 1 se quede en la ánfora*
c) *Le toque un número par a "A"*
d) *No le toque 1 a C.*

Indique la alternativa que no corresponde a ninguna de las respuestas.

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{6}{24}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

26. Dos parejas de novios van al cine con las madres de las novias. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar en 6 asientos sin que se separen las parejas?

A) 24 **B)** 48 **C)** 96 **D)** 120 **E)** 100

27. En un campeonato de fútbol donde participan x equipos; cada equipo

juega una sola vez con cada uno de los restantes. Si en total hubo 55 partidos. Hallar "x".

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

28. Hallar la probabilidad que al lanzar 2 dados al azar:

a) *Se obtenga 8 puntos*
b) *Se obtenga más de 8 puntos*
c) *Se obtenga más de 11 puntos*
d) *Se obtenga un punto par*

Indique la alternativa que no corresponde a ninguna de las respuestas.

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{5}{36}$ **C)** $\frac{5}{18}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{36}$

29. Una pista atlética tiene 5 carriles. Tres atletas desean colocarse en la pista. ¿De cuántas maneras lo pueden hacer, de modo que un atleta ocupe un carril?

A) 20 **B)** 30 **C)** 10 **D)** 50 **E)** 60

30. Un lote consta de: 8 artículos buenos, 3 con pequeños defectos y 5 con defectos graves. Se elige un artículo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dicho artículo no tenga defecto y cuál que tenga un defecto grave?

A) $\frac{8}{15};\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{2};\frac{5}{16}$ **C)** $\frac{3}{5};\frac{3}{8}$

D) $\frac{1}{2};\frac{5}{24}$ **E)** $\frac{1}{4};\frac{5}{8}$

31. En una habitación se encuentran 4 mujeres y 5 hombres, 2 de los cuales deben recibir un premio por sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que los ganadores sean un hombre y una mujer?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{5}{9}$ **C)** $\frac{4}{9}$ **D)** $\frac{5}{8}$ **E)** $\frac{6}{13}$

32. En una urna hay 5 bolas rojas y 4 bolas blancas; de esta urna se extrae 2 bolas al azar y se observa que una de las bolas es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra sea de color blanco?

A) $\frac{4}{9}$ **B)** $\frac{5}{9}$ **C)** $\frac{4}{8}$ **D)** $\frac{5}{8}$ **E)** $\frac{2}{3}$

33. Indicar el número de proposiciones falsas, para dos números a y b enteros y positivos.

— $a! = b! \Rightarrow a = b$
— $\frac{a!}{b!} = \frac{a}{b}$
— $(a+b)! = a! + b!$
— $(a+1)! = (a-2)!\,(a-1)a\,(a+1)$
— $(a-2)! = a!\,(a-1)\,(a-2)$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

34. Si: $\overline{a} = (a-1)!$

Indicar lo erróneo.

A) $\overline{a+2} = (a+1)\,\overline{a+1}$

B) $\overline{a-1} = (a-2)\,\overline{a-2}$

C) $\overline{a} = (a-1)(a-2)\,\overline{a-2}$

D) $\overline{a+3} = (a+1)(a+2)\,\overline{a+1}$

E) $\overline{a+1} = (a-1)\,a\,\overline{a}$

35. En una urna hay 5 fichas numeradas del uno al 5. Si se extraen 2 fichas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que los números de las dos cifras sumen 5?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{1}{5}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{4}{5}$

36. En una lista de personas, donde figuran 40 hombres y 30 mujeres tres

de ellas se llaman María. Se escoge un nombre al azar y resulta que es de mujer. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las Marías?

A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{30}$ **C)** $\frac{3}{70}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{70}$

37. En una carrera de 100 metros planos, compiten los atletas A, B, C, D y E. ¿Cuál es la probabilidad de que B llegue inmediatamente después de A?

A) $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{1}{12}$ **D)** $\frac{1}{10}$ **E)** $\frac{2}{15}$

38. La Tinka (especie de lotería) juega con 36 bolillas numeradas del 1 al 36. El sorteo consiste en extraer al azar 6 bolillas una por una y el premio mayor corresponde al que acierta los números de las bolillas sin importar el orden en que se han sido extraídos... Si una persona compra 102 boletos de la Tinka todas con combinaciones distintas, ¿cuál es la probabilidad que tiene para obtener el premio mayor?

A) $\frac{1}{19096}$ **B)** $\frac{1}{3600}$ **C)** $\frac{1}{36000}$

D) $\frac{1}{4800}$ **E)** $\frac{1}{19069}$

39. En un club deportivo de 120 socios, los dirigentes han planteado que los deportistas no deben fumar, con tal fin, han hallado que 80 socios son deportistas, 70 socios fuman y 15 socios no fuman ni son deportistas. Para presidir la comisión de erradicación del tabaco en los deportistas, se elige al azar un socio y se detecta que es deportista; ¿cuál es la probabilidad de que fume?

A) $\frac{9}{21}$ **B)** $\frac{9}{14}$ **C)** $\frac{9}{16}$

D) $\frac{16}{21}$ **E)** $\frac{7}{16}$

40. Un grupo de 10 amigos (4 hombres y 6 mujeres), fueron de paseo. En el grupo se encuentra Andrés y Ana que son muy amigos. Si en un momento se escoge una pareja al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la pareja esté constituida por Andrés y Ana?

A) $\frac{1}{20}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** $\frac{1}{21}$

D) $\frac{1}{24}$ **E)** $\frac{1}{10}$

41. En una fiesta donde asistieron 80 personas, resulta que 60 beben, 40 fuman y 10 no fuman ni beben. Si de estas personas se escoge al azar una de ellas, ¿cuál es la probabilidad de que fume?

A) $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{8}$ **E)** $\frac{1}{80}$

42. Con los dígitos 1; 3; 5; 8 y 9. ¿Cuántos números de 3 cifras diferentes mayores que 300, se pueden formar?

A) 20 **B)** 24 **C)** 36 **D)** 48 **E)** 64

43. De las letras Z, A, F, I, R, O; ¿cuántas palabras claves de 4 letras se pueden formar, sin repetir ninguna letra?

A) 24 **B)** 36 **C)** 72 **D)** 144 **E)** 360

44. Hay 12 maneras en las cuales un artículo manufacturado puede tener un pequeño defecto y 10 maneras en las cuales pueden tener un defecto mayor. ¿De cuántas maneras puede ocurrir un defecto mayor y un defecto menor?

A) 22 **B)** 120 **C)** 60 **D)** 40 **E)** 240

45. En el problema anterior, ¿de cuántas maneras puede ocurrir 2 defectos menores y 2 mayores?

A) 2390 **B)** 1200 **C)** 2800
D) 2400 **E)** 2970

46. José, tiene en una bolsa 8 naranjas y 6 plátanos. Si quiere regalar 2 naranjas y 4 plátanos a su amiga Norma, ¿de cuántas maneras diferentes puede hacerlo?

A) 140 **B)** 120 **C)** 210
D) 420 **E)** 360

CLAVES DE RESPUESTAS

PÁGINA 322-323	1	2	3	4	5	6
	E	B	C	C	B	D

PÁGINA 327-328	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	E	B	D	E	-	A	D
	9	10						
	B	E						

PÁGINA 331	1	2	3	4	5	6	7
	C	A	B	E	C	B	D

PROBLEMAS PROPUESTOS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	B	B	B	C	C	D	C	E
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	A	D	D	B	D	C	E	B	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	A	C	A	D	C	C	D	E	B
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	B	D	E	C	A	A	A	C	D
41	42	43	44	45	46				
B	D	E	B	E	D				

Divertijos

1. 0; 1; 2; 6; 7; 8; 9; cuya suma es 33
2. Tres pesadas
3. 16
4. 3

Arquimedes de Siracusa
(287 a.n. e. – 212 a. n. e.)

Arquímedes de Siracusa

Nació el año 287 a. n. e. en Siracusa, Sicilia
Las mayores contribuciones de Arquímedes fueron en geometría. Sus métodos anticipados de cálculo integral 2 000 años antes de Newton y Leibniz.
Arquímedes era un nativo de Siracusa, Sicilia y estudió en Alejandría, volviendo en seguida a su patria. Dedicó su genio a la geometría, mecánica, física e Ingeniería.
Su geometría es una geometría de la medida. Efectúa cuadraturas de superficies planas y curvas.
Escribió varias obras las cuales se han ordenado según la época en que fueron escritas:

1. Esfera y cilindro.
2. Medida del círculo.
3. Geoides y esferoides.
4. Espirales.
5. Equilibrio de los planos y sus centros de gravedad.
6. Cuadratura de la parábola.
7. El arenario.
8. Cuerpos flotantes.
9. Los lemas.
10. El método.

Arquímedes demostró que la superficie de una esfera es cuatro veces la de uno de sus círculos máximos. Calculó áreas de zonas esféricas y el volumen de segmentos de una esfera. Demostró que "El área de un casquete esférico es igual a la superficie de un círculo que tiene por radio la recta que une el centro del casquete con un punto de la circunferencia basal".

El problema al cual le atribuía gran importancia era el de demostrar que "El volumen de una esfera inscrita en un cilindro es igual a 2/3 del volumen del cilindro". Como postrer homenaje se colocó una esfera inscrita en un cilindro. Asimismo demostró Arquímedes que la superficie de esta esfera era también los 2/3 de la superficie del cilindro.

Es tal vez más interesante su trabajo sobre Medida del círculo. Trata de la rectificación de la circunferencia y el área del círculo. Arquímedes es el primero que hizo un intento verdaderamente positivo sobre el cálculo de π = Pí asignándole un valor entre 3(10/71)

El método que empleó consiste en calcular los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos a un mismo círculo.

Admite, sin demostrarlos, los principios siguientes:

1. "La línea recta es la más corta entre 2 puntos".
2. "De 2 líneas cóncavas hacia el mismo lado y que tienen los mismos extremos, es mayor la que queda fuera de la otra".- ó como diríamos ahora "es mayor la línea circundante que la circundada". Este principio lo aplica al círculo y a los polígonos inscritos y circunscritos.
3. "De 2 superficies que pasan por una misma curva cerrada, cóncavas hacia un mismo lado, es mayor la exterior". También demuestra que "un círculo es equivalente a un triángulo que tiene por base la circunferencia y por altura el radio".

En otra de sus obras se refiere a la mecánica, especialmente a los principios de la palanca. Su punto de partida lo constituyen dos principios fundamentales, que bien pueden considerarse como axiomas de la mecánica.

1. "Si se tiene una palanca en cuyos extremos actúan pesos iguales, la palanca se equilibrará colocando el punto de apoyo en el medio de ella".
2. "Un peso se puede descomponer en dos mitades actuando a igual distancia del punto medio de la palanca".

Basándose en estos dos principios estableció las leyes de la palanca. Conocida es su famosa frase para hacer resaltar la aplicación de la palanca como máquina multiplicadora de fuerza: Deduce un punto de apoyo y os levantaré el mundo.

Cuenta la historia que Arquímedes un día que se encontraba en el baño observó que sus piernas podía levantarla fácilmente cuando estaban sumergidas. Esta fue la chispa que le permitió llegar a lo que ahora conocemos como "Principios de Arquímedes". Fue tan grande el entusiasmo que le produjo el descubrimiento de su principio que salió desnudo del baño corriendo por las calles de Siracusa y gritando su célebre exclamación de júbilo: ¡ Eureka!, ¡ eureka! que quiere decir ya lo encontré. Lo que había hallado era un método para determinar la densidad de los cuerpos tomando como unidad la del agua.

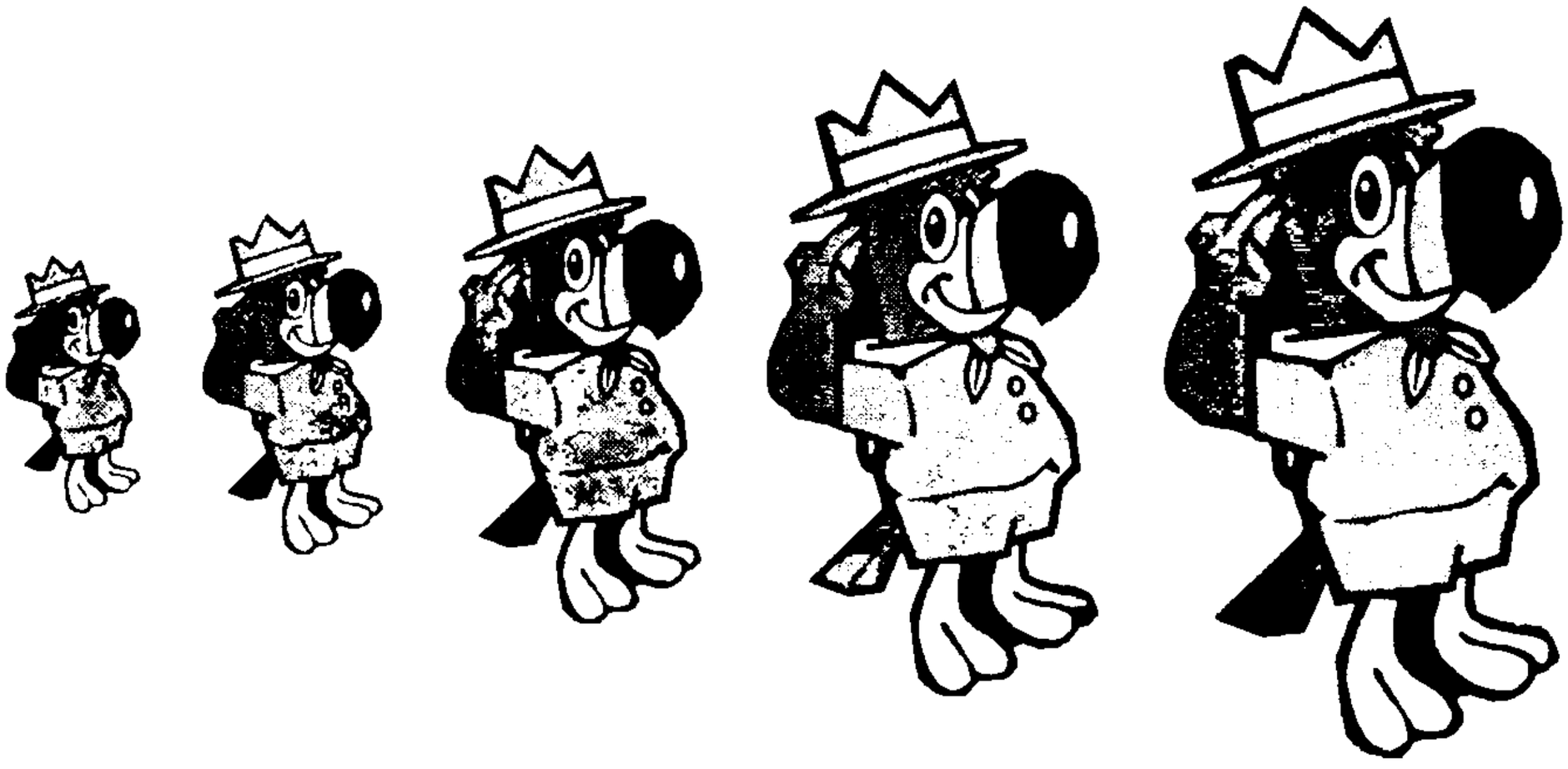
Es cierto que los conocimientos y descubrimientos matemáticos de Arquímedes son notables; sin embargo, son tal vez más importantes sus aportes y descubrimientos hechos en la Física.

En efecto, fuera del principio de la hidrostática ya nombrado anteriormente y de cuya importancia no es necesario insistir, inventó un sistema de poleas, el torno, la rueda dentada, el tornillo sinfín y una serie de por lo menos cuarenta inventos. Entre ellos es curioso mencionar un tornillo sinfín que se usaba para extraer el agua que había entrado a un barco, a los campos inundados por el Nilo, etc. En el campo militar se le debe la invención de catapultas, de garfios movidos por palancas para inventos mecánicos y ópticos logró defender durante tres años a Siracusa qué estaba sitiada por los romanos. Dícese que empleando espejos "ustorios" que son espejos cóncavos de gran tamaño, logró concentrar los rayos solares sobre la flota romana incendiándola. Finalmente, el año 212 cayó Siracusa en manos de los romanos siendo Arquímedes asesinado por un soldado a pesar de haber ordenado el cónsul Marcelo respetar la vida del sabio.

Falleció el año 212 a. n. e. en Siracusa, Sicilia

8

SUCESIONES Y SERIES



INTRODUCCION

En este capítulo vamos a estudiar, aunque en forma bastante elemental, un tema de mucha importancia en la matemática, sobre todo en el cálculo superior.

El cálculo aproximado tiene como herramienta principal a las series.

Los números irracionales, como π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ etc, se pueden expresar en forma de series. De hecho, la conveniencia de expresar estos números como una serie, es que facilita el cálculo de sus aproximaciones mediante ordenadores.

En este texto desarrollaremos las sucesiones más elementales, las series, también elementales, y las sumatorias.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Amigo(a) lector(a), para tener éxito en el aprendizaje de este capítulo, debes saber resolver ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas de ecuaciones.

Además, te sugiero que hagas una revisión del razonamiento inductivo. Por otro lado, quiero recomendarte que, como en este capítulo se llega a deducir muchas fórmulas, lo importante no es memorizar las fórmulas, sino, saber cómo se deducen y cuándo se puede aplicar y bajo qué condiciones.

Es necesario revisar el capítulo anterior sobre números combinatorios

8. Suseciones y series

A continuación se da un conjunto ordenado de números. Los puntos suspensivos indican que continúa la secuencia. ¿Podrías escribir los primeros números que continúan en la secuencia?:

1; 12; 123; 1234; 12345; ; ; ...

Dado un conjunto de números, dispuestos en la forma mostrada, si uno está en la capacidad de determinar el modo de hallar el número que sigue en la secuencia, se dice que la secuencia de números es una **sucesión numérica**, claro que hay sucesiones que no son numéricas, sino, pueden ser gráficas, literales, etc.

Lógicamente para determinar el número que sigue, hay que descubrir la regla bajo la cual se va generando cada número de la sucesión, esta regla se llama REGLA DE FORMACION, y cuando se puede expresar mediante una fórmula, se llama FORMULA GENERAL o FORMULA DE RECURRENCIA.

No siempre es tan fácil describir la regla de formación de una sucesión numérica y no siempre es posible expresarla mediante una fórmula. Por ejemplo, para la sucesión

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; ...

desde los primeros matemáticos griegos hasta nuestros días, han tratado de encontrar sin éxito una fórmula que nos permita determinar los números que siguen. Esta sucesión es la de los **números primos**.

Por otro lado, en una sucesión numérica, siempre es posible señalar cuál es el primer término, cuál es el segundo, cuál el tercero, etc., esto es, establecer una correspondencia de uno a uno entre los números ordinales, (*primero*, *segundo*, *tercero*, *cuarto*, ...) y los términos de la sucesión:

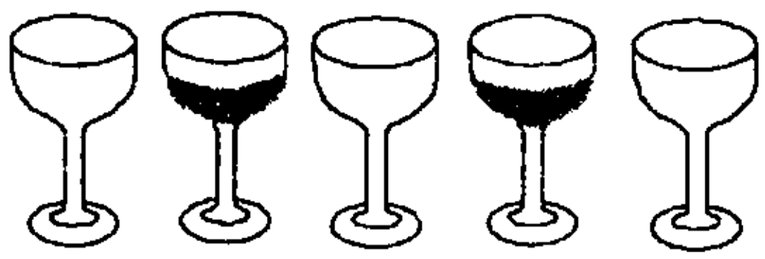
Número ordinal	:	1°	2°	3°	4°	...
		↓	↓	↓	↓	
Términos de la sucesión	:	2	3	5	7	...

Una sucesión numérica puede tener un número limitado de términos o infinitos términos. Por ejemplo, la sucesión:

$123_{(9)}$; $234_{(9)}$; $345_{(9)}$; $456_{(9)}$; $567_{(9)}$; $678_{(9)}$

Divertijo 1

Hay cinco copas de vino sobre la mesa, ordenadas en fila e intercaladas entre una vacía y otra a mitad. ¿Cuántas copas es suficiente mover para alterar el orden, de manera que queden tres vacías de un lado y dos a mitad del otro lado?



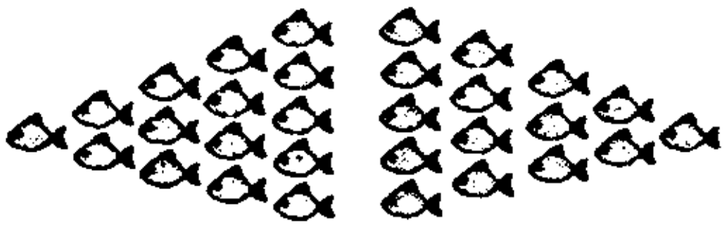
Divertijo 2

*Un cultivo de **microbios** se colocaron en un matraz a las 2 de la tarde. En cada minuto estos seres diminutos se duplican. ¿A qué horas, el matraz estaba a la mitad de su contenido, si a las 3 de la tarde ya estaba lleno?*

Divertijo 3

Estos pececillos están cansados de viajar en la formación A. Para romper la monotonía quieren viajar en la formación B.

Mínimamente, ¿cuántos de ellos deben cambiar de posición?



A B

sólo puede tener 6 términos, porque la numeración en el sistema de base 9, sólo utiliza las cifras menores de 9. En cambio, la sucesión.

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{6};\ \ldots$$

tiene infinitos términos. Nunca se podrá determinar el último término.

Si bien, una sucesión puede tener la posibilidad de tener infinitos términos, se le puede "cortar", indicando, cuántos términos tiene o escribiendo el último término. Por ejemplo las sucesiones siguientes son finitas:

4; 10; 16; 22; ... (150 términos)

1; 4; 9; 16; 25; 36; ... ; 1225

Notación de una sucesión

En adelante usaremos la siguiente notación para todo tipo de sucesiones

$$t_1;\ \ t_2;\ \ t_3;\ \ t_4;\ \ \ldots;\ \ t_n$$

Supongamos que la fórmula general de la sucesión es $n^2 + 2$, entonces cualquier término de la sucesión tiene la forma $t_n = n^2 + 2$. Así:

n	$t_n = n^2 + 2$		
1	$t_1 = 1^2 + 2$	$\Rightarrow$	$t_1 = 3$
2	$t_2 = 2^2 + 2$	$\Rightarrow$	$t_2 = 6$
3	$t_3 = 3^2 + 2$	$\Rightarrow$	$t_3 = 11$

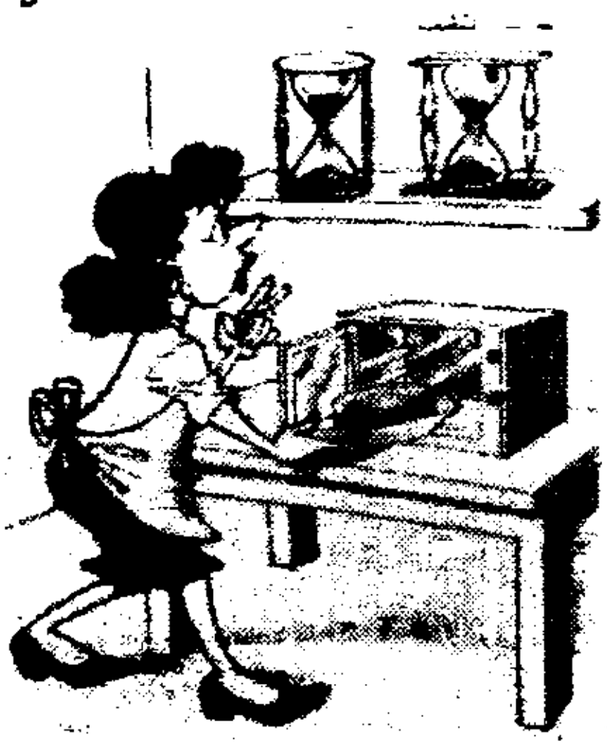
Por ejemplo, el término de lugar 20 es t_{20} y su valor se obtiene sustituyendo "n" por 20 en la fórmula general:

$$t_{20} = 20^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad t_{20} = 402$$

A modo de práctica verifica que $t_{11} = 123$ y determina a y b, si $t_a = 326$ y $t_b = 1298$

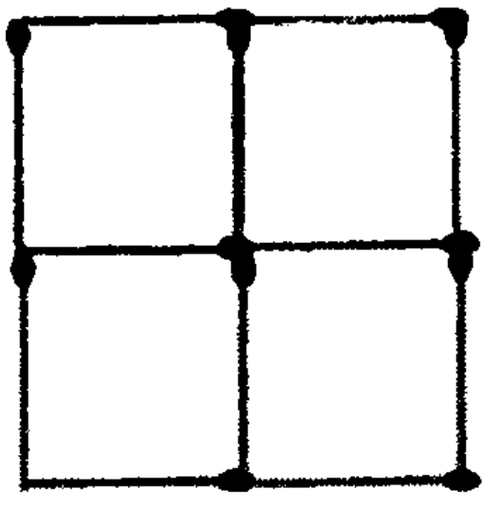
Divertijo 4

Estás preparando un exquisito pastel en tu horno microondas. Pero resulta que el reloj del horno está malogrado y lo único disponible son dos relojes de arena de 3 y 5 minutos. ¿Podrás medir con estos dos relojes de arena los 7 minutos de cocción que requiere el pastel y cómo?



Divertijo 5

Moviendo 3 palitos, ¿es posible formar 3 cuadrados?



8.1. Criterios para determinar el término que sigue en la sucesión

La mejor manera de descubrir el criterio con el que está elaborado una sucesión cuyo término que sigue se quiere hallar, es poniéndose en el caso del elaborador de la pregunta.

Son muchas las reglas bajo las cuales se puede formar una sucesión numérica. Más adelante estudiaremos algunos tipos de sucesiones numéricas, por ahora veamos algunos ejemplos de reglas bajo los cuales podemos construir las sucesiones.

Problema 1

En cada una de las siguientes sucesiones, determinar el término que sigue.

a. *4; 7; 10; 13; 16; ...*

b. *13; 11; 9; 7; 5; ...*

c. *7; 8; 10; 13; 17;*

d. *4; 3; 3; 6; 14; 29; ...*

e. *–4; –2; 2; 14; 62; ...*

f. *4; 12; 36; 108; ...*

g. *3; 4; 7; 11; 18; 29; ...*

h. *3; 3,1; 3,14; 3,141; ...*

i. *1; 1; 3; 18; 180; ...*

j. *3; 4; 6; 8; 12; 14; ...*

k. *2; 8; 32; 128; ...*

l. $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{9}$; ...

m. *0; 7; 26; 63; ...*

Resolución

a. *4; 7; 10; 13; 16; (19)*

+3 +3 +3 +3 +3

b. *13; 11; 9; 7; 5; (3)*

–2 –2 –2 –2 –2

c. *7; 8; 10; 13; 17; (22)*

+1 +2 +3 +4 +5

d. *4; 3; 3; 6; 14; 29; (53)*

–1 +0 +3 +8 +15 +24

+1 +3 +5 +7 +9

e. *–4; –2; 2; 14; 62; (302)*

+2 +4 +12 +48 +240

×2; ×3; ×4; ×5;

f. *4; 12; 36; 108; 324*

×3 ×3 ×3 ×3

g. *3; 4; 7; 11; 18; 29; x*

$3 + 4 = 7$; $4 + 7 = 11$; $11 + 18 = 29$; ...

Por lo tanto: $18 + 29 = 47 \Rightarrow x = 47$

h. *3; 3,1; 3,14; 3,141; **3,1416***

(Son las aproximaciones sucesivas del valor de π)

i. *1; 1; 3; 18; 180; (2700)*

×1 ×3 ×6 ×10 ×15

+2 +3 +4 +5

j. *3; 4; 6; 8; 12; 14; (18)*

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↑

2+1 3+1 5+1 7+1 11+1 13+1 17+1

(Cada término es el que sigue a un primo)

k. *2; 8; 32; 128; (512)*

↓ ↓ ↓ ↓ ↑

2^1 2^3 2^5 2^7 2^9

l. $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{4}{5}$;
↓ ↓ ↓ ↓ ↑
$\frac{4}{6}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{8}{10}$;

m. 0; 7; 26; 63; 124
↓ ↓ ↓ ↓ ↑
1^3-1 2^3-1 3^3-1 4^3-1 5^3-1

Problemas

En cada una de las siguientes sucesiones, debe hallar el término que continúa.

1. *7; 8; 10; 13; ...*

A) 14 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 17 **E)**18

2. 4; 4; 8; 24; 96; ...

A) 160 **B)** 192 **C)** 288 **D)** 384 **E)** 480

3. 1; 1; 2; 6; 15; ...

A) 18 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 28 **E)** 31

4. 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ...

A) 15 **B)** 17 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 21

5. 2; 3; 5; 7; 8; 11; 11; 15; 14; ...

A) 17 **B)** 19 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 21

6. 2; 9; 28; 65; ...

A) 124 **B)** 125 **C)** 126 **D)** 128 **E)** 190

7. –1 ; 0; 2; 6; 14; ...

A) 30 **B)** 28 **C)** 27 **D)** 32 **E)** 35

8. 3; 4; 5; 7; 13; 37; ...

A) 120 **B)** 157 **C)** 158 **D)** 160 **E)** 180

9. $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{16}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{1}{4}$; ...

A) $\frac{7}{49}$ **B)** $\frac{8}{64}$ **C)** $\frac{6}{36}$

D) $\frac{3}{49}$ **E)** $\frac{9}{49}$

10. 10; 17; 26; 37; ...

A) 48 **B)** 49 **C)** 50 **D)** 51 **E)** 65

11. 2; 4; 7; 10; 15; 18; ...

A) 22 **B)** 24 **C)** 23 **D)** 26 **E)** 27

12. 2; 6; 10; 50; 56; 392; ...

A) 360 **B)** 400 **C)** 600 **D)** 387 **E)** 250

8.2. Sucesiones polinomales

Dentro de la gran variedad de sucesiones numéricas, aquellas que tienen por fórmula general un polinomio en n, donde n es un número natural mayor que cero, se denominan sucesiones polinomiales.

Dependiendo del grado del polinomio que representa la fórmula general de la sucesión, ésta puede ser lineal, cuadrática, cúbica, etc.

Cada tipo de sucesión, tiene sus propias características, que estudiaremos a continuación.

Los problemas fundamentales que se plantean en lo relativo a las sucesiones es, **determinar la fórmula general, determinar el número de términos**, en caso de ser finito, **calcular el término que ocupa una posición dada** de la sucesión y **hallar la suma de los términos**.

Vamos a plantear diversas técnicas de resolver estos problemas, para cada uno de los tipos de sucesiones que estudiaremos.

8.2.1.Sucesión lineal (Progresión Aritmética)

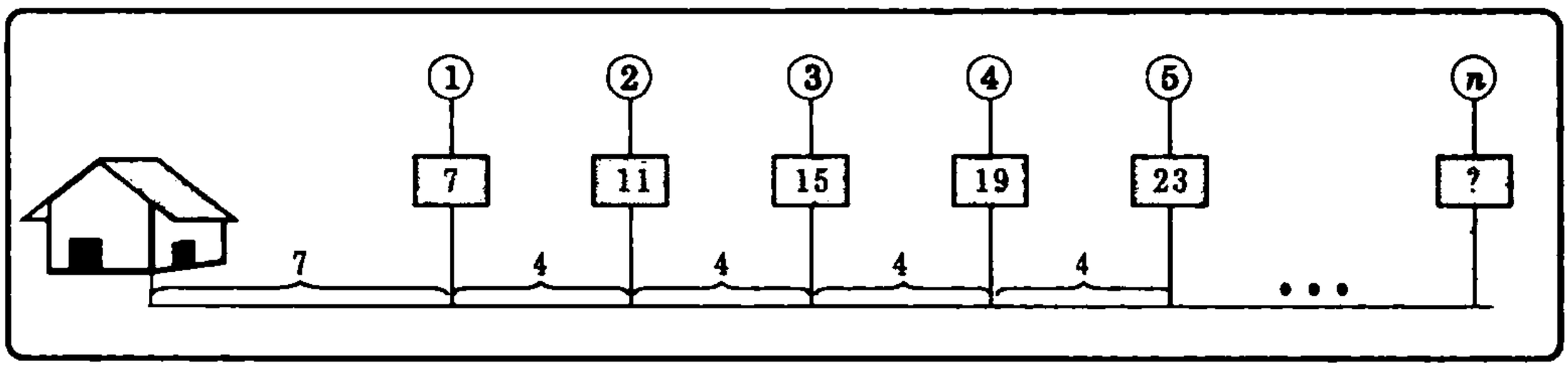
Una sucesión lineal es aquella cuya fórmula general tiene la forma de un polinomio lineal en n. Por ejemplo:

1^o	2^o	3^o	4^o	5^o	...	n^o
↓	↓	↓	↓	↓		↓
7	11	15	19	23	...	$(4n+3)$
	+4	+4	+4	+4		Fórmula general

La sucesión lineal se caracteriza porque cada término, a partir del segundo, se obtiene sumando al anterior una misma cantidad llamada RAZON. Por ello se dice que una sucesión lineal es una PROGRESION ARITMETICA

Veamos a continuación en detalle:

Consideremos un conjunto de postes enumerados y alineados a lo largo de una vereda, equidistantes entre sí 4 metros. Consideremos también, que el primer poste está a 7 metros de una casa. Si en cada poste colocamos un letrero que señale la distancia del poste en referencia a la casa, tendríamos una situación como la que se muestra a continuación:



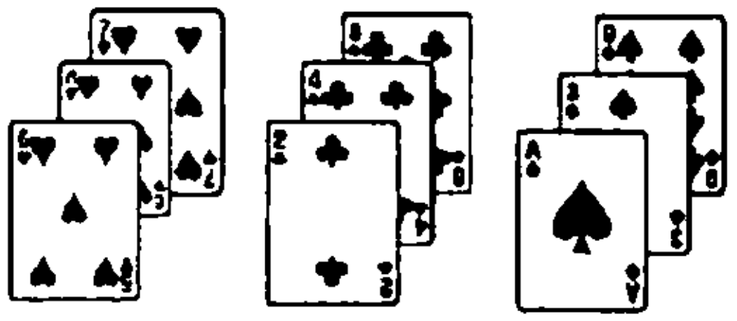
Los números que aparecen en los letreros, son precisamente los términos de la sucesión:

7; 11; 15, 19; ...

Divertijo 6

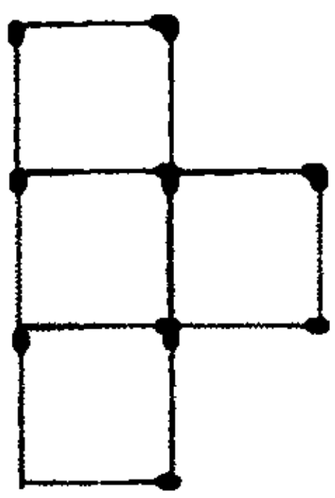
Tres tríos

Conseguir que cada grupo de cartas sumen lo mismo, moviendo solamente tres cartas y sin alterar el número de cartas de cada grupo. ¿Qué suma es ésa?



Divertijo 7

¿Cuántos palitos hay que mover como mínimo para obtener exactamente 3 cuadrados?



Problema 1

¿Cuántos espacios hay entre el primer poste y el poste número 20?

Resolución

No hay 20 espacios. Entre el primer poste y el número 4, se puede contar que hay 3 espacios. Se puede deducir, que entre el primer poste y el número 20 hay 19 espacios.

Problemas

1. ***Con referencia a la figura de arriba, ¿cuántos espacios hay entre el primer poste y el poste número 48?***

   A) 48 **B)** 47 **C)** 49 **D)** 50 **E)** 46

2. ***Un sastre corta diariamente medio metro de tela. Si dispone de 4,5 metros de tela, ¿en cuántos días la cortará totalmente?***

   A) 7 días **B)** 8 días **C)** 9 días
   D) 10 días **E)** 11 días

3. ***Una persona debe consumir 12 pastillas a razon de una por cada 8 horas. Si empieza el lunes al medio día, ¿qué día y a qué hora estará consumiendo la última pastilla?***

   A) Viernes, 4 a.m. **B)** Viernes, 4 p.m.
   C) Jueves 4 a.m. **D)** Jueves, 4 p.m.
   E) Viernes 8 a.m.

4. ***¿Con cuántos cortes se divide un aro en 8 partes?***

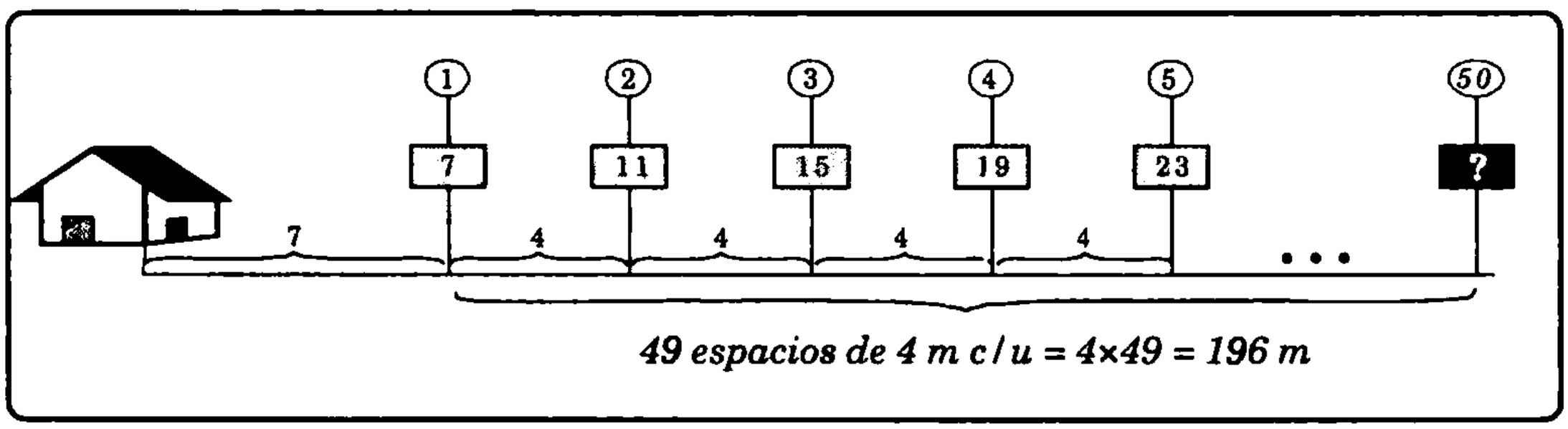
   A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 10

5. ***¿Con cuántos cortes se divide una varilla en 8 partes?***

   A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 10

Cómo hallar la fórmula general de una sucesión lineal

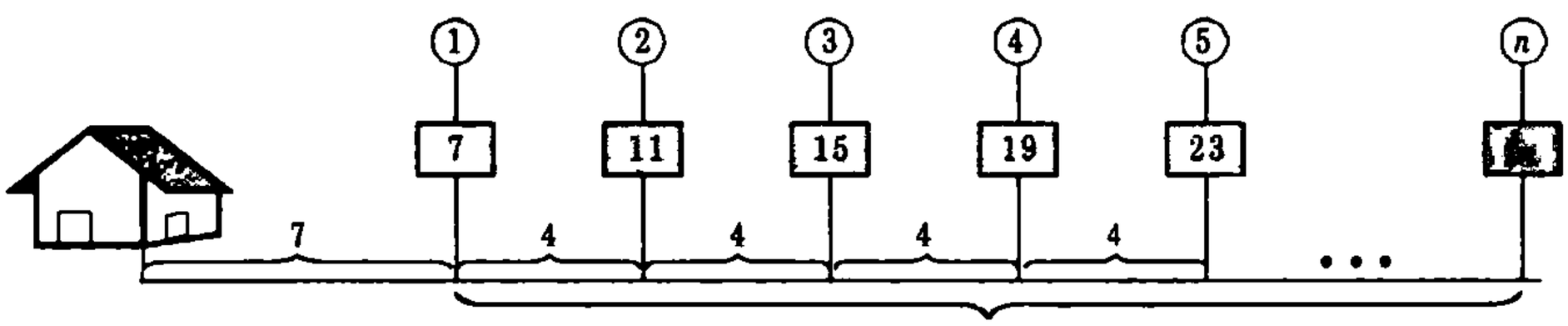
¿Qué número le corresponde al letrero del poste 50?



El número del letrero correspondiente al poste 50 es la distancia del poste 50 a la casa.

Del poste 1 al 50 hay 49 espacios de 4 m cada uno, que hacen 4×49 = 196 m. Por lo tanto la distancia del poste 50 a la casa es 7 + 196 = 203.

Ahora planteemos el problema de averiguar la distancia de la casa al poste *n*



(n – 1) espacios de 4 m c / u = 4 (n – 1) metros

Se observa que al poste *n* le corresponde el número:

$t_n = 7 + 4\,(n-1) \Rightarrow t_n = 7 + 4n - 4 \Rightarrow \boxed{t_n = 4n + 3}$

La fórmula *4n + 3* es la fórmula general de la sucesión.
Podemos verificar, para $n = 1$; $t_1 = 4(1) + 3 = 7$; para $n = 2$: $t_2 = 4(2) + 3 = 11$; para $n = 50$: $t_{50} = 4(50) + 3 = 203$.

Problema 2

En la sucesión: 8; 13; 18; 23; 28; ...

¿Cuál es el término del lugar 200?

Resolución

Método (1)

En *200* números hay *199* espacios de *5* unidades cada uno. Por lo tanto, el número correspondiente al término 200° es:

$$8 + 5\times 199 = 1003$$

Método (2)

Hallando la fórmula general:

La fórmula general es:

$t_n = 8 + 5\,(n-1) = 8 + 5n - 5 \Rightarrow t_n = 5n + 3$

para $n = 200 \Rightarrow t_{20} = 5(200) + 3 \Rightarrow \boxed{t_{20} = 1003}$

Problemas

1. Hallar el término 50 de la sucesión:

1; 8; 15; 22; ...

A) 356 B) 338 C) 344 D) 350 E) 362

2. Hallar la fórmula general de la sucesión:

2; 8; 14; 20; 26; ...

A) $5n + 4$ **B)** $6n$ **C)** $6n + 4$
D) $6n - 3$ **E)** $6n - 4$

3. ¿Cuál es la fórmula general de la sucesión:

3; 16; 29; 42; ...

A) *13n + 8* **B)** *10n – 5* **C)** 13n + 10
D) *13n – 10* **E)** *13n + 8*

4. ¿Qué número corresponde al término de lugar 100 de la sucesión:

15; 22; 29; 36; ...

A) 678 **B)** 700 **C)** 708 **D)** 702 **E)** 714

Otro modo de hallar la fórmula general de la sucesión es mediante el método inductivo. Por ejemplo. Sea la sucesión:

7; 11; 15; 19; ...

cuya fórmula general deseamos calcular:

$t_1 = 7$
$t_2 = 7 + 4\times1$
$t_3 = 7 + 4\times2$
$t_4 = 7 + 4\times3$
.....
$t_n = 7 + 4(n - 1)$
$\boxed{t_n = 4n + 3}$

En general, para:

$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \ldots,\ t_4$
$-r \quad +r \quad +r \quad +r$

De donde:

$t_1 = t_1$
$t_2 = t_1 + 1\times r$
$t_3 = t_1 + 2\times r$
...
$\boxed{t_n = t_1 + (n - 1)r}$

ó

$t_1 = t_0 + 1\times r$
$t_2 = t_0 + 2\times r$
$t_3 = t_0 + 3\times r$
...
$\boxed{t_n = t_0 + n\times r}$

t_0: término anterior al primero
t_1: primer término
t_n: último término
n: número de términos
r: razón

Se observa que en la fórmula general de la sucesión lineal, el coeficiente de *n* es igual a la razón de la sucesión.

De modo que si queremos determinar la fórmula general de:

7; 11; 15; 19; ...
+4 +4 +4

de antemano sabemos que será *4n + ?*. En esta fórmula, para *n = 1* nos tiene que dar *7*; entonces el término independiente es *3*, de modo que *4(1) + 3 = 7*.

Por lo tanto la fórmula general es:

$\boxed{t_n = 4n + 3}$

Divertijo 8

Marco de letras

En este marco de letras se esconde un refrán conocido. Intenta leerlo. Empieza por una de las letras y, saltando siempre una, da dos veces la vuelta al marco. ¿Cuál es ese refrán?

M	**R**	**I**	**A**	**L**	**F**	**P**	**I**	**A**
G								**C**
R								**L**
N								**O**
O								**A**
U								**V**
P	**S**	**E**	**A**	**L**	**R**	**A**		**B**

Señalar el número de palabras del refrán

Problema 3

Hallar el término de lugar 60 de la sucesión:

$$15;\ 22;\ 29;\ 36;\ldots.$$

Resolución

Identificamos los elementos de la sucesión

$$8;\ 15;\ 22;\ 29;\ \ldots;\ t_{60};\ \ldots;\ t_n$$

$$-7\quad +7\quad +7$$

Método (1)

$$t_n = t_1 + (n-1)r \Rightarrow t_{60} = 15 + (60-1)\times 7$$

$$\Rightarrow \boxed{t_{60} = 428}$$

Método (2)

$$t_n = t_0 + nr \Rightarrow t_{60} = 8 + 60\times 7$$

$$\Rightarrow \boxed{t_{60} = 428}$$

Método (3)

Hallando la fórmula general por cualquier método, y sustituyendo n por 60.

La fórmula general es $7n + ?$; para $n = 1$ nos tiene quedar 15, entonces:

$$7(1) + ? = 15 \Rightarrow ? = 8$$

Por lo tanto, la fórmula general es:

$$t_n = 7n + 8$$

Para $n = 60 \Rightarrow t_{60} = 7(60) + 8$

$$\Rightarrow \boxed{t_{60} = 428}$$

Problema 4

¿Cuántos términos tiene la sucesión:

$$13;\ 20;\ 27;\ 34;\ \ldots;\ 391?$$

Resolución

Método (1)

El "espacio" entre dos términos vale 7. El espacio entre el primer y último términos vale: $391 - 13 = 378$, entonces hay $378 \div 7 = 54$ espacios. Si entre el primer y último términos hay 54 espacios, entonces hay $54 + 1 =$ **55 términos**

Método (2)

Sabemos que $t_n = t_0 + rn \Rightarrow t_n = 6 + 7n$

Se conoce $t_n = 391$ y hay que hallar n. Sustituyendo en la fórmula general:

$$391 = 6 + 7n \Rightarrow n = 55$$

Por lo tanto tiene **55 términos.**

Método (3)

Sabemos que: $t_n = t_0 + rn$ ó $t_n = t_1 + (n-1)r$

Despejando n:

$$\boxed{n = \frac{t_n - t_0}{r}}\ (1) \quad \text{ó} \quad \boxed{n = \frac{t_n - t_1}{r} + 1}\ (2)$$

Sustiuyendo valores en cualquiera de las fórmulas:

En(1): $n = \dfrac{391-6}{7} \Rightarrow \boxed{n = 55}$

En (2): $n = \dfrac{391-13}{7} + 1 \Rightarrow \boxed{n = 55}$

Problemas

1. ***Hallar el término de lugar 80 de la sucesión:***

   4; 9; 14; 19; ...

   A) 349 **B)** 350 **C)** 397 **D)** 400 **E)** 399

2. ***¿Cuántos términos tiene la sucesión:***

   9; 15; 21; 27; ... ;297

   A) 50 **B)** 52 **C)** 47 **D)** 48 **E)** 49

3. ***Hallar la suma de los términos que ocupan el lugar 50 y el lugar 100 de la sucesión:***

   1; 5; 9; 13; ...

   A) 197 **B)** 397 **C)** 594 **D)** 598 **E)** 627

4. ***La sucesión***

   7; 10; 13; 16; ...; 364

   tiene tantos términos como:

   10; 14; 18; 22; ... ; t_n

   ¿Cuál es el valor de t_n?

   A) 486 **B)** 488 **C)** 496 **D)** 468 **E)** 490

5. ***La sucesión***

   5; 1; 9; 7; 13; 13; 17; ...

   tiene 120 términos. Hallar la suma de los dos últimos términos.

   A) 590 **B)** 596 **C)** 598 **D)** 602 **E)** 608

6. ***Las sucesiones:***

   4; 11; 18; 25; ... ; a_n

   y 9; 12; 15; 18; ... ; b_n

   Tienen igual cantidad de términos. Al sumar el último término de la primera con el último término de la segunda sucesión resulta 803 ¿Cuántos términos tiene cada uno?

   A) 70 **B)** 75 **C)** 78 **D)** 80 **E)** 82

Cómo sumar los términos de una sucesión lineal.

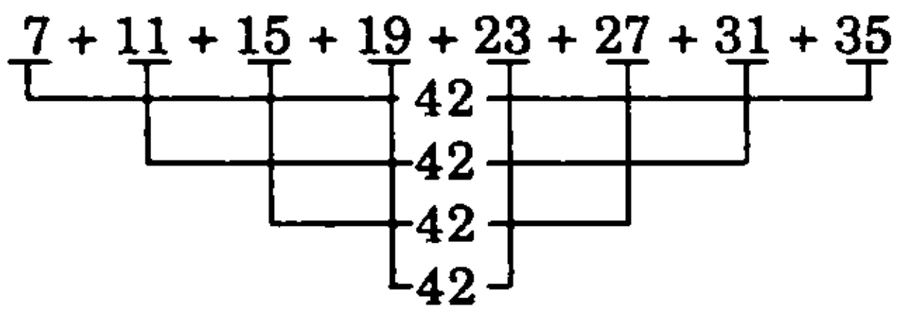
Dada la sucesión lineal:

$7;\ 11;\ 15;\ 19;\ 23;\ ...;\ t_n$

la expresión $7 + 11 + 15 + 19 + 23 + ... + t_n$

se llama SERIE lineal.

El cálculo de la suma de los términos de una sucesión está basado en la propiedad de que la suma de los términos equidistantes del centro de la sucesión, son iguales. Veamos el ejemplo:



Divertijo 9

Dos sucesiones tienen respectivamente por fórmula de recurrencia:

$a_n = 2^n$

$b_n = \dfrac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}$

Para $n = 0;1;2;3;...$

¿Cuántos de los primeros términos son comunes a ambos?

Cada pareja suma *42*. Los *8* términos hacen *4* parejas, entonces la suma es *4×42 = 168*.

En la serie:

$$1 + 6 + 11 + 16 + 21 + 26 + 31 + 36 + 41$$

$$42$$
$$42$$
$$42$$
$$42$$

Cada pareja suma *42*. Los *9* términos hacen *4,5* parejas, entonces la suma es *4,5×42 = 189*

Problema 5

Hallar la suma de la serie lineal

$$1 + 7 + 13 + 19 + 25 + ... + 337$$

Resolucón

Cada pareja equidistante del centro suma:

$$337 + 1 = 338$$

La serie tiene $(337 - 1) = 336 \Rightarrow 336 \div 6 + 1 = 56 + 1 = 57$ términos que hacen $57 \div 2 = 28,5$ parejas. Por lo tanto, la suma es $28,5 \times 338 = 9633$

Problema 6

Dada la serie lineal de razón r, determinar la suma:

$$t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n$$

Resolución

La suma de cada pareja equidistante es $(t_n + t_1)$. Con los n, términos de la serie se forman $\frac{n}{2}$ parejas. Luego, la suma es:.

$$S_n = \frac{n}{2}(t_n + t_1)$$

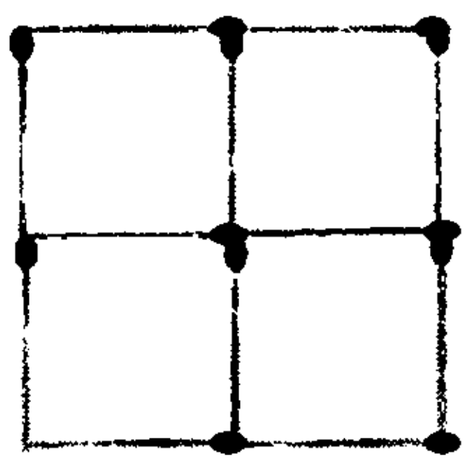
Problema 7

Hallar la suma de los 48 primeros términos de la serie:

$$5 + 11 + 17 + 23 + 29 + ...$$

Divertijo 10

Aquí tienes una figura hecha con palitos de fósforo.



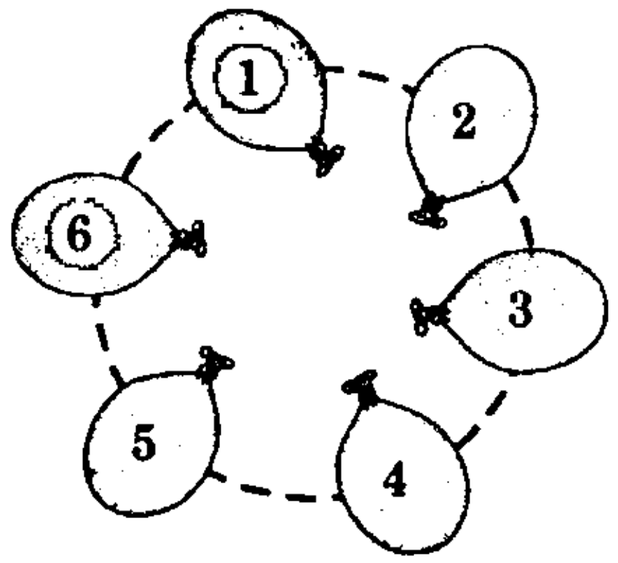
A) Mueve 4 palitos y forma 2 cuadrados (no vale dejar "cabos sueltos").

B) Retira un palito y forma 3 cuadrados.

Divertijo 11

Globos y dólares

Marco está echando una siesta. Sueña con que hay 6 globos situados en círculo a su alrededor, numerados del 1 al 6. En el sueño, su padre le dice: "Adelante, Marco, puedes reventarlos. Revienta 1, luego, siempre el que hace el número 6 en el sentido de las agujas del reloj: El último globo que revientes contendrá 100 dólares". Marco decide preservar los globos reventar sólo aquél que contenga los 100 dólares. ¿Qué número eligió?



Resolución

Hallando el último término:

$$t_n = t_0 + nr \Rightarrow t_{48} = -1 + 48\times 6$$
$$\Rightarrow t_{48} = 287$$

Hallando la suma:

$$S_n = \frac{n}{2}(t_n + t_1) \Rightarrow S_{48} = \frac{48}{2}(287 + 5)$$
$$\Rightarrow S_{48} = 7008$$

Problemas

1. Hallar la suma de la serie:

$$1 + 5 + 9 + 13 + \ldots + 245$$

A) 7620 **B)** 7260 **C)**7625
D) 7420 **E)** 7626

2. Hallar la suma de la serie:

$4 + 7 + 10 + 13 + 16 + \ldots$ (60 sumandos)

A) 5440 **B)** 5540 **C)**5550
D) 4440 **E)** 6660

3. Hallar la suma de los 20 primeros términos de la serie:

$$1 + 8 + 15 + 22 + 29 + \ldots$$

A) 1530 **B)** 1350 **C)** 1250
D) 1240 **E)** 1320

4. Las series:

$$1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \ldots$$

$$y \;\; 20 + 24 + 28 + 32 + \ldots$$

tienen igual cantidad de términos y sus últimos términos son iguales. Hallar la suma de los términos de cada una y dar como respuesta la diferencia de las sumas halladas

A) 180 **B)** 170 **C)** 178
D) 185 **E)** 190

5. ¿Cuál es la suma de los 30 primeros términos de la serie.

$$12 + 16 + 20 + 24 + \ldots$$

A) 2120 **B)** 2130 **C)** 2100
D) 2150 **E)** 2140

6. Hallar la suma de la serie:

$$1 + 9 + 17 + 25 + \ldots + 105$$

A) 742 **B)** 750 **C)** 756 **D)** 748 **E)** 758

Series notables

Mediante la aplicación de la fórmula para la suma de los términos de una serie lineal, se demuestran las siguientes fórmulas.

Suma de los *n* primeros naturales	(1.) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Suma de los *n* primeros pares	(2.) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = n(n+1)$
Suma de los *n* primeros impares	(3.) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 2n - 1 = n^2$

En cada una de estas fórmulas n representa el número de términos. Por ejemplo, en la serie:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... + 80$$

queremos hallar la suma aplicando la fórmula $n(n+1)$; ¿Cuánto vale n? ¿$n = 80$ ó $n = 40$?

El uso de las fórmulas en la resolución de problemas es peligroso si no se tiene claro sobre las condiciones en las que se usa.

Por ello es recomendable tener otros caminos o algún criterio que nos permita salir de la duda. La serie propuesta es una serie lineal de razón 2, con 40 términos, por consiguiente la suma es $\frac{40(80+2)}{2}$, que resulta igual que aplicar la fórmula $n(n+1)$ para n = 40 y no para $n = 80$.

Para hallar la suma de la serie

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + ... + 121$$

se puede aplicar la fórmula n^2. Pero, ¿cuánto vale n para este caso? Como n representa el número de términos de la serie, entonces:

$$n = \frac{121-1}{2} + 1 \quad \Rightarrow \quad n = 61$$

Por consiguiente la suma es:

$$61^2 = 3721$$

Otro modo de calcular la suma de la serie es considerándola como una serie lineal de razón 2. Como ya se tiene el número de términos igual a 61, la suma resulta:

$$\frac{61}{2}(121+1) = 3721$$

Prácticamente este método resulta más seguro que memorizar la fórmula de la suma de los impares y estar en duda sobre cómo aplicarla.

Problema 8

Las series

$$11 + 12 + 13 + 14 + ... + a$$

$$16 + 18 + 20 + 22 + ... + b$$

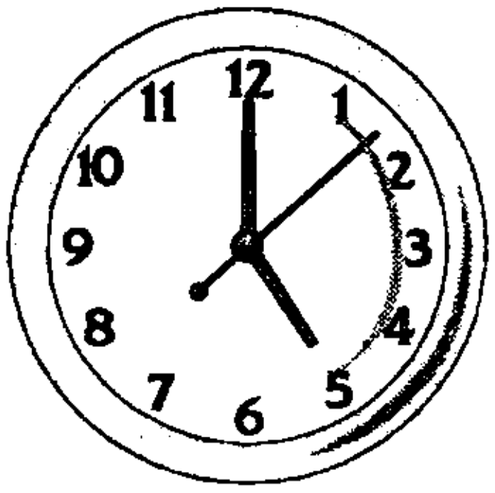
$$21 + 23 + 25 + 27 + ... + c$$

Divertijo 12

— No hay duda. La víctima se resistió al asalto. La esfera del reloj ha quedado en tres —dijo el policía.

—¡Que casualidad! —hizo notar su compañero —Si sumamos los número de cada pedazo, resultan iguales.

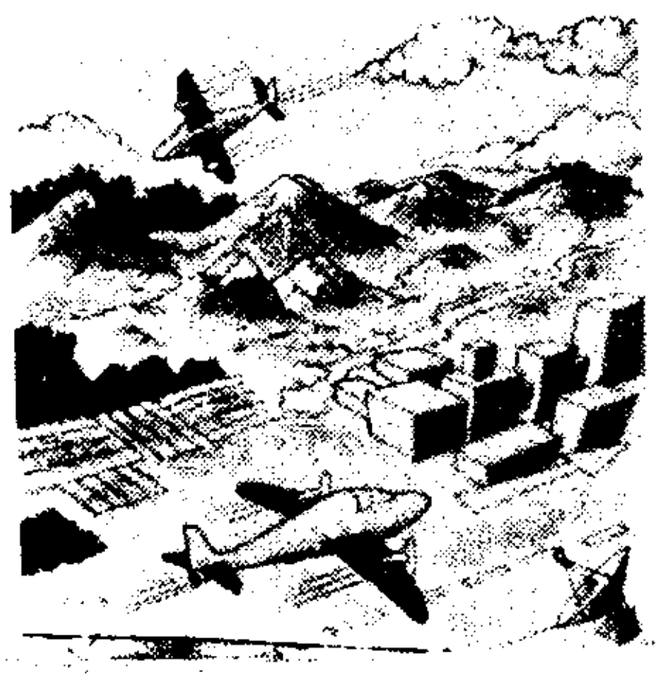
¿Cómo quedó dividido el reloj?



Divertijo 13

Avión Fatídico

Del aeropuerto de Juliaca salió un avión en dirección al Sur, recorriendo 800 km; entonces viró al Este recorriendo 800 km, volvió a virar al Norte y recorrió otros 800 km. Por último, viró al Oeste recorriendo 800 km, entonces se precipitó a Tierra. ¿Dónde cayó el avión?



Tienen la misma cantidad de términos y sus últimos términos suman 153. Hallar la suma de cada una.

Resolución

Si asumimos que cada una tiene n términos, hallando la fórmula general de cada una, expresamos los últimos términos en función de n

$$11 + 12 + 13 + 14 + \ldots + (n + 10)$$

$$16 + 18 + 20 + 22 + \ldots + (2n + 14)$$

$$21 + 23 + 25 + 27 + \ldots + (2n + 19)$$

Del dato:

$$(n + 10) + (2n + 4) + (2n + 19) = 153$$

$$5n + 33 = 153$$

$$\boxed{n = 24}$$

Luego

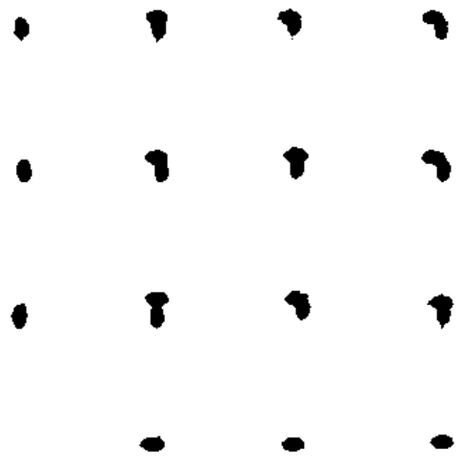
$$11 + 12 + 13 + 14 + \ldots + 34 = \frac{24}{2}(34 + 11) = 540$$

$$16 + 18 + 20 + 22 + \ldots + 62 = \frac{24}{2}(62 + 16) = 936$$

$$21 + 23 + 25 + 27 + \ldots + 67 = \frac{24}{2}(67 + 21) = 1056$$

Divertijo 14

Con 24 cerillas forma nueve cuadrados pequeños, como sigue:



a) Mueve 4 cerillas y forma 6 cuadrados iguales

b) Mueve 3 cerillas y forma 7 cuadrados iguales

c) Mueve 10 cerillas y forma 6 cuadrados iguales

d) Retira 4 cerillas para dejar 5 cuadrados iguales

e) Retira 4 cerillas para dejar 6 cuadrados iguales

f) Retira 2 cerillas para dejar 7 cuadrados iguales

g) Retira 2 cerillas para dejar 8 cuadrados

Problemas

1. Hallar la suma de:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 100$$

A) 4500 **B)** 4800 **C)** 5400
D) 5000 **E)** 5050

2. Hallar la suma de:

$$15 + 16 + 17 + 18 + \ldots + 115$$

A) 6450 **B)** 6565 **C)** 6500
D) 6550 **E)** 6540

3. Hallar la suma de:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 90$$

A) 2080 **B)** 2070 **C)** 2060
D) 2050 **E)** 2040

4. Hallar la suma de

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 117$$

A) 13841 **B)** 3241 **C)** 3450
D) 3284 **E)** 3481

5. Calcular la suma de los 20 primeros términos de:

$$13 + 15 + 17 + 19 + \ldots$$

A) 680 **B)** 720 **C)** 600 **D)** 640 **E)** 540

6. Hallar la suma de los primeros 40 términos de:

$$18 + 5 + 20 + 7 + 22 + 9 + \ldots$$

A) 1000 **B)** 1040 **C)** 1060
D) 1080 **E)** 1100

7. Si la suma de $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$ es menor en 24 que la suma de $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n$. ¿Cuántos términos tiene cada serie?

A) 24 **B)** 25 **C)** 26 **D)** 12 **E)** 13

8. Si la suma de 10 enteros consecutivos es 165; ¿Cuál es la suma de los 10 siguientes?

A) 330 **B)** 340 **C)** 265
D) 280 **E)** 295

8.2.2. Sucesiones cuadráticas

Una sucesión cuadrática es aquella cuya fórmula general tiene la forma:

$$t_n = An^2 + Bn + C \qquad \begin{cases} n \in Z^+ \\ A, B, C \text{ son constantes} \end{cases}$$

Observa los ejemplos de la derecha E1

Una serie cuadrática se caracteriza por que la las diferencias entre los términos consecutivos forman una sucesión lineal.

E1

n: 1 2 3 4 ...
↓ ↓ ↓ ↓
$3n^2 + 2n - 1$: 4 15 32 55 ...
11 17 23
6 6

n: 1 2 3 4 ...
↓ ↓ ↓ ↓
$2n^2 + 1$: 3 9 19 33 ...
6 10 14
4 4

Métodos de obtención de la fórmula general y la suma de los términos de una sucesión polinomial

En el primer capítulo del texto hemos expuesto el método inductivo para hallar la fórmula general de una sucesión. En las páginas anteriores hemos expuesto cómo obtener la fórmula general para una sucesión lineal. Los métodos que vamos a exponer son aplicables para cualquier sucesión polinomial, sea lineal, cuadrática o de orden superior.

Método I

Problema 9

Hallar la fórmula general de la sucesión:

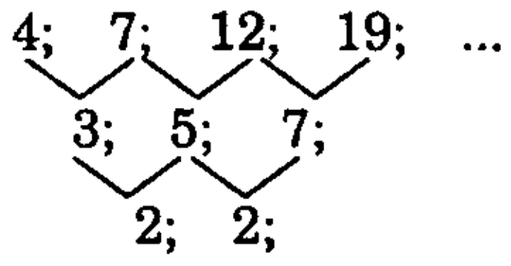
$$4;\quad 7;\quad 12;\quad 19;\quad \ldots$$

Divertijo 15

Coge un cartón que tenga medio centímetro de espesor —no importa las dimensiones, pero que sea lo más grande que encuentres —córtala por la mitad y coloca una mitad sobre la otra. Corta nuevamente las mitades. Repita esta operación 20 veces. ¿Qué altura tendrá el montón al final del juego?

Resolución

De la sucesión:



Se observa que es una sucesión cuadrática. Vamos a asumir que sus dos primeros términos forman una sucesión lineal de razón *3*, en tal caso su fórmula general sería:

$$t_n = 3n + 1$$

Veamos si esta fórmula general cumple para todos los términos de la sucesión

Si $n = 1 \rightarrow t_1 = 3\times1 + 1 = 4$; cumple

Si $n = 2 \rightarrow t_2 = 3\times2 + 1 = 7$; cumple

Si $n = 3 \rightarrow t_3 = 3\times3 + 1 = 10$; ¡no cumple!

Como para $n = 3$ ya no cumple, entonces a esta fórmula general vamos a agregar una expresión tal que se elimine para los valores de $n = 1$ y $n = 2$, dicha expresión es $(n - 1)(n - 2)$; o más generalmente:

$$k(n - 1)(n - 2).$$

Luego, la nueva fórmula de recurrencia sería:

$$t_n = 3n + 1 + k(n - 1)(n - 2)$$

y vemos que cumple para: $n = 1$ y $n = 2$

Si: $n = 3 \Rightarrow t_3 = 3(3) + 1 + k(3 - 1)(3 - 2)$

$$\downarrow$$

$$12 = 10 + 2k \Rightarrow \boxed{k = 1}$$

Por lo tanto, la fórmula general de la sucesión es:

$$\boxed{t_n = 3n + 1 + (n - 1)(n - 2)}$$

Problema 10

¿Cuál es el término que ocupa el lugar 20 en la sucesión:

$$-1;\quad 1;\quad 3;\quad 17;\quad \ldots$$

Resolución

Para hallar el término que ocupa el lugar 20, primero debemos hallar su fórmula general.

Los tres primeros términos forman una sucesión lineal de razón 2, entonces su fórmula general es de la forma:

$$t_n = \underbrace{2n - 3}_{\text{Fórmula general de los 3 primeros términos}} + k(n - 1)(n - 2)(n - 3)$$

Comprobando:

Si $n = 1 \rightarrow t_1 = 2\times1 - 3 + 0 = -1$; cumple

Si $n = 2 \rightarrow t_2 = 2\times2 - 3 + 0 = 1$; cumple

Si $n = 3 \rightarrow t_3 = 2\times3 - 3 + 0 = 3$; cumple

Si $n = 4 \rightarrow t_4 = 2\times4 - 3 + k(4 - 1)(4 - 2)(4 - 3)$

$$\downarrow$$

$$17 = 5 + 6k \Rightarrow k = 2$$

Entonces la fórmula general es de la forma:

$$t_n = 2n - 3 + 2(n - 1)(n - 2)(n - 3)$$

El término que ocupa el lugar 20, lo calculamos haciendo $n = 20$:

$$t_{20} = 2\times20 - 3 + 2(20 - 1)(20 - 2)(20 - 3)$$

$$\Rightarrow \boxed{t_{20} = 11665}$$

Problema 11

¿Cuántos términos tiene la sucesión:

$$1;\quad 4;\quad 7;\quad 16;\quad \ldots;\quad 2227$$

Resolución

Para determinar el número de términos de la sucesión, primero debemos encontrar su fórmula general y luego hallar "n", para

$$t_n = 2227.$$

Los tres primeros términos forman una progresión aritmética de razón "3", entonces la fórmula general será de la forma:

$$\boxed{t_n = 3n - 2 + k(n - 1)(n - 2)(n - 3)}$$

Ahora hallemos "k" haciendo $n = 4$

$$t_4 = 3\times4 - 2 + k(4-1)(4-2)(4-3)$$

$$16 = 10 + 6k \Rightarrow \boxed{k = 1}$$

$$t_n = 3n - 2 + (n-1)(n-2)(n-3)$$

Para $t_n = 2227$, tendríamos:

$$2227 = 3n - 2 + (n-1)(n-2)(n-3)$$

$$2227 = n^3 - 6n^2 + 14n$$

$$15\times149 = n(n - 6n + 14) \Rightarrow \boxed{n = 15}$$

Rpta.: Tiene 15 términos

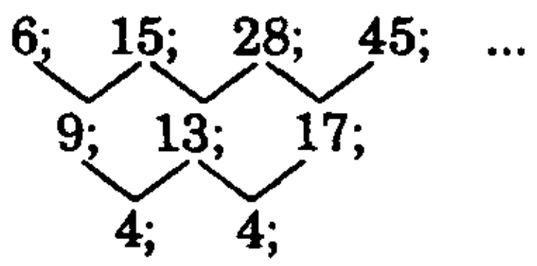
Método II (por ecuaciones)

Problema 12

Hallar la fórmula de recurrencia de la sucesión:

6; 15; 28; 45; ...

Resolución:



Se observa que es una sucesión cuadrática, entonces su fórmula general es de la forma:

$$t_n = An^2 + Bn + C \quad \text{... (I)}$$

En (I):

Si $n = 1 \rightarrow 6 = A + B + C$ ... (1)

Si $n = 2 \rightarrow 15 = 4A + 2B + C$ ... (2)

Si $n = 3 \rightarrow 28 = 9A + 3B + C$ ... (3)

(2) – (1): $9 = 3A + B$ ... (4)

(3) – (2): $13 = 5A + B$ ... (5)

(4) – (3): $4 = 2A \Rightarrow A = 2$

$\Rightarrow B = 3$

$\Rightarrow C = 1$

Luego, la fórmula general es:

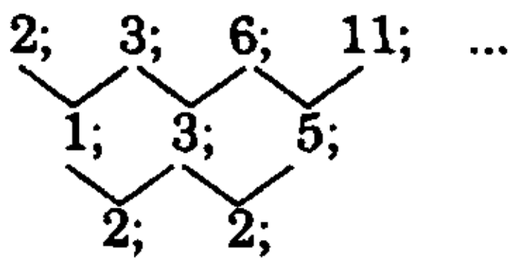
$$\boxed{t_n = 2n^2 + 3n + 1}$$

Problema 13

Calcular el término 30 de la sucesión:

2; 3; 6; 11; ...

Resolución



Vemos que la sucesión es cuadrática, luego su fórmula general tendrá la forma:

$$t_n = An^2 + Bn + C \quad \text{... (II)}$$

En (II):

Si $n = 1 \rightarrow 2 = A + B + C$ ... (1)

Si $n = 2 \rightarrow 3 = 4A + 2B + C$ ... (2)

Si $n = 3 \rightarrow 6 = 9A + 3B + C$ ... (3)

(2) – (1): $1 = 3A + B$ ... (4)

(3) – (2): $3 = 5A + B$ ... (5)

(4) – (3): $2 = 2A \Rightarrow A = 1$

$\Rightarrow B = -2$

$\Rightarrow C = 3$

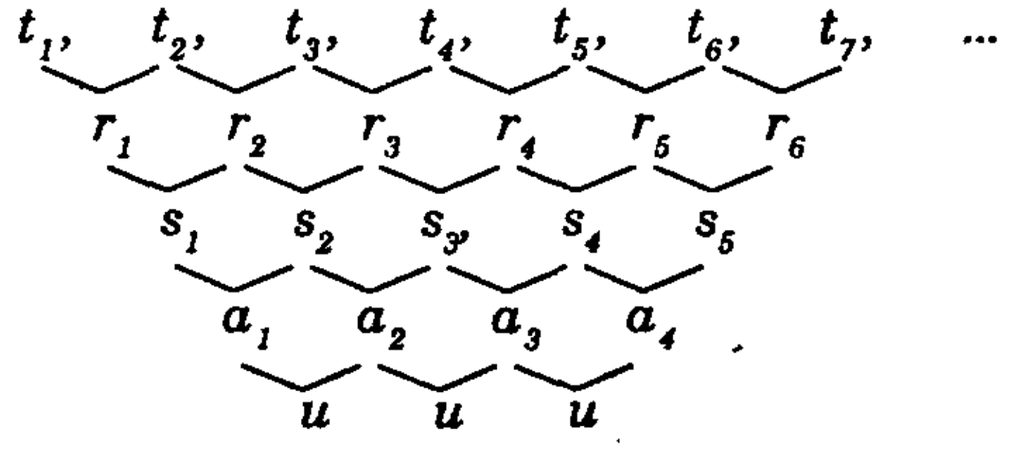
Luego, la fórmula general es:

$$t_n = n^2 - 2n + 3$$

Luego: $t_{30} = 30^2 - 2\times30 + 3 = 843$, el cual es el término de lugar 30°.

Método III:

Uso de los números combinatorios para el cálculo de la fórmula general y la suma de los "n" primeros términos de una sucesión polinomial.



I. Fórmula general para hallar el término de lugar *n*.

$$t_n = t_1C_0^{n-1} + r_1C_1^{n-1} + s_1C_2^{n-1} + a_1C_3^{n-1} + uC_4^{n-1}$$

II. Suma de los "n" primeros términos

$$S_n = t_1C_1^n + r_1C_2^n + s_1C_3^n + a_1C_4^n + uC_5^n$$

Problema 14

Hallar la fórmula general de la siguiente sucesión:

4; 15; 32; 55; ...

Resolución

4; 15; 32; 55; ...

11 17 23

6 6

$$t_n = 4C_0^{n-1} + 11C_1^{n-1} + 6C_2^{n-1}$$

$$t_n = 4(1) + 11(n-1) + 6\frac{(n-1)!}{(n-3)!2!}$$

$$t_n = 3n^2 + 2n - 1$$

Problema 15

Calcular "*S*" en:

$S = 1 + 1 + 4 + 10 + 19 + ...$ (20 sumandos)

Resolución

1; 1; 4; 10; ...

0 3 6

3 3

$$S_{20} = 1C_1^{20} + 0C_2^{20} + 3C_3^{20}$$

$$S_{20} = 20 + \frac{3 \times 17! \times 18 \times 19 \times 20}{17! \times 1 \times 2 \times 3}$$

$$S_{20} = 3440$$

Problema 16

Hallar el término que ocupa el lugar 30 en la sucesión:

–2; 0; 0; 0; 2; 8; ...

Resolución

–2; 0; 0; 0; 2; 8; ...

2 0 0 2 6

–2 0 2 4

2 2 2

$$t_{30} = -2C_0^{29} + 2C_1^{29} - 2C_2^{29} + 2C_3^{29}$$

$$t_{30} = 6552$$

Problema 17

Calcular la suma de los cuadrados de los "*n*" primeros enteros positivos.

Resolución

Queremos calcular

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2$$

Donde:

$$S_n = 1 + 4 + 9 + 16 + ... + n^2$$

3 5 7

2 2

$$S_n = 1C_1^n + 3C_2^n + 2C_3^n$$

$$S_n = 1(n) + \frac{3 \times n!}{(n-2)!2!} + \frac{2 \times n!}{(n-3)!3!}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Problema 18

Hallar la suma de los cubos de los "n" primeros enteros positivos.

Resolución

Deseamos calcular:

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3$$

Donde

$$S_n = \underset{\quad 7 \quad 19 \quad 37 \quad 61}{1 + 8 + 27 + 64 + 125} + \ldots + n^3$$

$$\underset{\quad 12 \quad 18 \quad 24}{}$$

$$\underset{\quad 6 \quad 6}{}$$

$$S_n = 1C_1^n + 7C_2^n + 12C_3^n + 6C_4^n$$

$$S_n = n + \frac{7 \times n!}{(n-2)!2!} + \frac{12 \times n!}{(n-3)!3!} + \frac{6 \times n!}{(n-4)!4!}$$

$$\boxed{S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$$

Resumen de las series notables

Serie aritmética

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{n(a_n + a_1)}{2}$$

Serie de los números naturales:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Serie de los cuadrados de los n primeros números naturales

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Serie de los cubos de los n primeros números naturales

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Problemas

1. Hallar la fórmula general de la sucesión:

0; 6; 14; 24; ...

A) $n^2 + 2n - 3$ B) $n^2 - 3n + 3$
C) $n^2 + 3n - 4$ A) $n^2 - 3n + 2$
E) $n^2 - 3n + 4$

2. Hallar el término que ocupa el lugar 20 de la sucesión:

6; 9; 14; 21; ...

A) 405 B) 408 C) 410 D) 412 E) 415

3. ¿Cuántos términos tiene la sucesión:

4; 9; 18; 31; ...; 633

A) 14 B) 15 C) 16 D) 18 E) 20

4. La diferencia de los dos últimos términos de la sucesión:

2; 4; 7; 11; ...; t_n es 24.
¿Cuántos términos tiene la sucesión?

A) 24 B) 18 C) 16 D) 26 E) 28

5. Hallar la suma de la serie:

$11^2 + 12^2 + 13^2 + \ldots + 36^2$

A) 15641 B) 15640 C) 15821
D) 6504 E) 15645

6. Hallar la suma de los 20 primeros términos de la serie:

2 + 3 + 9 + 20 + 36 + ...

A) 4435 B) 5930 C) 4330
D) 3320 E) 4230

7. Hallar la suma de la serie:

1 + 2 + 4 + 7 + 11 + ... + 301

A) 2560 B) 2625 C) 2620
D) 2650 E) 2680

8. La sucesión

0; 7; 26; 63; 124; ..; t_{30} tiene 30 términos. ¿Cuál es el último término?

A) 26999 B) 26888 C) 26789
D) 26780 E) 26799

8.3 Sucesiones o progresiones geométricas

Se llama progresión geométrica, a la sucesión en la que definido el primer término, cada término posterior se obtiene multiplicando al anterior siempre por un mismo número llamado razón de la progresión. E1

En forma general, si t_1 es el primer término de la progresión geométrica y r la razón, la progresión geométrica se puede escribir como:

$$t_1;\quad t_1r;\quad t_1r^2;\quad t_1r^3;\quad \ldots;\quad t_1r^{n-1} \qquad t_1 \neq 0;\ r \neq 0$$

Donde el término general de la progresión es:

$$t_n = t_1r^{n-1}$$

Suma de los términos de una serie geométrica

Sea:

$$S_n = t_1 + t_1r + t_1r^2 + t_1r^3 + t_1r^4 + \ldots + t_1r^{n-1} \quad \ldots(1)$$

Multiplicando ambos miembros de (1) por r:

$$rS_n = t_1r + t_1r^2 + t_1r^3 + t_1r^4 + t_1r^5 + \ldots + t_1r^n \quad \ldots(2)$$

(2) – (1): $rS_n - S_n = t_1r^n - t_1 \Rightarrow S_n(r-1) = t_1(r^n - 1)$

Por lo tanto:

$$S_n = \frac{t_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Problema 1

Hallar la suma de la serie:

$$S = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \ldots + 3072$$

Resolución

METODO (1)

Si queremos resolver el problema aplicando la fórmula, vemos que $t_1 = 3$; $r = 2$; pero falta determinar n, o sea, el número de términos. Por consiguiente es necesario hallar primero el número de términos.

E1

- $2;\ \underset{\times 3}{6};\ \underset{\times 3}{18};\ \underset{\times 3}{54};\ \ldots$
- $1;\ \underset{\times 2}{2};\ \underset{\times 2}{4};\ \underset{\times 2}{8};\ \ldots$
- $1;\ \underset{\times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}};\ \underset{\times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}};\ \underset{\times \frac{1}{2}}{\frac{1}{8}};\ \ldots$
- $3;\ \underset{\times 3}{9};\ \underset{\times 3}{27};\ \underset{\times 3}{81};\ \ldots$
- $3;\ \underset{\times 4}{12};\ \underset{\times 4}{48};\ \underset{\times 4}{192};\ \ldots$
- $2;\ \underset{\times 5}{10};\ \underset{\times 5}{50};\ \underset{\times 5}{250};\ \ldots$
- $7;\ \underset{\times 2}{14};\ \underset{\times 2}{28};\ \underset{\times 2}{56};\ \ldots$

El término general es: $t_n = t_1 r^{n-1} \Rightarrow \boxed{t_n = 3\times 2^{n-1}}$

Entonces:

$$3\times 2^{n-1} = 3072 \Rightarrow 2^{n-1} = 1024 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^{10}$$

Igualando los exponentes: $n - 1 = 10 \Rightarrow n = 11$

Por lo tanto la suma es:

$$S_{11} = \frac{3(2^{11}-1)}{2-1} \Rightarrow \boxed{S_{11} = 6141}$$

MÉTODO (2)

$S = 3 + 6 + 12 + 24 + ... + 3072$ (1)

Multiplicando (1) por la razón 2:

$2S = 6 + 12 + 24 + 48 + ... + 6144$ (2)

(2) – (1):

$\boxed{S = 6141}$

Series geométricas convergentes

Si en la sucesión geométrica:

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ ...;\ \frac{1}{2^{n-1}}$$

calculamos sus términos en decimales, resultan:

1; 0,5; 0,25; 0,125; 0,0625, ...

A medida que "*n*" aumenta, el valor del término se acerca a cero. Entonces se dice que la sucesión es **convergente**. La sucesión converge a cero. Una sucesión es convergente, si cuando *n* tiende a infinito, el valor del término de la sucesión tiende a un número. Si bien una sucesión geométrica puede tener infinitos términos, si es convergente, la suma de sus términos no es infinito. Veamos:

Problema 2

Hallar la suma de la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$$

Resolución

Cuando no se indica el número de términos ni el último término y no hay ninguna indicación al respecto, se entiende que tiene infinitos términos

De la serie:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... \quad (1)$$

Multiplicando (1) por 2:

$$2S = 2 + \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + ...$$

Simplificando:

$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... \quad (2)$$

Restando (2) – (1):

$$2S - S = 2 \Rightarrow \boxed{S = 2}$$

Problema 3

Hallar la suma de la serie:

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + ...$$

Resolución

Multiplicando por 9 ambos miembros de la igualdad:

$$9S = 9 - \frac{9}{3} + \frac{9}{9} - \frac{9}{27} + \frac{9}{81} - \frac{9}{243} + ...$$

$$9S = 9 - 3 + \underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots}_{S}$$

$$9S = 6 + S \quad \Rightarrow \quad 8S = 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{3}{4}}$$

Esta técnica utilizada para la suma de series infinitas es aplicable solamente cuando la serie es convergente, en caso contrario se llega a conclusiones absurdas, como en el caso siguiente:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$$

Factorizando:

$$S = 1 + 2(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots)$$

$$S = 1 + 2(S) \quad \Rightarrow \quad S = -1$$

Es imposible que la suma de infinitos números positivos sea igual a un número negativo.

La serie propuesta no es convergente, es divergente, porque los términos de la serie cada vez crecen hacia el infinito.

Problemas

1. Hallar la suma de la serie:

$$2 + 6 + 18 + 54 + \ldots + 13122$$

A) $3^2 + 1$ **B)** $3^8 - 1$ **C)** $3^9 + 1$
D) $3^9 - 1$ **E)** $3^9 - 2$

2. Hallar la suma de los 30 primeros términos de la serie:

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \ldots$$

A) $3\times2^{20} - 1$ **B)** $3\times2^{30} + 1$ **C)** $3\times2^{31} - 3$
D) $3\times2^{31} - 1$ **E)** $3\times2^{30} - 3$

3. Hallar la suma de la serie:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{18}$$

A) $2^{18} - 1$ **B)** $2^{19} - 1$ **C)** $2^{18} - 2$
D) $3^{19} - 1$ **E)** $3^9 - 2$

4. Hallar la suma de los 25 primeros términos de la serie:

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \ldots$$

A) $3^{24} - 1$ **B)** $3^{25} - 1$ **C)** $3^{26} - 1$
D) $3^{24} - 3$ **E)** $3^{25} - 3$

5. Hallar la suma de la serie:

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \ldots$$

A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{3}{4}$ **C)** $\frac{3}{2}$
D) 9 **E)** 3^n

6. Hallar la suma de la serie:

$$S = 3 + \frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{125} + \frac{3}{625} + \ldots$$

A) $1\frac{1}{4}$ **B)** $3\frac{1}{4}$ **C)** $3\frac{1}{2}$
D) $3\frac{3}{4}$ **E)** $3\frac{1}{3}$

7. Hallar la suma de la serie:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \ldots$$

A) 2 **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** 3 **D)** 1 **E)** $\frac{3}{2}$

8. Hallar la suma de la serie:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729} \ldots$$

A) $\frac{26}{31}$ **B)** $\frac{25}{33}$ **C)** $\frac{35}{32}$
D) $\frac{26}{35}$ **E)** $\frac{33}{26}$

8.4. Sucesiones de Fibonacci

Muchas sucesiones carecen del más mínimo interés. Otras sucesiones tienen diversas aplicaciones prácticas. Por ejemplo:

1. Las temperaturas medias de una localidad durante 12 meses del año, que nos informan sobre las características climáticas del lugar.
2. El número de artículos que produce diariamente una fábrica, suministra la información sobre el ritmo de producción.
3. Las toneladas de carga que lleva un tren en cada vagón, que permite saber la cantidad de material transportado.
4. El dinero depositado en una entidad bancaria sumado con los intereses mensuales que produce, informa sobre el estado de cuenta de cada mes.
5. Cálculos aproximados. Por ejemplo, para calcular la raíz cuadrada de 2, se puede utilizar la suma de los términos de una sucesión como la siguiente:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1\times3}{2\times4} + \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6} - \frac{1\times3\times5\times7}{2\times4\times6\times8} + \frac{1\times3\times5\times7\times9}{2\times4\times6\times8\times10} - \ldots$$

Por último, aunque muchas sucesiones no correspondan a situaciones prácticas, no podemos olvidar que las sucesiones tienen interés matemático.

Sucesiones de Fibonacci

En 1202 Leonardo de Pisa, más conocido por Fibonacci, que significa «hijo de Bonaccio», concluyó en Pisa su obra **Liber Abaci** (Libro del ábaco), que en realidad era un amplio tratado del sistema de numeración indo - arábigo, con el que contribuyó en la introducción a occidente de la notación indo - arábiga.

Pero irónicamente, Fibonacci no es conocido hoy por sus aportaciones a la matemática, sino, por un problema que planteara en su obra, sobre la reproducción de conejos, que recién en el siglo XIX fuera retomado y estudiado con mucho interés por el matemático francés Edward Lucas.

"Imaginemos, escribía Fibonacci, un par de conejos adultos, macho y hembra, encerrados en un cercado, donde pueden anidar y criar. Supongamos que los conejos em-

Divertijo 16

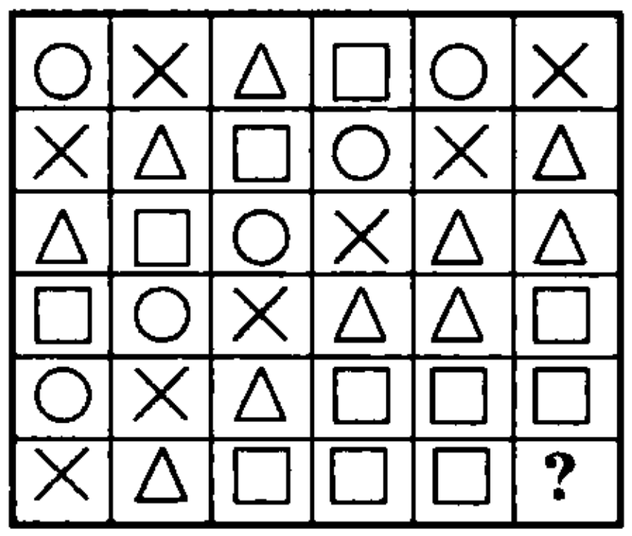
Trayectoria vamp

Un murciélago ingresa a una cueva, chocando con las paredes laterales de ésta. Cuando va de una pared a otra, la trayectoria de su recorrido es recto y perpendicular. ¿Qué longitud habrá recorrido hasta detenerse, si la primera vez recorrió 3 m y las paredes de la cueva forman entre sí un ángulo de 60°?

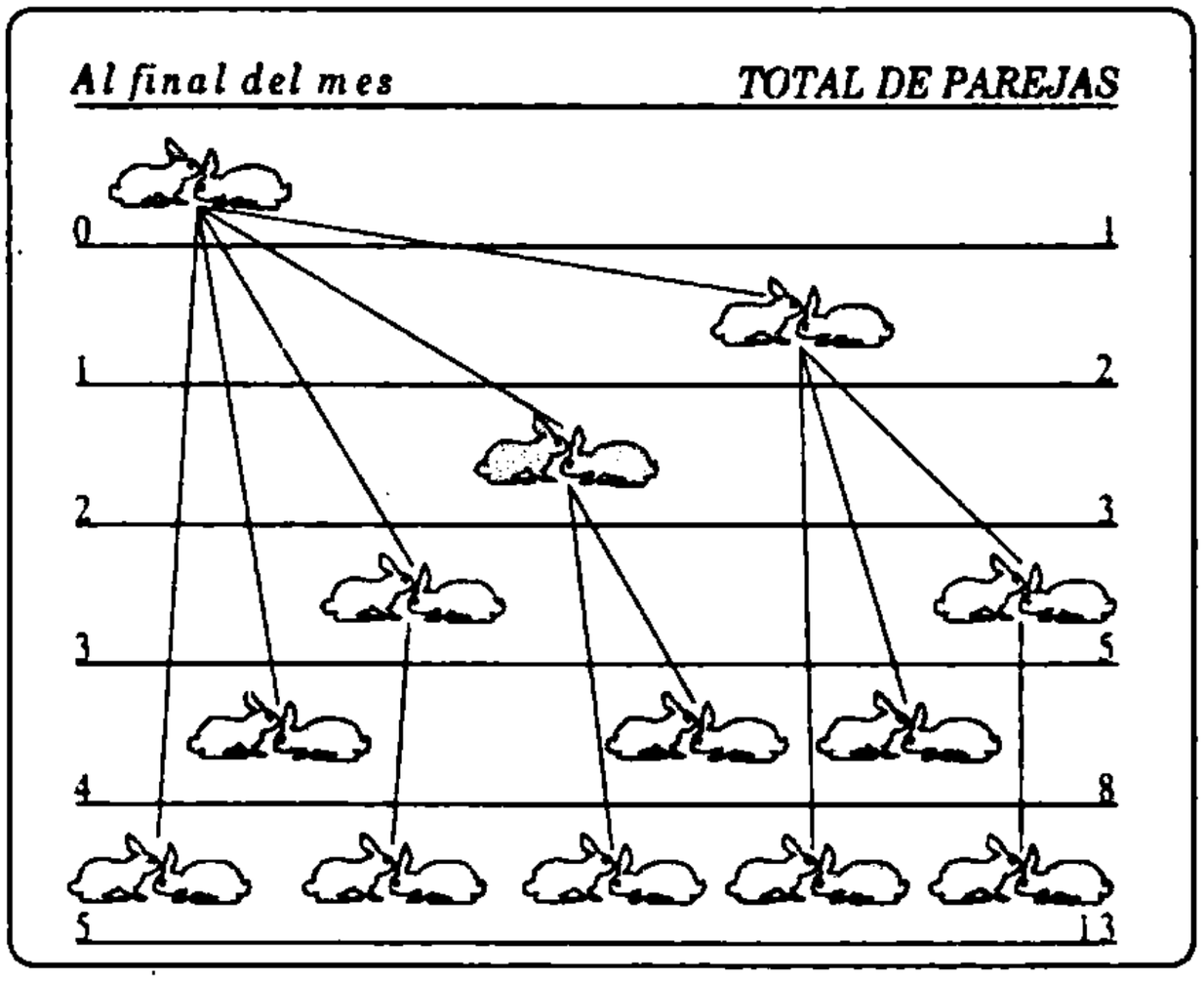
La naturaleza no toma cantidades ni proporciones cualesquiera en su desarrollo, por el contrario, las cantidades y proporciones que encontramos en ella son especiales.

Divertijo 17

Te aseguro que, el criterio que orientó la ubicación de los triángulos, cuadrados, círculos y aspas, es perfectamente lógico. ¿Cuál es este criterio? ¿Qué figura falta?



piezan a procrear a los 2 meses de su nacimiento, engendrando un único par macho - hembra, y a partir de ese momento, cada uno de los meses siguientes un par más, de iguales características. Admitiendo que no muriese ninguno de los conejitos, ¿cuántos pares contendría el cercado al cabo de un año?"



El gráfico de la derecha, muestra la reproducción de los conejos en los primeros 5 meses. Se observa que el total de conejos que hay en cada mes se obtiene, a partir del tercero, sumando los que habían en los dos meses precedentes. De modo que se forma la sucesión:

1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377; ...

donde la cantidad de conejitos correspondiente al mes 12 es 377

Fibonacci no investigó la sucesión. No fue sino hasta inicios del siglo pasado, iniciado por Lucas, que la sucesión fue objeto de estudios profundos, que permitieron descubrir numerosas propiedades de las que goza esta sucesión. Fue entonces que Lucas estudiara las llamadas sucesiones generalizadas de Fibonacci que comienza por dos enteros cualesquiera y a partir de allí, cada número de la sucesión es suma de los dos precedentes. Lucas le dio el nombre de sucesión de Fibonacci a la más sencilla de estas sucesiones, ver en el cuadro de la derecha.

Sucesión de Fibonacci:

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; ...

Sucesión de Lucas:

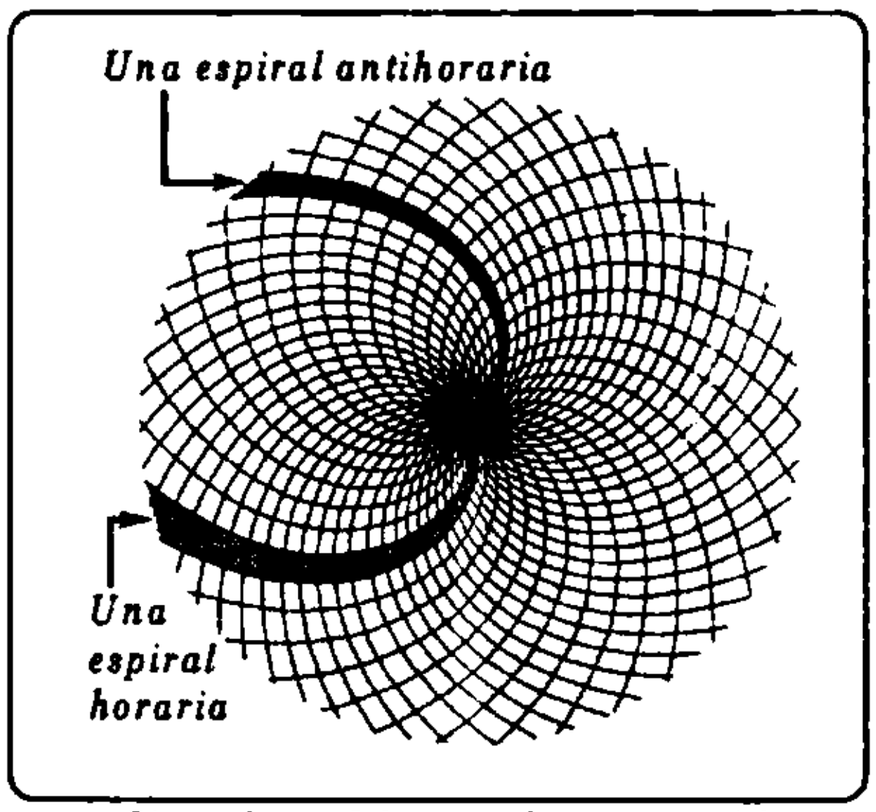
1; 3; 4; 7; 11; 18; 29; ...

Los términos de la sucesión de Fibonacci, se representan por F, acompañada de un subíndice que indica el número de orden dentro de la sucesión. Por ejemplo F_4 representa al término 4 de la sucesión, esto es, $F_4 = 3$.

Son innumerables las situaciones en las que está presente la sucesión de Fibonacci y también son innumerables sus propiedades, que se necesitan tratados para discutir cada una de ellas.

Fibonacci en las plantas

Las flores del girasol presentan espirales logarítmicas, unas en sentido horario y otras en sentido antihorario, que en número son generalmente números de Fibonacci

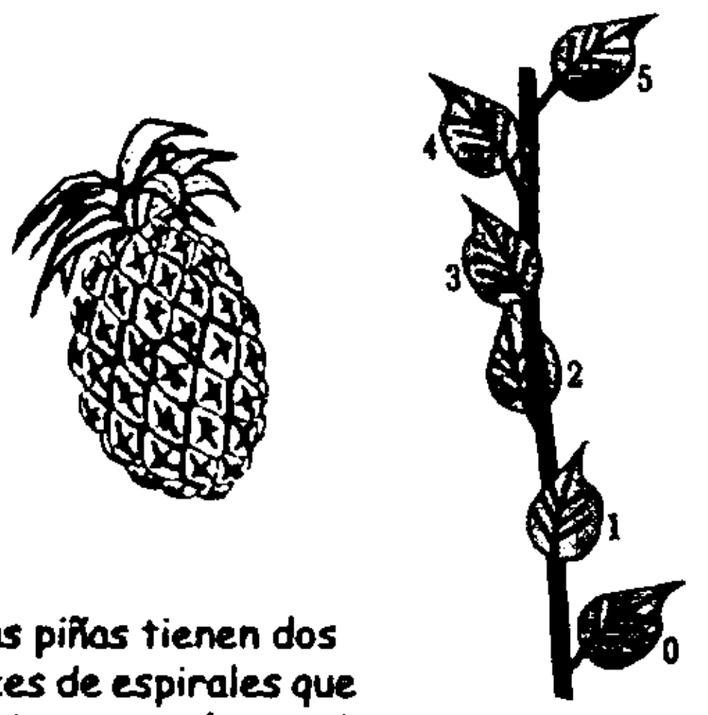


Girasol con 34 espirales en sentido horario y 55 espirales en sentido antihorario

consecutivos; que según el tamaño , pueden contener 34 y 55 espirales. Pero hay flores gigantes que alcanzan valores hasta 89 y 144 espirales.

En las piñas hay dos haces de espirales en dos sentidos, similares a los del girasol, que contienen espirales en números consecutivos de Fibonacci.

La distribución de las hojas en las plantas, también tiene que ver con los números de Fibonacci. Si enumeramos las hojas de una rama, como se muestra en la figura, la hoja que corresponde a un número de Fibonacci, se encuentra exactamente sobre la hoja enumerada con 0. Esta disposición puede obedecer a alguno de los números de Fibonacci, que comúnmente son los números 2; 3 ó 5



Las piñas tienen dos haces de espirales que contienen un número de Fibonacci de espirales

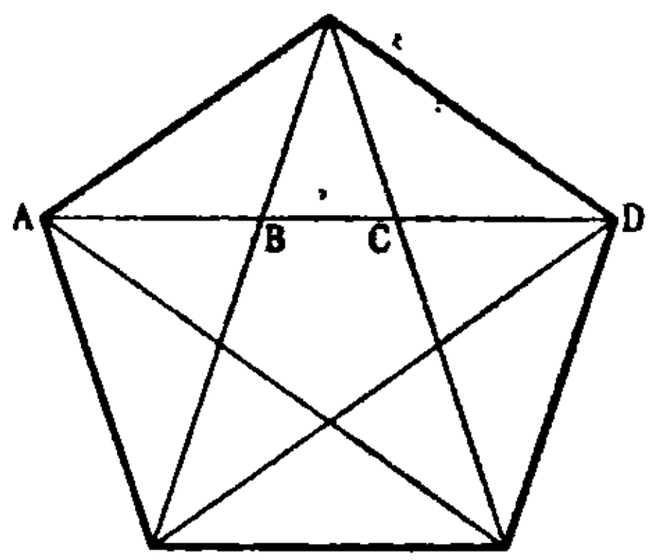
Fibonacci y la geometría.

Si dividimos cada número de Fibonacci entre su antecesor, cuanto mayor sea el número, el cociente se irá acercando al valor 1,61803...

Este es el famoso número aúreo, tan importante en las artes plásticas, la arquitectura e incluso en la poesía, que proviene de la expresión

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ \cdots$$

En un pentágono regular, en el que se han trazado todas las diagonales, tomamos tres segmentos de tamaños consecutivos y dividimos la longitud del mayor entre la del mediano, y la de éste entre la longitud del menor, los cocientes resultan números áureos. Por ejemplo:



$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} = 1{,}61803$$

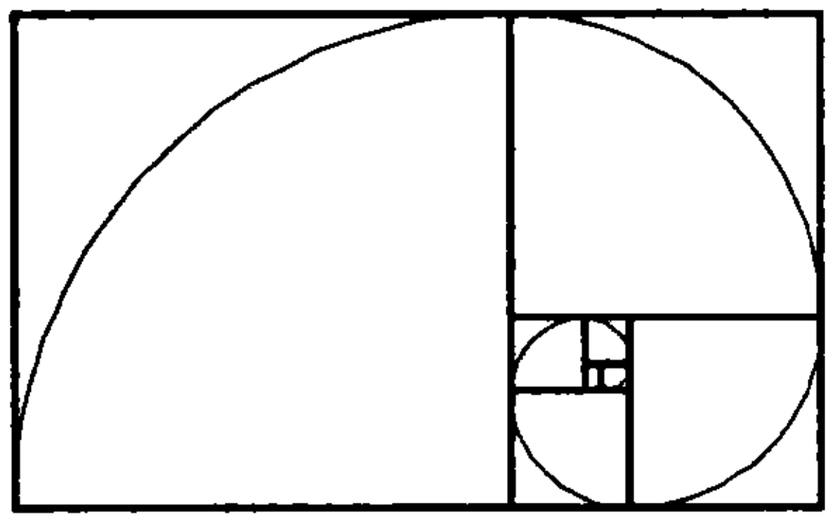
esta expresión se llama **proporción áurea**.

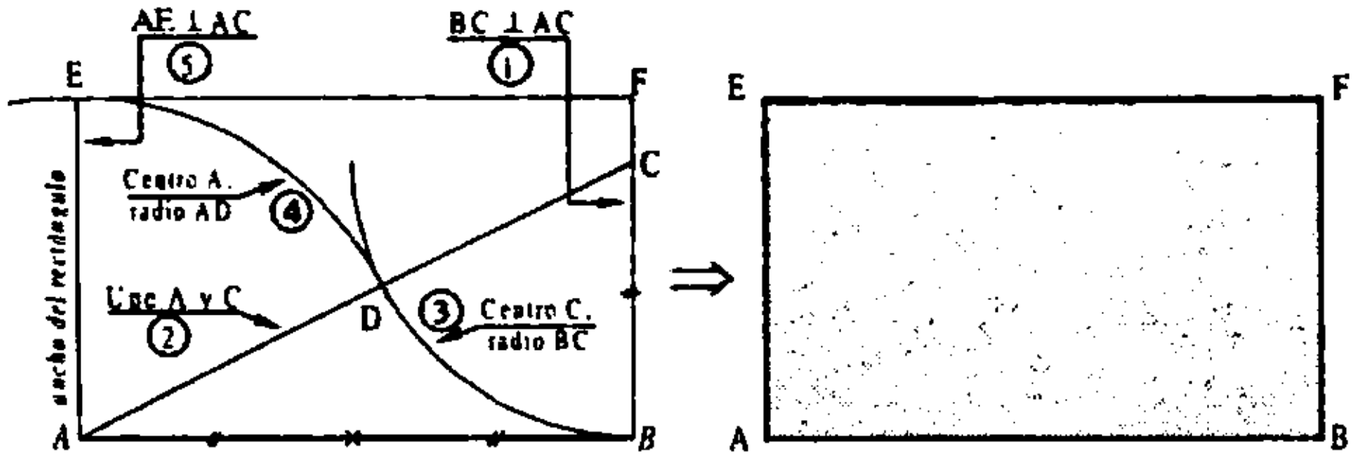
Dos números forman una **razón áurea**, si al dividirlos resulta un número áureo.

Un rectángulo se considera estético, si sus dimensiones guardan una razón áurea. Esta forma de valoración de las figuras en el campo de la arquitectura, tuvo especial consideración en la antigua cultura griega, cuyas construcciones, como el Partenón, estaban diseñados con proporciones áureas.

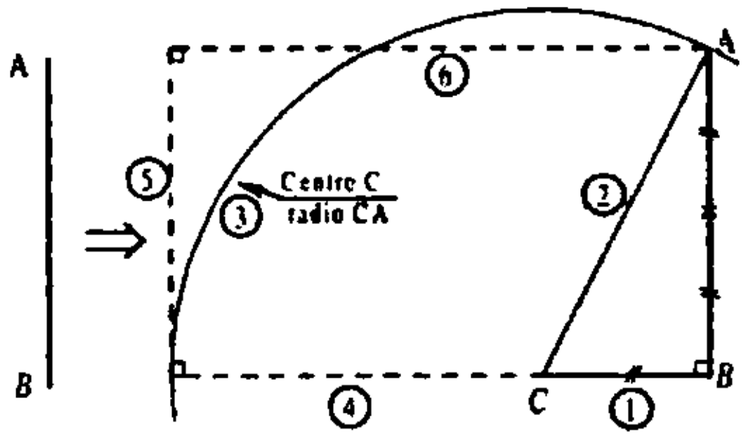
El Partenón. Templo de la Acrópolis de Atenas del siglo V a. n. e.

Un rectángulo áureo, tiene la propiedad de que si se separa un cuadrado en él, el rectángulo que queda también es áureo, de modo que éstos rectángulos se pueden ir dividiendo indefinidamente en un cuadrado y en un rectángulo áureo. Las ventanas, los cuadros, pantallas, entre otros objetos de forma rectangular, se dice que son más "agradables" a la vista, si sus dimensiones guardan una razón áurea o cercana a ella. Un rectángulo áureo se construye fácilmente con regla y compás, como se muestra en las figuras.





Construcción del rectángulo áureo dado el largo $\overline{AB}$.
Se toma $\overline{BC}$ *igual a la mitad de* $\overline{AB}$.



Construcción del rectángulo áureo dado el ancho $\overline{AB}$.
Se toma $\overline{BC}$ *igual a la mitad de* $\overline{AB}$.

8.5. SUMATORIAS

Sea "*n*" un número entero positivo y sean los números reales: a_1; a_2; a_3; a_4; ...; a_n; entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$$

Donde:

$\sum$: Es la letra griega "sigma", que en nuestro idioma equivale a la letra S. Esta letra se lee "sumatoria" (suma de...)

i: Indice de variación, que indica que "*i*" toma valores naturales y consecutivos desde $i = 1$ hasta $i = n$

a_i: Es el término general, que indica la forma de los términos que van a sumar. Se lee *a* sub *i*.

La expresión $\sum_{i=1}^{n} a_i$ **se lee:**

"sumatoria de los números de la forma a_i *desde* $i = 1$ *hasta* $i = n$

Ejemplos

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$\sum_{i=5}^{9} a_i = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$$

$$\sum_{i=1}^{10} 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{10}$$

$$\sum_{i=1}^{20} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 20$$

$$\sum_{i=5}^{10} 4^{i+2} = 4^7 + 4^8 + 4^9 + 4^{10} + 4^{11} + 4^{12}$$

$$\sum_{i=5}^{n} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots + \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (3i+2) = 5 + 8 + 11 + 14 + \ldots + (3n+2)$$

Ejercicios

Representa mediante sumatorias las siguientes series:

$1^8 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 =$ ☐

$2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n =$ ☐

$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n =$ ☐

$\frac{1}{2} + \frac{4}{9} + \frac{9}{4} + \ldots + \frac{n^2}{n+1} =$ ☐

$5 + 8 + 11 + \ldots + 305 =$ ☐

Propiedades de las sumatorias

PROPIEDAD 1

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = ca_1 + ca_2 + ca_3 + ca_4 + \ldots + ca_n$$

$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n)$$

$$= c\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)} \quad \text{E1}$$

PROPIEDAD 2

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + c + \ldots + c}_{n \text{ veces}} = nc \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{i=1}^{n} c = nc} \quad \text{E2}$$

E1

$$\sum_{i=1}^{n} 4i = 4\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} 10 \times 2^i = 10\left(\sum_{i=1}^{n} 2^i\right)$$

E2

$$\sum_{i=1}^{10} 20 = 10 \times 20 = 200$$

$$\sum_{i=12}^{40} 30 = (40 - 11)30$$

PROPIEDAD 3

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots a_n+b_n$$

$$=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+(b_1+b_2+\ldots+b_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i} \quad (E3)$$

(E3)

$$\sum_{i=1}^{n}(2^i+3^i)=\sum_{i=1}^{n}2^i+\sum_{i=1}^{n}3^i$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}2k+\sum_{k=1}^{n}1$$

PROPIEDAD 4

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\ldots+a_p+a_{p+1}+a_{p+2}+\ldots+a_n$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{p}a_i+\sum_{i=p+1}^{n}a_i} \quad (E4)$$

(E4)

$$\sum_{i=1}^{30}a_i=\sum_{i=1}^{20}a_i+\sum_{i=21}^{30}a_i$$

$$\sum_{i=1}^{48}2^i=\sum_{i=1}^{35}2^i+\sum_{i=36}^{48}2^i$$

PROPIEDAD 5 (Propiedad telescópica)

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})=(\cancel{a_1}-a_0)+(\cancel{a_2}-\cancel{a_1})+(\cancel{a_3}-\cancel{a_2})+(a_4-\cancel{a_3})\ldots+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_0$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})=a_n-a_0}$$

Aplicaciones de la propiedad telescópica

1. Demostrar que:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}} \quad (E5)$$

(E5)

$$\sum_{k=1}^{20}k=1+2+3+\ldots+20$$

Sabemos que:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0 \qquad \ldots(1)$$

$$=\frac{20(20+1)}{2}=210$$

Si hacemos que:

$$\sum_{k=1}^{40}k=1+2+3+\ldots+40$$

$a_k=k^2 \Rightarrow a_{k-1}=(k-1)^2 \Rightarrow a_n=n^2$ y $a_0=0^2=0$

Reemplazando en (1): $\sum_{k=1}^{n}[k^2-(k-1)^2]=n^2-0$

$$=\frac{40(40+1)}{2}=820$$

Desarrollando: $\sum_{k=1}^{n}[2k-1] = n^2$

Por la propiedad 3: $\sum_{k=1}^{n}2k - \sum_{k=1}^{n}1 = n^2$

Pero $\sum_{k=1}^{n}1 = n \Rightarrow 2\sum_{k=1}^{n}k - n = n^2 \Rightarrow$ $\boxed{\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}}$

2. Demostrar que:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$ E6

$$\sum_{k=1}^{n}[k^3 - (k-1)^3] = n^3 - 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}[3k^2 - 3k + 1] = n^3$$

$$\Rightarrow 3\sum_{k=1}^{n}k^2 - 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 = n^3$$

$$\Rightarrow 3\sum_{k=1}^{n}k^2 - 3\frac{n(n+1)}{2} + n = n^3$$

$$\Rightarrow 3\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}}$$

3. Partiendo de la igualdad: $\sum_{k=1}^{n}[k^4 - (k-1)^4] = n^3$ se demuestra que:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$$

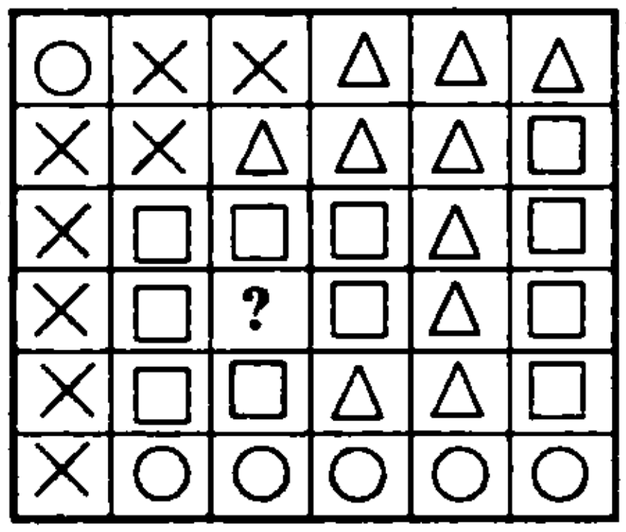
Problema 1

Calcula la suma de los 30 primeros términos de la serie:

$$S = 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots$$

Divertijo 18

La distribución de los círculos, triángulos, cuadrados y aspas sigue una secuencia perfectamente lógica. ¡Descúbrela! Completa la figura que falta.



E6

$$\sum_{k=1}^{12}k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 12^2$$

$$= \frac{12(12+1)(2\times12+1)}{6}$$

$$= 650$$

$$\sum_{k=1}^{20}k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 20^2$$

$$= \frac{20(20+1)(2\times20+1)}{6}$$

$$= 2870$$

Resolución

La fórmula general de la serie es $(3n + 1)$. Entonces, cada uno de los términos de la serie tiene la forma $(3n+1)$. O sea:

$$S = \underset{\downarrow}{4} + \underset{\downarrow}{7} + \underset{\downarrow}{10} + \underset{\downarrow}{13} + \ldots$$

$$S = (3\times1 +1) + (3\times2 +1) + (3\times3 +1) + (3\times4 +1) + \ldots + (3\times30 +1) = \sum_{k=1}^{30}(3k+1)$$

$$S = \sum_{k=1}^{30}(3k+1) = 3\sum_{k=1}^{30}k + \sum_{k=1}^{30}1 = 3\left[\frac{30\times31}{2}\right] + 30$$

$$S = 1395 + 30 \Rightarrow \boxed{S = 1425}$$

Problema 2

Hallar la suma de la serie:

$$S = 7 + 11 + 15 + 19 + \ldots + 131$$

Resolución

La fórmula general es $4n + 3$; entonces tiene:

$4n + 3 = 131 \Rightarrow n = 32$ términos. Luego:

$$S = \sum_{k=1}^{32}(4k+3) = 4\sum_{k=1}^{32}k + \sum_{k=1}^{32}3 = 4\left[\frac{32\times33}{2}\right] + 3\times32$$

$$\boxed{S = 2208}$$

Problema 3

Hallar la suma de los 20 primeros términos de la serie cuyo término general es $2n^2 - 3n + 1$

Resolución

$$\sum_{k=1}^{20}(2k^2 -3k+1) = 2\sum_{k=1}^{20}k^2 - 3\sum_{k=1}^{20}k + \sum_{k=1}^{20}1$$

$$\sum_{k=1}^{20}(2k^2 -3k+1) = 2\left(\frac{20\times41\times21}{6}\right) - 3\left(\frac{20\times21}{2}\right) + 20\times1 \quad = 5740 - 630 + 20$$

$$\boxed{= 5130}$$

Problemas

1. Calcular cada una de las siguientes sumatorias y señalar la respuesta correcta:

$$S = \sum_{k=1}^{18} k \qquad R = \sum_{k=1}^{14} k^3$$

$$P = \sum_{k=1}^{12} 2k \qquad T = \sum_{k=1}^{18} (2k+3)$$

$$Q = \sum_{k=1}^{15} k^2 \qquad U = \sum_{k=1}^{8} (2k^2 - 3k)$$

A) $S + P\ 326$ **B)** $T + U = 1426$
C) $P + T = 550$ **D)** $R - Q = 9785$
E) $U - S = 482$

2. Calcular el valor de:

$$E = \sum_{k=1}^{8} (3k+2) + \sum_{k=1}^{24} (2k-5)$$

A) 742 **B)** 672 **C)** 725
D) 640 **E)** 604

3. Calcular la suma de los 20 primeros términos de la serie:

$$1 + 5 + 9 + 13 + \ldots$$

A)790 **B)**780 **C)**770
D)1680 **E)**660

4. Calcular la suma de la serie:

$$2 + 9 + 16 + 23 + \ldots + 170$$

A) 740 **B)** 748 **C)** 2150
D) 2400 **E)** 2415

5. Hallar la suma de la serie:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + \ldots + 20^2$$

A) 2585 **B)** 2558 **C)** 2575
D)2565 **E)** 2590

6. Hallar la suma de la serie

$$12^3 + 13^3 + 14^3 + 15^3 + \ldots + 25^3$$

A) 104308 **B)**102408 **C)** 101300
D) 101269 **E)** 100360

7. Hallar la suma de la serie:

$$(1^2 + 1) + (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + \ldots + (20^2 + 20)$$

A) 3075 **B)** 3080 **C)** 3085
D) 3090 **E)** 3095

8. Calcular la suma de la serie:

$$(1+2) + (2+3) + (3+4) + \ldots + (24+25)$$

A) 620 **B)** 622 **C)** 624
D) 628 **E)** 630

9. Hallar la suma de la serie:

$$(1+2+3) + (2+3+4) + (3+4+5) + \ldots + (30+31+32)$$

A) 1465 **B)** 1470 **C)** 1475
D) 1480 **E)** 1485

10. Calcular la suma de la serie:

$$(1^2 + 2) + (2^2 + 3) + (3^2 + 4) + \ldots$$

(18 sumandos)

A) 2298 **B)** 2289 **C)** 2279
D) 2287 **E)** 2280

11. Hallar el resultado de:

$$\sum_{k=1}^{18} 2(k+1) + \sum_{k=1}^{20} 3(k-1)$$

A) 942 **B)** 945 **C)** 948
D) 950 **E)** 958

12. Hallar el resultado de:

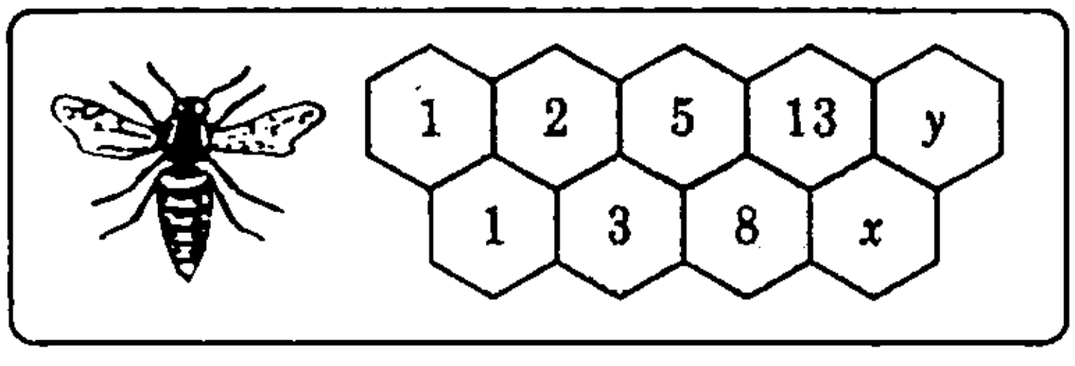
$$\sum_{k=1}^{24} k(k-2)$$

A) 4280 **B)** 4300 **C)** 4324
D) 4325 **E)** 4326.

Problemas Resueltos

Problema 1

Esta abeja quisiera saber, cuánto suman los números que han sido reemplazados por letras; ¿Podrías darle una mano?



Resolución

Cada número es la suma de los dos anteriores (sucesión de Fibonacci)

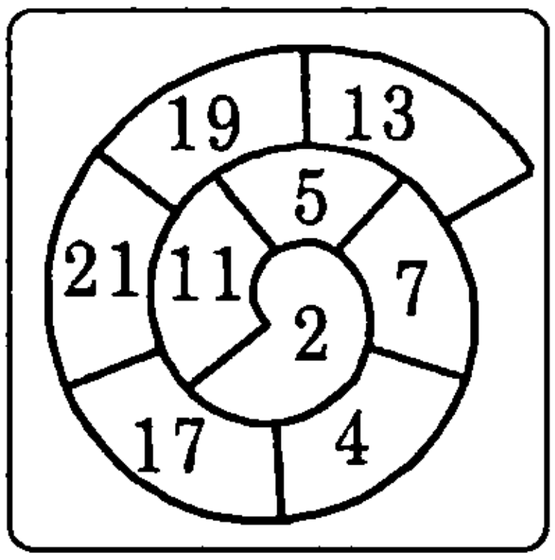
$$x = 13 + 8 = 21 \quad \text{e} \quad y = 13 + 21 = 34$$

$$\therefore \quad x + y = 21 + 34 = 55$$

Rpta.: 55

Problema 2

Este espiral está lleno de números que pertenecen a una "familia", pero hay dos números que se han infiltrado sin ser de la familia. Identificalos y súmalos.



Resolución

Son números primos, excepto 4 y 21.

Rpta.: 25

Problema 3

Hallar la suma de la serie

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots - 800$$

Resolución

1 pareja: $1 - 2 = -1$

2 parejas: $1 - 2 + 3 - 4 = -2$

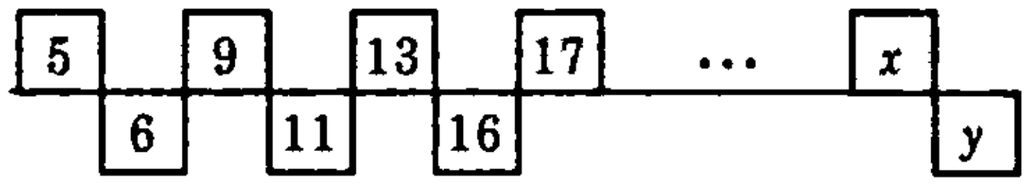
3 parejas: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 = -3$ etc.

En $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots - 800$ hay 400 parejas, en consecuencia, la suma resulta -400.

Rpta.: –400

Problema 4

En la gráfica se ha distribuido los términos de dos sucesiones:



¿Cuántos términos tiene cada uno, si $y - x = 24$

Resolución

Si "n" es el número de términos de cada sucesión, tendremos:

$$5;\ 9;\ 13;\ 17;\ \ldots;\ 4n + 1 \leftarrow x$$

$$6;\ 11;\ 16;\ 21;\ \ldots.;\ 5n + 1 \leftarrow y$$

Del dato:

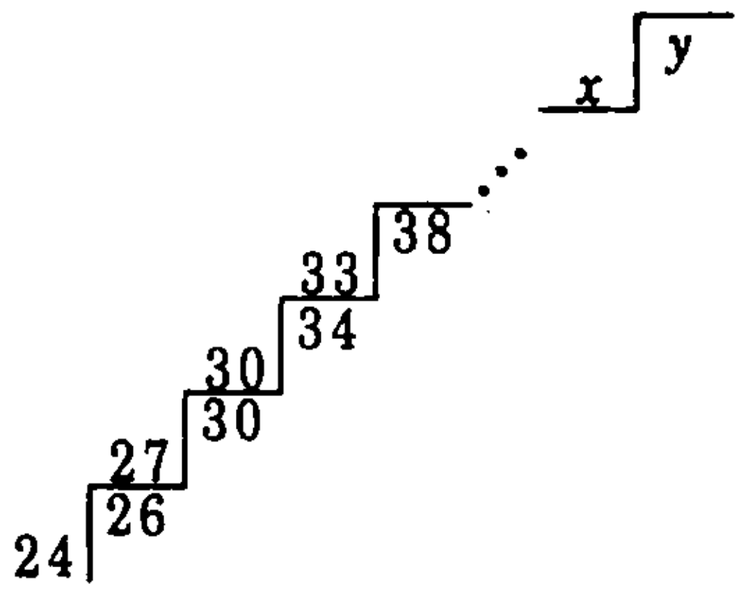
$$y - x = 24 \quad \Rightarrow (5n + 1) - (4n + 19) = 24$$

$$\Rightarrow n = 24$$

Rpta.: 24

Problema 5

Esta escalera tiene 42 peldaños. ¿Cuánto vale $x + y$?



Resolución

Las sucesiones son:

$$24; 27; 30; 33; \ldots ; 3n + 21$$

$$26; 30; 34; 38; \ldots ; 4n + 22$$

Para n = 42:

$3n + 21 = 3(42) + 21 = 147 = x$

$4n + 22 = 4(42) + 22 = 190 = y$

$\therefore\ x + y = 147 + 190 = 337$

Problema 6

Hallar la suma de la serie siguiente:

$$S = 1 + 2 + 7 + 7 + 13 + 12 + \ldots + 42$$

Resolución

• Obérvese de que el último término 42 pertenece a la serie S_2, porque todos los términos de S_1 son impares.

• Como la serie S comienza en un término de S_1 y termina en un término de S_2 entonces S_1 y S_2 tienen el mismo número de términos. Encontrando el número de términos de S_2 se podrá encontrar el de S_1 y con ello se podrá calcular el último término x de S_1.

• Entonces:

$$S = 1 + 2 + 7 + 7 + 13 + 12 + \ldots + x + 42$$

$$S = \begin{cases} \rightarrow S_1 = 1 + 7 + 13 + \ldots + x \\ \rightarrow S_2 = 2 + 7 + 12 + \ldots + 42 \end{cases}$$

Donde:

$$S = S_1 + S_2 \quad \ldots (1)$$

• En S_2: $n = \dfrac{a_n - a_0}{r} \Rightarrow n = \dfrac{42 - (-3)}{5} = 9$

$n = 9 = N^o$ *de términos de* S_1

Además:

$$S_2 = \frac{n(a_n + a_1)}{2} \Rightarrow S_2 = \frac{9(42 + 2)}{2} = 198$$

• En S_1: $n = \dfrac{a_n - a_0}{r} \Rightarrow 9 = \dfrac{x - (-5)}{6}$

$$\Rightarrow \boxed{x = 49}$$

Luego:

$$S_1 = \frac{n(a_n + a_1)}{2} \Rightarrow S_1 = \frac{9(49 + 1)}{2} = 225$$

En (1) : $S = 225 + 198 = 423$

Rpta.: 423

Problema 7

En la sucesión

$$7; 13; 19; 25; 31; \ldots$$

¿Cuál es el tercer término que termina en cifra 3?

Resolución

La sucesión es : 7; 13; 19; 25; 31; ... ; $6n + 1$

De donde:

$$6n + 1 = \ldots 3$$

$$6n = \ldots 2 \Rightarrow n = \ldots 2$$

Cada vez que "n" termine en 2 ó 7; la sucesión termina en 3, esto es, para $n = 2; 7; 12; \ldots$

Por tercera vez termina en 3 para $n = 12$

Entonces el término es $6(12) + 1 = 73$

Rpta: 73

Problema 8

Desde cierta altura se deja caer una pelota y se observa que en cada rebote alcanza 2/3 de la altura de donde cae. Si hasta el momento de detenerse ha recorrido un espacio total de 500 cm; ¿de qué altura se dejó caer?

Resolución

Sea h la altura en cm desde donde cae la pelota, entonces el espacio recorrido hasta el momento de detenerse será: recorrido en la

caída, la ida y vuelta en el primer rebote, la ida y vuelta en el segundo rebote, etc. O sea:

$$500 = h + 2\left(\frac{2}{3}h\right) + 2\left(\frac{4}{9}h\right) + 2\left(\frac{8}{27}h\right) + \ ...$$

$$500 = h + \frac{2}{3}\Big[\underbrace{h + h + 2\left(\frac{2}{3}h\right) + 2\left(\frac{4}{9}h\right) + 2\left(\frac{8}{27}h\right)...}_{500}\Big]$$

$$500 = h + \frac{2}{3}(h + 500)$$

$$\frac{100}{3} = \frac{5h}{3} \quad \rightarrow \quad h = 20\ cm$$

Rpta.: 20 cm

Problema 9

Si $S_k = 1 + 2 + 3 + 4 + .. + (k + 1)$

Hallar

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + .. + S32$$

Resolución

Se observa que S_k es la suma de los $(k + 1)$ primeros enteros positivos, entonces, aplicando la suma de los "n" primeros positivos $\frac{n(n+1)}{2}$ tenemos:

$$S_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

De donde:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{32} = \sum_{k=1}^{32} S_k$$

$$S = \sum_{k=1}^{32} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{32}(k^2 + 3k + 2)\right]$$

$$S = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{32} k^2 + 3\sum_{k=1}^{32} k + \sum_{k=1}^{32} 2\right]$$

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{32 \cdot 33 \cdot 65}{6} + \frac{3 \cdot 32 \cdot 33}{2} + 2 \cdot 32\right)$$

$$S = 6544$$

Rpta.: 6 544

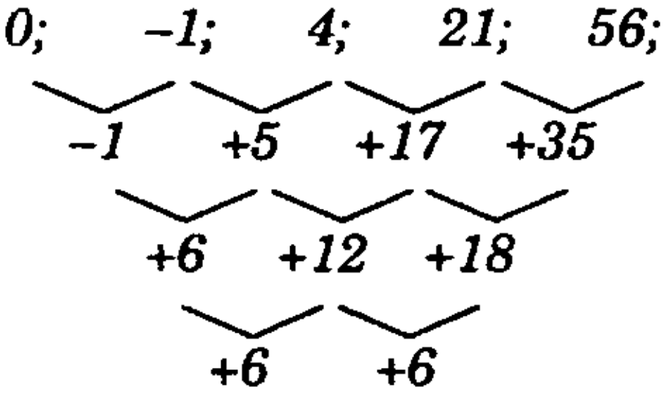
Problema 10

Hallar la suma de los primeros 20 términos de la sucesión:

0; -1; 4; 21; 56; ...

Resolución

Primero debemos identificar el tipo de sucesión que tenemos a la vista:



Es una sucesión de tercer orden, entonces podemos aplicar la fórmula con números combinatorios.

$$S_{20} = 0\,C_1^{20} - 1\,C_2^{20} + 6\,C_3^{20} + 6\,C_4^{20}$$

$$S_{20} = -\frac{20!}{18!\,2!} + \frac{6 \cdot 20!}{17!\,3!} + \frac{6 \cdot 20!}{16!\,4!}$$

$$S_{20} = -\frac{19 \cdot 20}{2} + \frac{6 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{6} + \frac{6 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{24}$$

$$S_{20} = 35\ 720$$

Rpta.: 35 720

Problema 11

Si "n" es un entero positivo, el valor de la suma

$$3 + 33 + 333 + \ldots + 33\ldots3 \text{ es:}$$

Resolución:

Sea:

$$S = 3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{33\ldots3}_{\text{"n" cifras}}$$

$$3S = 9 + 99 + 999 + \ldots + 999\ldots9$$

$$3S = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \ldots + (10^n - 1)$$

$$3S = (10 + 10^2 + 10^3 + \ldots\ 10^n) - \overbrace{(1 + 1 + 1 + \ldots + 1)}^{\text{"n" veces}}$$

$$3S = (1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n - 1) - n$$

$$3S = \frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} - 1 - n \quad \Rightarrow \quad S = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{27}$$

Rpta.: $S = \dfrac{10^{n+1} - 10 - 9n}{27}$

Problema 12

Hallar la suma de la siguiente serie:

$$S = 1 + 2 + 5 + 10 + 17 + \ldots + 122$$

Resolución

$$S = 1 \overset{1}{+} 2 \overset{3}{+} 5 \overset{5}{+} 10 \overset{7}{+} 17 + \ldots + 122$$

$$\overset{2}{\quad} \quad \overset{2}{\quad} \quad \overset{2}{\quad}$$

Fórmula de recurrencia:

$$t_n = 1\,C_0^{n-1} + 1\,C_1^{n-1} + 2\,C_2^{n-1}$$

$$122 = 1 + (n-1) + 2\left[\frac{(n-1)!}{(n-3)!2!}\right] \Rightarrow \quad 122 = n + \frac{2(n-2)(n-1)}{2} \quad \Rightarrow \quad n = 12$$

Luego, la suma es:

$$S = 1\,C_1^{12} + 1\,C_2^{12} + 2\,C_3^{12}$$

$$S = 12 + \frac{12!}{10!\,2!} + 2\left[\frac{12!}{9!\,3!}\right] \Rightarrow S = 12 + 66 + 440 \quad \Rightarrow \quad S = 518$$

Rpta.: 518

Problema 13

La suma de la serie:

$$1\times2^2 + 2\times2^3 + 3\times2^4 + 4\times2^5 + \ldots + 50\times2^{51} \text{ es:}$$

Resolución

Sea:

$$S = 1\times2^2 + 2\times2^3 + 3\times2^4 + 4\times2^5 + \ldots 50\times2^{51} \qquad \ldots (1)$$

$$2S = 1\times2^3 + 2\times2^4 + 3\times2^5 + 4\times2^6 + \ldots 50\times2^{52} \qquad \ldots (2)$$

(2) – (1):

$$S = -1\times2^2 - 1\times2^3 - 1\times2^4 - 1\times2^5 - \ldots -1\times2^{51} + 50\times2^{52}$$

$$S = -2^2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{49}) + 50\times2^{52}$$

$$S = -2^2\left(\frac{2^{50} - 1}{2 - 1}\right) + 50\times2^{52} = -2^{52} + 4 + 50\times2^{52}$$

$$S = 49\times2^{52} + 4$$

Rpta.: $S = 49 \cdot 2^{52} + 4$

Problema 14

¿Cuál es la suma de la serie:

$$\frac{1}{2\times4\times6} + \frac{1}{4\times6\times8} + \frac{1}{6\times8\times10} + \ldots + \frac{1}{40\times42\times44}$$

Sea:

$$S = \frac{1}{2\times4\times6} + \frac{1}{4\times6\times8} + \frac{1}{6\times8\times10} + \quad \ldots \quad + \frac{1}{38\times40\times42} + \frac{1}{40\times42\times44}$$

$$8S = \frac{8}{2\times4\times6} + \frac{8}{4\times6\times8} + \frac{8}{6\times8\times10} + \quad \ldots \quad + \frac{8}{38\times40\times42} + \frac{8}{40\times42\times44}$$

$$8S=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{6}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{8}+\frac{1}{10}\right)+\ \ \ldots\ \ +\left(\frac{1}{38}-\frac{2}{40}+\frac{1}{42}\right)+\left(\frac{1}{40}-\frac{2}{42}+\frac{1}{44}\right)$$

$$8S=\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{42}-\frac{2}{42}+\frac{1}{44}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{42}+\frac{1}{44}\ \Rightarrow\ 8S=\frac{230}{924}\ \rightarrow\ S=\frac{115}{3696}$$

Rpta.: $S=\frac{115}{3696}$

Problema 15

Hallar la suma de la serie: $S=1+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{9}{24}+\ldots+\frac{41}{3\times 2^{19}}$

Resolución

$$S=\frac{3}{3}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{9}{24}+\ldots+\frac{39}{3\times 2^{18}}+\frac{41}{3\times 2^{19}}\qquad\ldots(1)$$

$$\frac{S}{2}=\frac{3}{6}+\frac{5}{12}+\frac{7}{24}+\frac{9}{48}+\ldots+\frac{39}{3\times 2^{19}}+\frac{41}{3\times 2^{20}}\qquad\ldots(2)$$

(1) – (2) : $\frac{S}{2}=\frac{3}{3}+\frac{2}{6}+\frac{2}{12}+\frac{2}{24}+\frac{2}{48}+\ldots+\frac{2}{3\times 2^{19}}-\frac{41}{3\times 2^{20}}$

$$\frac{S}{2}=\frac{3}{3}+\frac{2}{6}\left[1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{18}\right]-\frac{41}{3\times 2^{20}}$$

$$\frac{S}{2}=1+\frac{1}{3}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{19}-1}{\frac{1}{2}-1}\right]-\frac{41}{3\times 2^{20}}$$

$$\frac{S}{2}=1+\frac{1}{3}\left[\frac{2^{19}-1}{2^{18}}\right]-\frac{41}{3\times 2^{20}}\ \Rightarrow\ S=\frac{5(2^{20}-9)}{3\times 2^{20}}$$

Rpta.: $S=\frac{5(2^{20}-9)}{3\times 2^{20}}$

Problemas Propuestos

1. En cada una de las siguientes sucesiones, determinar el término que sigue:

a. 7; 8; 11; 16; ...

b. 1; 2; 3; 6; 13; 26; ...

c. 2; 4; 12; 48; ...

d. 3; 4; 6; 10; ...

e. 2; 2; 6; 54; ...

f. 2; 3; 5; 11; 35; ...

g. 4; 9; 25; 49; 121; ...

h. 1; 3; 4; 7; 11; 18; ...

i. 2; 2; 8; 72; 1152; ...

Indicar la alternativa que señala algunas de las respuestas

A) a) 23 c) 240 d) 18 e) 1450

B) b) 47 d) 18 e) 1458 f) 150

C) b) 47 g) 169 h) 29 i) 288

D) c) 240 e) 1458 f) 155 g) 169

E) a) 23 c) 240 f) 155 h) 168

2. En cada una de las siguientes sucesiones del 1 al 10 se pide encontrar el número que sigue:

a) 2; 6; 18; 54; ...

A) 130 **B)** 140 **C)** 150 **D)** 160 **E)** 162

b) 2; 3; 5; 7; 11; 13; ...

A) 19 **B)** 20 **C)** 18 **D)** 17 **E)** 24

c) 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ...

A) 10 **B)** 21 **C)** 20 **D)** 16 **E)** 24

d) 2; 1; 3; 8; 16; ...

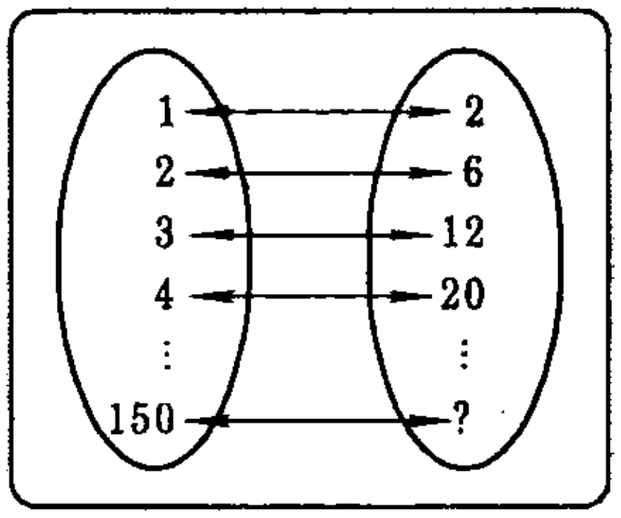
A) 24 **B)** 25 **C)** 26 **D)** 27 **E)** 50

3. Si se sabe que a 1 le corresponde 2, a 2 le corresponde 5, a 3 le corresponde 8. ¿Cuánto le corresponde a 6?

A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

4. Entre los elementos de los dos conjuntos hay una "correspondencia biunívoca". ¿Qué número le corresponde a 150?

A) 20560
B) 21850
C) 23650
D) 22650
E) 24850



5. ¿Cuál es el término general de la sucesión:

7; 11; 15; 19; ...

A) 4n + 7 **B)** 4n – 7 **C)** 4n + 1
D) 3n + 4 **E)** 4n + 3

6. Se forma un numeral escribiendo consecutivamente los números naturales a partir de 1, como sigue:

12345678910111 2 ...

¿Cuántas cifras va tener este numeral, cuando se haya escrito 4 veces el cero?

A) 80 **B)** 71 **C)** 69 **D)** 68 **E)** 74

7. La sucesión

1; 4; 6; 7; 11; 10; 16; 13; ...

Tiene 40 términos. ¿Cuál es el último término?

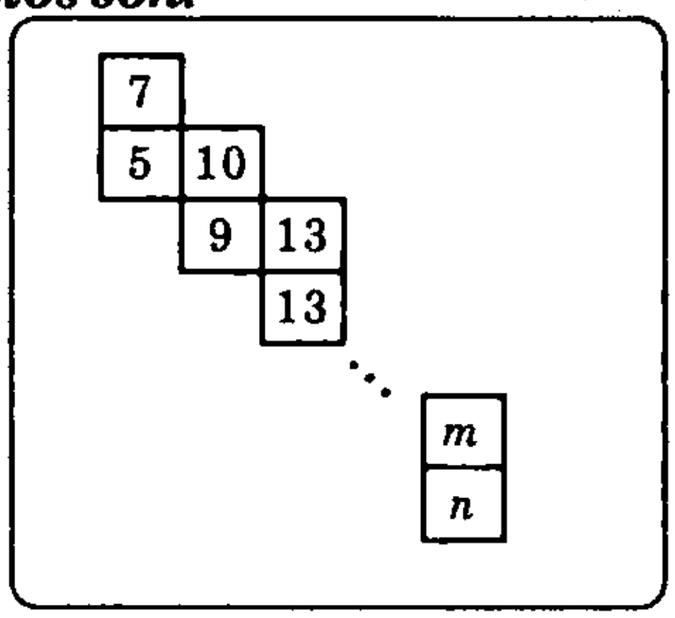
A) 60 **B)** 61 **C)** 65 **D)** 58 **E)** 48

8. ¿Cuántos términos tiene esta sucesión, si la suma de sus últimos 2 términos es 337?

4; 11; 18; 25 ...

A) 20 B) $2\dot{3}$ C) 25 D) 28 E) 30

9. *Estos números están dispuestos siguiendo una lógica, no sabemos cuántos son en total, sólo sabemos que $m+n=47$. Tal vez tú puedes decirnos cuántos son.*



A) 10 B) 12 C) 4 D) 16 E) 18

10. *Hallar la suma límite de la serie*

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^4 + 2^8 + \ldots$$

A) $2n-1$ B) 2 C) $2n+1$
D) ∞ E) -1

11. *En la sucesión siguiente, ¿qué exponente le corresponde a la base igual a 1?*

$$60^3; 59^5; 58^7; 57^9; \ldots.$$

A) 121 B) 60 C) 120
D) 119 E) 118

12. *En la siguiente sucesión encuentra el valor de "n":*

$$a^2+2,\ a^5+7,\ a^8+12,\ \ldots,\ a^n+152$$

A) 90 B) 91 C) 92 D) 93 E) 94

13. *Las sucesiones:*

$$124;\ 120;\ 116;\ \ldots \text{ y}$$

$$-2;\ 1;\ 4;\ 7;\ \ldots$$

tienen igual cantidad de términos y además sus últimos términos son iguales. El penúltimo término de la segunda sucesión es:

A) 53 B) 47 C) 61 D) 67 E) 49

14. *A los términos de la serie:*

$$S = 2 + 5 + 8 + 11 + \ldots$$

Se le agrega 1, 2, 3, 4, 5, ... respectivamente, de tal manera que la suma de la nueva serie sea igual a 1830.

¿Cuántos términos tiene la serie original?

A) 20 B) 24 C) 28 D) 30 E) 35

15. *Hallar la suma de la serie:*

$$S = 2 + 3 + 5 + 7 + 8 + 11 + \ldots + 62$$

A) 1492 B) 1575 C) 1750
D) 1842 E) 1594

16. *Hallar al suma de la serie:*

$$S = 1 + 1 + 3 + 7 + \ldots + 111$$

A) 452 B) 425 C) 542
D) 524 E) 530

17. *Si: $a = n^3 - n^2 + 2$, halle:*

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}$$

A) 1660 B) 2660 C) 1550
D) 2550 E) 2670

18. *Si sigues escribiendo los términos de esta sucesión, llegarás a un término en el que el exponente se vuelve negativo. Calcula la suma de todas las bases con exponente positivo.*

$$3^{398};\ 7^{392};\ 11^{382};\ 15^{368};\ \ldots$$

A) 1400 B) 9370 C) 3980
D) 400 E) 9045

19. *¿Cuál es la suma de la serie finita:*

$$4 + 7 + 10 + \ldots + 91?$$

A) 1245 B) 1542 C) 1425
D) 1425 E) 1375

20. *El Profesor le ha mandado a Lupita, escribir la sucesión:*

5; 12; 19; 26; ...

Hasta que encuentre por tercera vez un término que termine en cifra 3 y halle la suma de todos los términos de la sucesión escritos hasta ese momento. No te pediré que escribas los términos de la sucesión, pero sí, la suma.

A) 2125 **B)** 2225 **C)** 2275
D) 2325 **E)** 2450

21. Aquí se muestra los 4 primeros términos de la serie. ¿Puedes calcular la suma de los 10 primeros términos de esta serie?

1 +(3 + 5)+(7 + 9 + 11)+(13 + 15 + 17 + 19)+...

A) 3050 **B)** 3055 **C)** 3025
D) 3075 **E)** 3250

22. Los primeros términos de 2 progresiones aritméticas, que tienen igual número de términos son 17 y – 8 respectivamente y sus respectivas razones, 7 y 5. ¿Cuántos términos tiene cada uno, si el último término del primero es el doble del término final del segundo?

A) 8 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

23. En un trabajo de reforestación, laboran 5 personas. Cada día plantan 3 árboles más de lo que plantan en el día anterior. El último día plantaron tantos árboles como el quíntuplo del número de días que han trabajado. ¿Cuántos árboles plantaron el segundo día, sabiendo que los plantados el primer día y el último día totalizan 143?

A) 46 **B)** 49 **C)** 43 **D)** 40 **E)** 20

24. Si la suma de los "n" primeros números enteros positivos es 7/20 de la suma de los "n" siguientes; halle "n".

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

25. Un obrero ahorra cada día S/. 5 más de lo que ahorró el día anterior; el último día se da cuenta que el número de días que estuvo ahorrando hasta el día anterior, era la séptima parte de lo que ahorró ese día. Sabiendo que, lo que ahorró el quinto día y lo que ahorró el penúltimo día, totalizan S/. 290, ¿cuánto ahorró el primer día?

A) S/. 60 **B)** S/. 65 **C)** S/. 70
D) S/. 75 **E)** S/. 80

26. Los consejeros de un banco se reúnen cierto día, saludándose mutuamente. Si se sabe que los choques de manos han sido 78 en total. ¿Cuántos consejeros tiene el banco?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

27. Un móvil "A" sale con 600 metros de ventaja y 15 segundos antes que otro móvil B. "A" anda 1 metro en el primer segundo, 2 en el segundo, 3 en el tercero y así sucesivamente; "B" anda 1 metro en el primer segundo, 4 en el segundo, 7 en el tercero y así sucesivamente. ¿Cuánto tardará "B" en alcanzar a "A"?

A) 20 Minutos **B)** 25 Minutos
C) 27 minutos
D) 30 minutos **E)** 36 minutos

28. Un obrero ha ahorrado este mes 178 soles y tiene con esto, S/. 1410 en la caja de ahorros, habiendo economizado cada mes S/. 12 más que el anterior. ¿Cuánto ahorró el primer mes?

A) S/.8 **B)** S/.12 **C)** S/.10
D) S/.15 **E)** S/.18

29. En el trabajo de perforación de un pozo de 150 metros de profundidad, el costo es de S/.20 para el primer metro y S/.2 más para cada metro

adicional, con respecto al costo del metro anterior. Calcular el costo total.

A) S/.25050 **B)** S/. 25000 **C)** S/.22500
D) S/.25350 **E)** S/.23550

30. Encontrar un número de 3 cifras divisible por 11 y tal que permutando la cifra de las decenas con la de unidades se obtiene un número cuyas tres cifras están en progresión aritmética. Indicar la suma de sus cifras.

A) 16 **B)** 17 **C)** 12 **D)** 8 **E)** 13

31. Se tienen "n" montones de granos con un número de granos en progresión aritmética creciente. Si del primer montón se quita un grano, del segundo 2 y así sucesivamente; queda en el último montón doble número de granos que en el primero. Se sabe además que el total de granos que había en todos los montones eran 460; y finalmente que si del primer montón se quitan 2 granos, del segundo 4, del tercero 6 y así sucesivamente, quedan 18 granos más en el último que en el primer montón. Hallar "n".

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

32. Un jardinero debe llevar un balde de agua al pie de cada uno de los 40 árboles que forman un lado de un parque. Los árboles están distanciados 5 metros uno de otro y el depósito de agua está a 8 metros del primer árbol. ¿Qué espacio habrá recorrido el jardinero después de acabar su trabajo y vuelto el balde al depósito de agua?

A) 8550 metros **B)** 8540 metros
C) 8440 metros
D) 8660 metros **E)** 8650 metros

33. Un individuo da cinco pasos hacia adelante y dos hacia atrás, después da 10 hacia delante y cuatro hacia atrás; y así sucesivamente en progresión aritmética. ¿Cuántos pasos habrá dado en el momento en que por primera vez se encuentra a diez mil pasos del punto de partida?

A) 24 248 pasos **B)** 23 384 pasos
C) 24 244 pasos
D) 23 284 pasos **E)** 24 824 pasos

34. Sobre el terreno hay colocadas "n" piedras; la distancia entre la primera y la segunda es 1 metro; entre la segunda y la tercera 3 metros; entre la tercera y la cuarta, 4 metros; entre la cuarta y la quinta, 8 metros etc. ¿Cuánto tendrá que andar una persona que tenga que llevarlas una a una a un carro colocado al lado de la primera piedra?

A) $\frac{n^2(n^2-1)}{6}$ **B)** $2(2^n - n)$
C) $2(2^{n+1} - n)$
D) $2(2^{n-1} - n)$ **E)** $\frac{2(2^n - n)}{2}$

35. Dado el arreglo de números:

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
.....

Hallar la suma de la fila 20.

A) 400 **B)** 4100 **C)** 4010
D) 140 **E)** 8020

36. Dado el arreglo de números:

2

4 6

8 10 12

14 16 18 20

.....

Hallar la suma de la fila 15.

A) 3380 **B)** 3390 **C)** 3395
D) 3380 **E)** 3490

37. Hallar la suma de los 20 términos de la serie:

$$1 + 3\times2 + 5\times2^2 + 7\times2^3 + \ldots$$

A) 37×2^{19} **B)** $37\times2^{20} + 3$
C) 37×2^{21}
D) $37\times2^{20} - 3$ **E)** $37\times2^{21} + 3$

38. Reducir:

$$E = \frac{0\times1 - 1\times2 + 2\times3 - 3\times4 + \ldots + 100\times101}{1\times2 - 2\times3 + 3\times4 - 4\times5 + \ldots + 101\times102}$$

A) $\frac{50}{49}$ **B)** $\frac{50}{51}$ **C)** $\frac{50}{53}$

D) $\frac{58}{55}$ **E)** $\frac{51}{50}$

39. ¿Cuál es la suma de la serie?

$$S = 1\times3 - 3\times5 + 5\times7 - 7\times9$$

$$+ \ldots \text{ (20 sumandos)}$$

A) –840 **B)** –842 **C)** –848
D) –860 **E)** –800

40. La suma de la serie:

$$50a + 49a^2 + 48a^3 + \ldots + 1\times a^{50} \text{ es:}$$

A) $\frac{a^{52} - 5(a^2 + 50a)}{(a-1)^2}$ **B)** $\frac{a^{50} - 50a}{a-1}$

C) $\frac{a^{52} - 5a + 1}{(a-1)^2}$

D) $\frac{a^{52} - 51a^2 + 50a}{(a-1)^2}$ **E)** *N.A.*

41. Hallar la suma de la serie:

$$\frac{61}{a} + \frac{59}{a^3} + \frac{57}{a^5} + \ldots + \frac{1}{a^{61}}$$

A) $\frac{a^{62} - a^{60} - a - 1}{(a^2-1)^2}$

B) $\frac{a^{62} - a^{60} - a}{a-1}$

C) $\frac{a^{62}(61a^2 + 64) + 3}{a^{61}(a^2-1)^2}$

D) $\frac{a^{62}(61a^2 - 63) + a^2 + 1}{a^{61}(a^2-1)^2}$

E) $\frac{a^{62}(61a^2 - 6a - 2) + a^2}{a^{61}(a^2+1)^2}$

42. Hallar la suma límite de la serie infinita:

$$S = \frac{1}{2\times3} + \frac{5}{4\times9} + \frac{19}{8\times27} + \frac{65}{16\times81} + \ldots$$

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{9}$ **D)** $\frac{1}{36}$ **E)** $\frac{1}{3}$

43. La serie siguiente tiene 30 términos. ¿Cuál es su suma?

$$\frac{5}{2} + \frac{13}{6} + \frac{25}{12} + \frac{41}{20} + \ldots$$

A) $\frac{1800}{31}$ **B)** $\frac{1900}{31}$ **C)** $\frac{1980}{31}$

D) $\frac{1899}{31}$ E) $\frac{1890}{31}$

44. *Si:* $S = 1 + 2 + 3 + \ldots (n+1)$

Hallar: $S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{20}$

A) 1760 B) 1770 C) 1780
D) 179 E) 1778

45. *¿Cuál es la suma de la serie en base 10?*

$(12_{(3)} + 23_{(4)} + 34_{(5)} + \ldots)$; *30 sumandos.*

A) 1880 B) 10800 C) 10890
D) 10880 E) 10870

46. *¿Cuál es la suma de la serie en base 10?*

$$2 + 22_{(9)} + 222_{(9)} + \ldots + \overbrace{22\ldots22}^{n\ cifras}{}_{(9)}$$

A) $\frac{9^{n+1} - 8n - 8}{32}$ B) $\frac{9^{n+1} - 8n - 9}{32}$

C) $\frac{9^{n+1} - 8n + 1}{8}$

D) $\frac{9^n - 8n + 8}{32}$ E) *N. A.*

47. *¿Cuál es el tercer término de la siguiente sucesión: 3; 6; 11; 18; 27; ... que termina en cifra 7?*

A) 127 B) 227 C) 427
D) 627 E) 837

48. *Hallar la suma de la serie:*

$$S = \frac{1}{2\times4} + \frac{1}{4\times6} + \frac{1}{8\times10} + \ldots + \frac{1}{48\times50}$$

A) $\frac{6}{25}$ B) $\frac{5}{24}$ C) $\frac{6}{27}$

D) $\frac{3}{25}$ E) $\frac{2}{25}$

49. *Un cuerpo en caída libre recorre aproximadamente 4,9 metros en el primer segundo, y en cada segundo subsecuente recorre 9,8 metros más que en el segundo anterior. Se deja caer una piedra de lo alto de una torre y se observa que tarda 6 segundos en llegar al suelo; hallar la altura de la torre y la distancia recorrida en el último segundo.*

A) 176,4 *m*, 53,9 *m*
B) 175,3 *m*, 53,9 *m*
C) 170,5 *m*, 53,5 *m*
D) 167,4 *m*, 53,8 *m*
E) 167,4 *m*, 53,9 *m*

50. *La masa de un péndulo recorre 16 cm durante la primera oscilación. En cada una de las oscilaciones siguientes la masa recorre 3/4 de la distancia recorrida en la oscilación anterior. Calcular el espacio total recorrido por la masa hasta el momento de deternerse.*

A) 60 metros B) 62 metros
C) 63 metros
D) 64 metros E) 65 metros

51. *Una pelota de hule cae de una altura de 18 metros y cada vez rebota hasta una tercera parte de la altura alcanzada en el rebote anterior. Calcular el espacio total recorrida por la pelota hasta que teóricamente quede en reposo.*

A) 30 metros B) 36 metros
C) 25 metros
D) 39 metros E) 30 metros

CLAVES DE RESPUESTAS

PÁGINA 351	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	E	E	E	B	C	A	B
	9	10	11	12				
	E	C	C	B				

PÁGINA 353	1	2	3	4	5
	B	B	A	A	B

PÁGINA 354-355	1	2	3	4
	C	E	D	C

PÁGINA 357	1	2	3	4	5	6
	E	E	C	A	B	D

PÁGINA 359	1	2	3	4	5	6
	E	C	B	E	C	A

PÁGINA 361-362	1	2	3	4	5	6	7	8
	E	B	B	E	D	B	A	C

PÁGINA 366	1	2	3	4	5	6	7	8
	C	A	D	A	C	B	B	A

PÁGINA 369	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	E	B	B	C	D	A	E

PÁGINA 378	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	E	B	C	A	D	B	C
	9	10	11	12				
	E	A	C	B				

PROBLEMAS PROPUESTOS

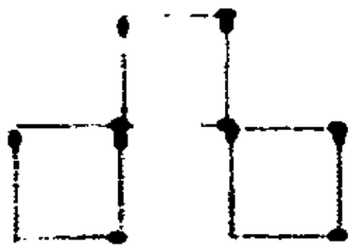
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	*i*	C	C	E	B	B	C	B	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	C	E	D	A	A	B	E	C	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	D	A	D	A	D	D	C	D	C
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	C	D	B	C	B	B	B	A	D
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
C	A	E	B	D	B	D	A	E	D	E

i) **a)** E **b)** D **c)** B **d)** D

Divertijos

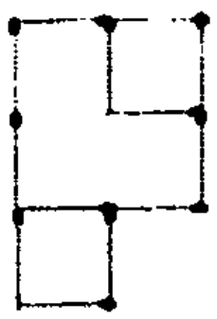
1. 1 **2.** 14 h 59 min **3.** 6

4. Sí. Primero los dos, a los 3 min introduces el pastel y 2 min más tarde inviertes el reloj de 5 minutos.

5. 

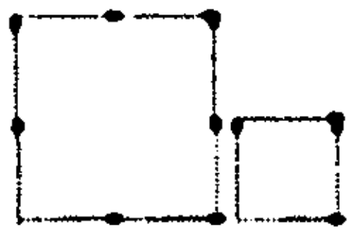
6. 15

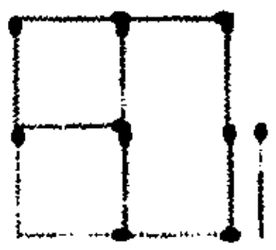
7. 2



8. 5

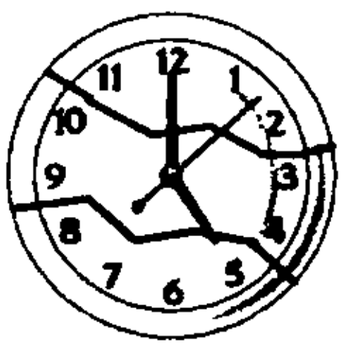
9. 5

10. a) 

b) 

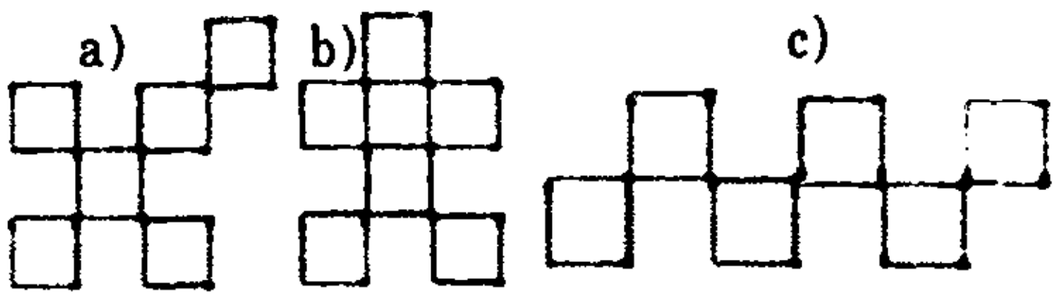
11. 5

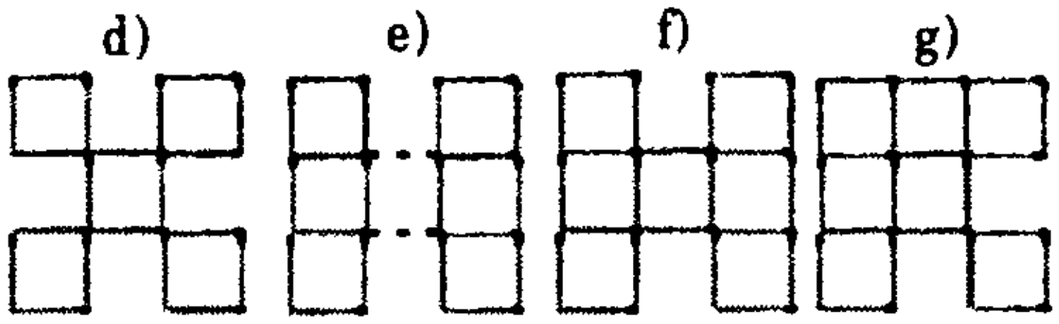
12.



13. Al Este de Juliaca. Debido a la curvatura terrestre.

14.





15. 2^{19} cm

16. 6 m

17. ○××△△△□□□□; ... (en sig-sag)

18. Igual que en 17. En espiral

Leonardo Pisano Fibonacci
(1170 – 1250)

Leonardo Pisano Fibonacci

Nació probablemente en Pisa (Ahora Italia) en 1170.

Leonardo Pisano es más conocido por su apodo Fibonacci. Jugó un rol muy importante al revivir las matemáticas antiguas y realizó importantes contribuciones propias.

Fibonacci nació en Italia pero fue educado en Africa del Norte donde su padre ocupaba un puesto diplomático. Viajó mucho acompañando a su padre, así conoció las enormes ventajas de los sistemas matemáticos usados en esos países.

Liber Abaci, publicado en el 1202 después de retornar a Italia, está basado en trozos de aritmética y álgebra que Fibonacci había acumulado durante sus viajes. Liber Abacci introduce el sistema decimal Hindú-Arábico y usa los números arábicos dentro de Europa.

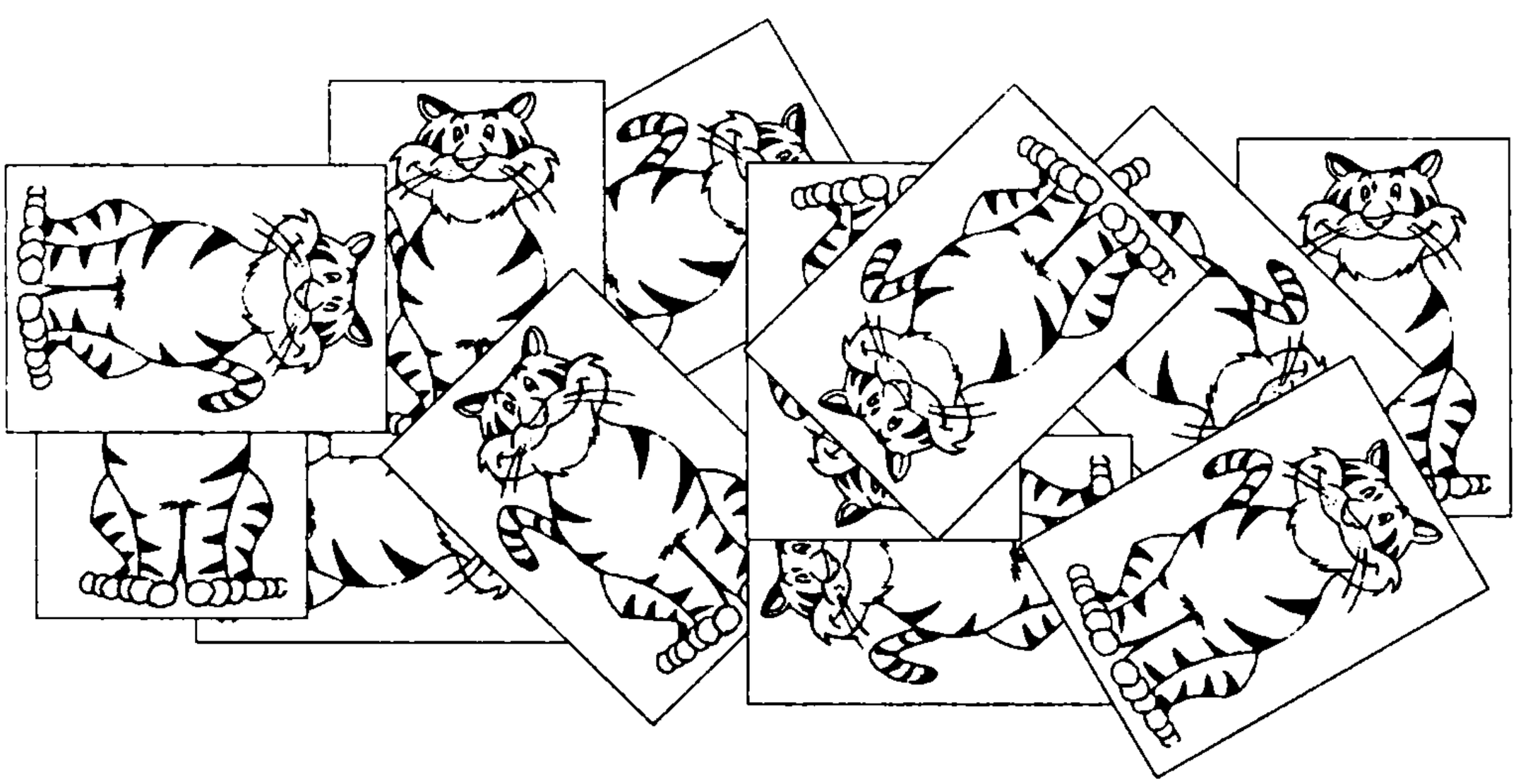
Un problema en Liber Abaci permite la introducción de los números de Fibonacci y la serie de Fibonacci por las cuales Fibonacci es recordado hoy en día. El Diario Trimestral de Fibonacci es un moderno periódico dedicado al estudio de las matemáticas que llevan estas series.

Otros libros de Fibonacci de mayor importancia es Prácticas de Geometría en el año 1220 que contiene una extensa colección de geometría y trigonometría. También en Liber Quadratorum del año 1225 aproximó las raíces cúbicas obteniendo una respuesta que en la notación decimal es correcta en 9 dígitos.

"Mis Prácticas de geometría" del año 1220 entrega una compilación de la geometría al mismo tiempo que introduce algo de trigonometría.

Falleció probablemente en Pisa (Ahora Italia), en 1250.

9 CONTEO DE FIGURAS Y POSIBILIDADES



INTRODUCCION

Son muchos los recursos matemáticos para realizar el conteo de figuras y posibilidades, como la inducción, la combinatoria, series, etc.

Hemos visto por conveniente incluir este tema como un capítulo independiente, para abordar algunos aspectos del conteo que no han sido abordados en los otros capítulos.

El problema de conteo no sólo abarca el contar figuras, sino, y sobre todo, todas las posibilidades en que se puede efectuar un proceso.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

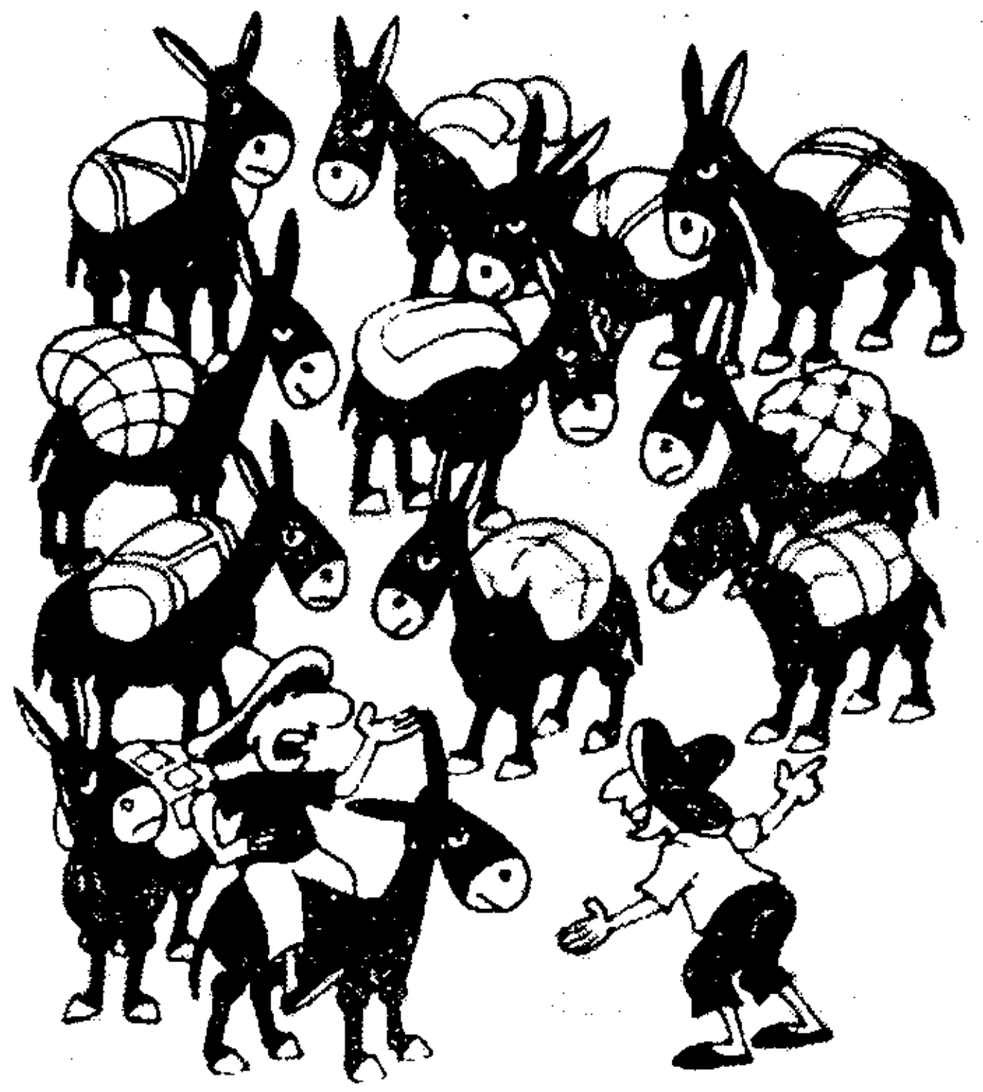
Para este capítulo es necesario haber revisado:

- *Inducción*
- *Resolución de ecuaciones*
- *Sucesiones y series*
- *Análisis combinatorio*

Pero, no es para que te desanimes, lo que pasa es que en algún momento se va acudir a conceptos que han sido abordados en las temas mencionados, que si no te es familiar puedes acudir a ellos.

9.1. El problema de contar

Un arriero viajaba con 12 mulas, montado en una de ellas. En el camino contó las mulas y le faltaba una, entonces se bajó para contarlos y halló las 12. Al no explicarse esta discrepancia, consultó al primer peregrino con el que se encontró; éste le contestó: "lamento contradecirlo amigo, pero yo veo 13 mulas".

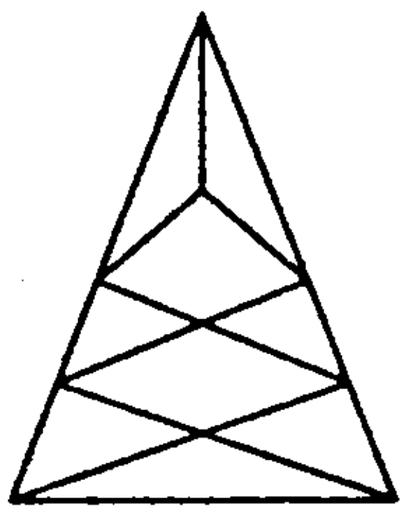


Para contar los pisos que tiene un rascacielos, los alumnos de un desfile escolar o las cebras que habitan Africa, no podemos dejar toda la "responsabilidad" a la vista. Es preciso acudir a ciertos métodos y modelos matemáticos que nos permitan cuantificar con EXACTITUD los objetos contados. Veamos algunos de ellos.

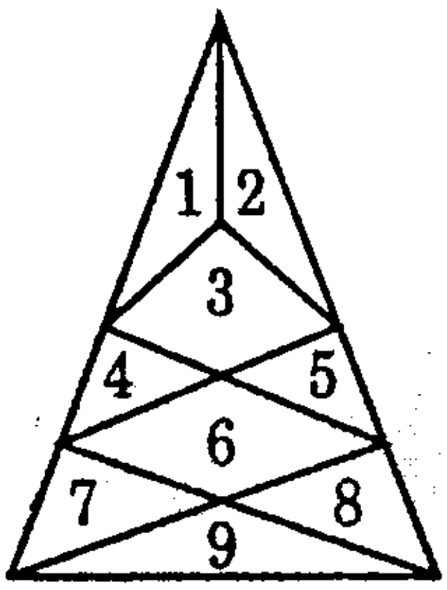
9.2. Conteo por enumeración

Problema 1

¿Cuántos triángulos hay en la figura adyacente?



Resolución



Enumerando las figuras simples (de una sola región)

Δs de 1 #: 1; 2; 4; 5; 7; 8; 9	⇒	7 Δs
Δs de 2 #: 79; 89	⇒	2 Δs
Δs de 3 #: 467; 568	⇒	2 Δs
Δs de 4 #: 1235; 1234	⇒	2 Δs
Δs de 7 #: 1234567; 1234568	⇒	2 Δs
Δs de 9 #: 123456789	⇒	1 Δ
	Total:	16 Δs

Rpta.: 16 triángulos

Problemas

1. ¿Cuántos triángulos hay en esta figura?

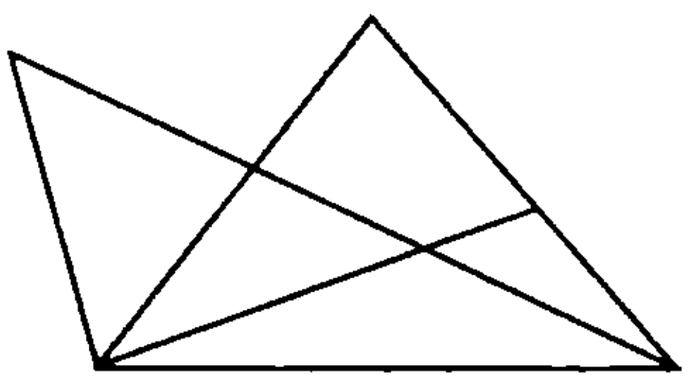
A) 13

B) 16

C) 17

D) 11

E) 15



2. Determina el número de pentágonos de la figura.

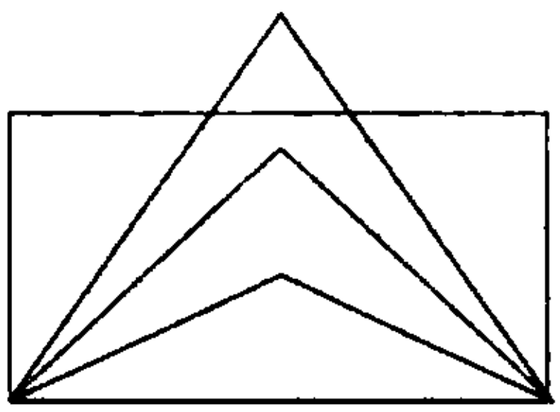
A) 7

B) 8

C) 9

D) 10

E) 11



3. ¿Cuántos exágonos hay en la siguiente figura.

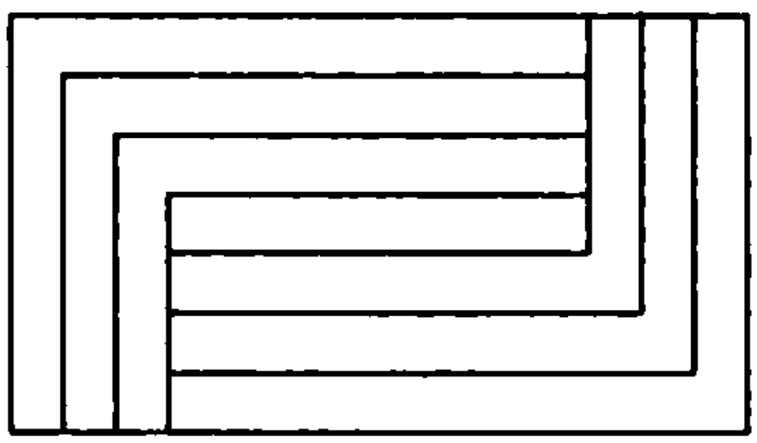
A) 10

B) 22

C) 14

D) 16

E) 18



4. ¿Cuántos segmentos hay en la siguiente figura?

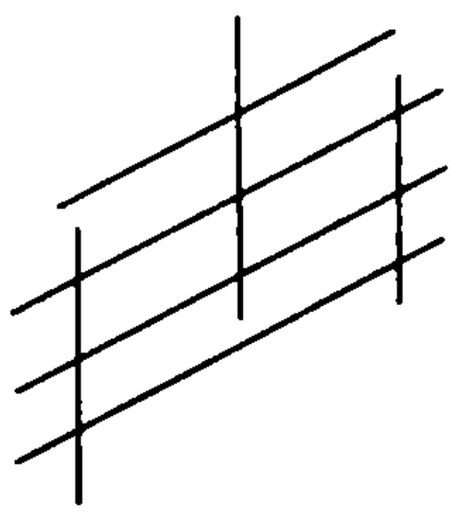
A) 58

B) 59

C) 60

D) 61

E) 62



5. En la siguiente figura, calcular la suma del número de cuadriláteros y el número de triángulos.

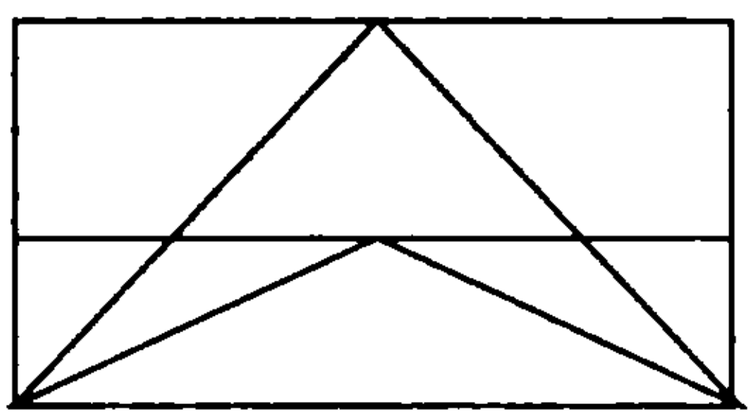
A) 10

B) 20

C) 30

D) 40

E) 50



6. En la siguiente figura, determinar el número de cuadriláteros

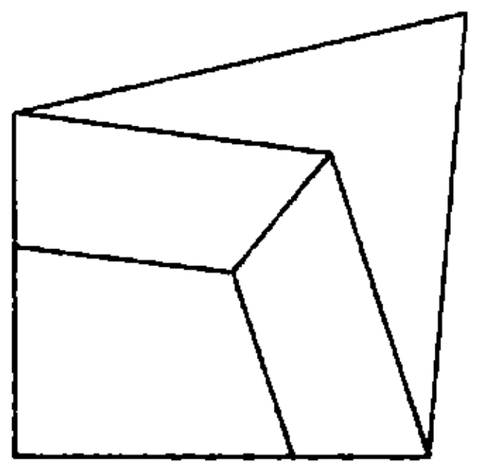
A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8



7. Determinar el número de pentágonos en la siguiente figura.

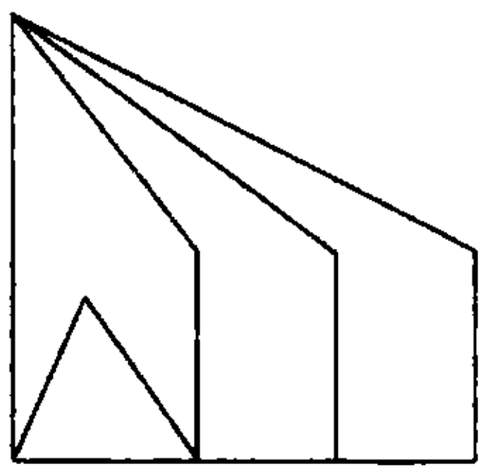
A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8



8. Determinar cuántos ángulos agudos hay en la siguiente figura.

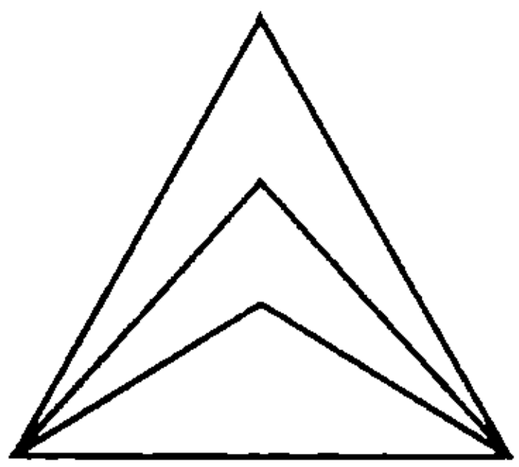
A) 12

B) 13

C) 14

D) 15

E) 16



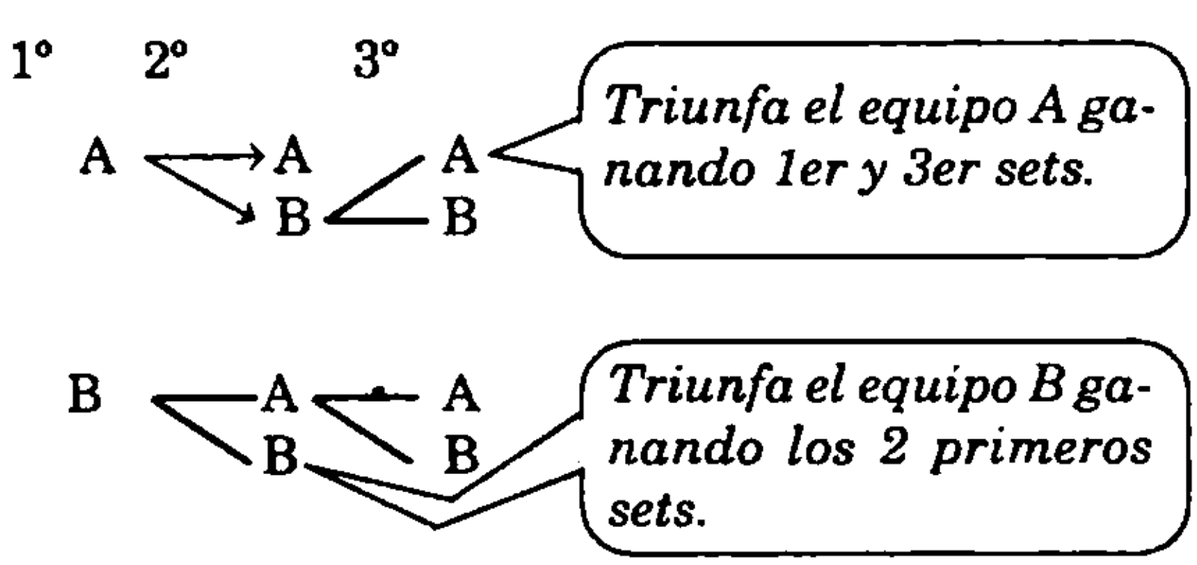
9.3. Por diagrama de árbol

Problema 2

En un torneo de Voley, las mujeres juegan a lo sumo tres sets en un partido. Triunfa quien gane primero 2 sets. ¿De cuántas maneras diferentes puede acabar un partido de vóley?

Resolución

Según el diagrama del árbol:



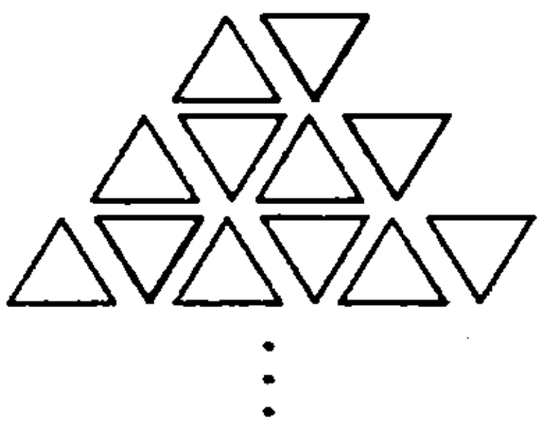
Hay 6 maneras de acabar

9.4. Por Inducción

Problema 3

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente ilustración, si está compuesta de 50 filas.

Resolución



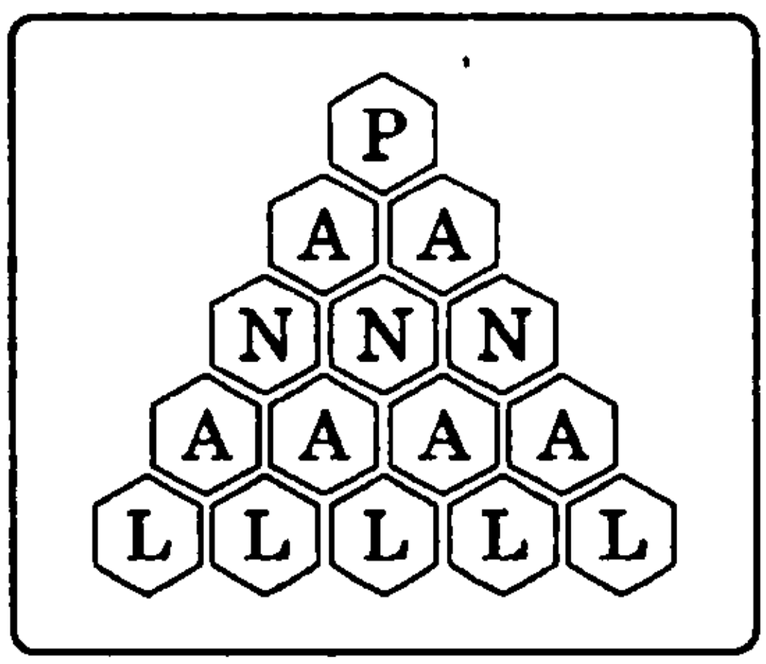
Filas	Triángulos
1	$2 = 1\times2$
2	$6 = 2\times3$
3	$12 = 3\times4$
50 ⟶	$50\times51 = 2550$

Divertijo 1

La abeja lectora

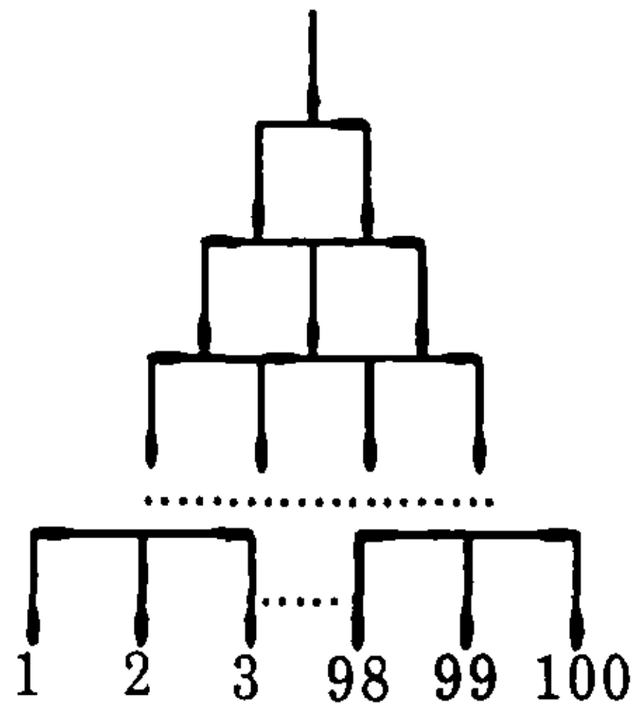
El grabado muestra el panal de la abeja lectora.

¿Cuántos caminos puede seguir la abeja a través del panal para leer la palabra PANAL a partir de la celdilla P. Según el Dr. Zanganov, una vez que ha empezado, la abeja— no el famoso "abejólogo"— no puede volver atrás.

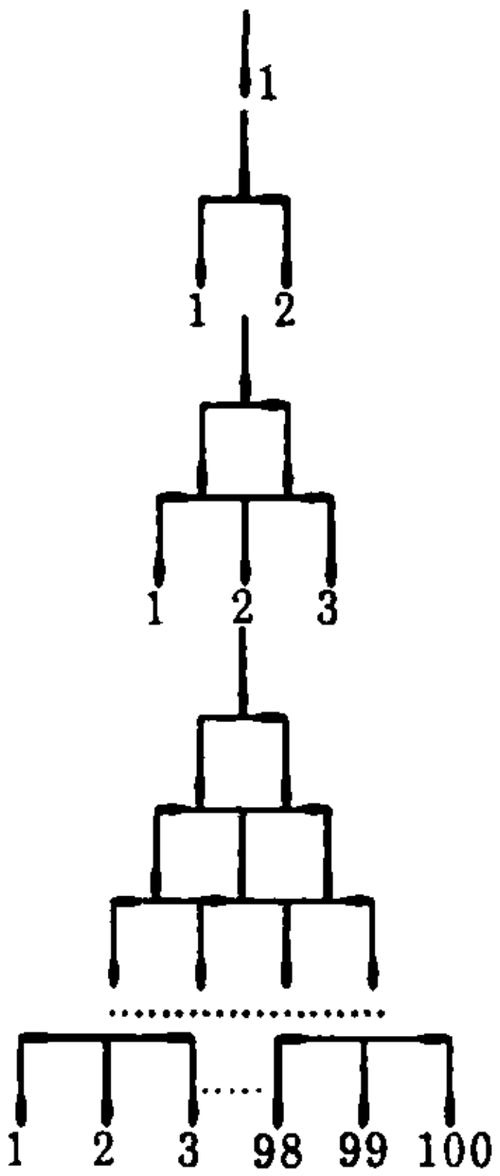


Problema 4

La figura adjunta está hecha de cerillas. ¿Cuántas cerillas se han utilizado para toda la figura?



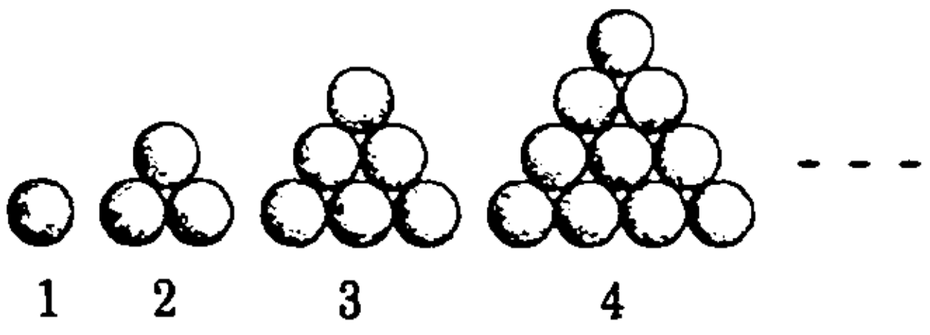
Resolución

Figura	Cerillas
	$1 = 1^2$
	$4 = 2^2$
	$9 = 3^2$
	$100^2 = 10000$

Rpta.: 10000

Problemas

1. ¿Cuántas bolas hay en la posición 40?



A) 400 **B)** 810 **C)** 820 **D)** 450 **E)** 420

2. Determina cuántos cuadrados hay en la siguiente figura.

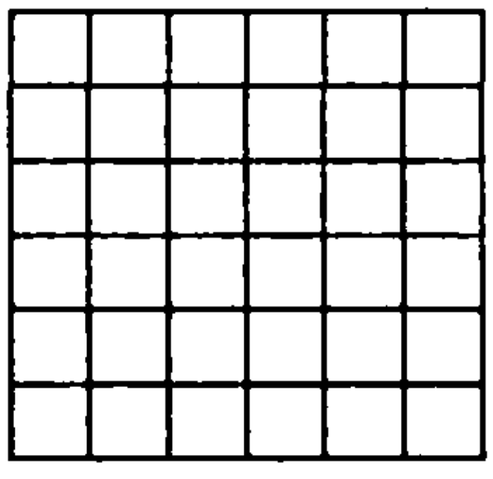
A) 81

B) 91

C) 100

D) 120

E) 150



3. ¿Cuántos triángulos se puede contar en la siguiente figura?

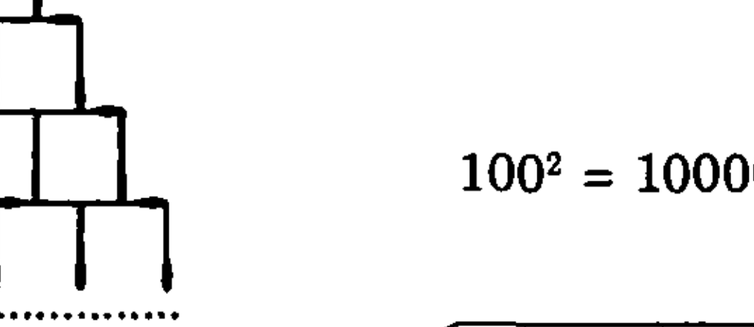
A) 153

B) 154

C) 156

D) 157

E) 155



4. ¿Cuántos cuadriláteros hay en la figura adjunta?

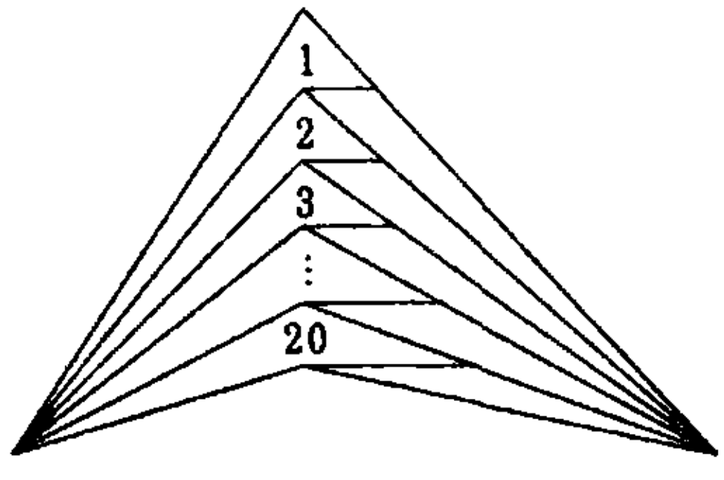
A) 180

B) 260

C) 230

D) 410

E) 420



9.5. Principio del palomar

Si m palomas ocupan n nidos, y $m > n$, entonces hay al menos un nido con dos o más palomas

Problema 5

En una oficina trabajan 8 secretarias, entonces al menos dos de ellas deben celebrar su cumpleaños el mismo día de la semana (Aquí se tienen 8 palomas (las secretarias) y 7 nidos (los días de la semana) ¿Cuántas secretarias deben cumplir años en el mes de Abril, para tener la plena seguridad de que 2 de ellas celebrarán su cumpleaños en el mismo día?

Resolución

Se requiere que 31 secretarias cumplan años en Abril. Aquí las secretarias son las palomas y los 30 días de Abril son los nidos. Nos situamos en el caso extremo de que las 30 primeras cumplan años en cada uno de los 30 días diferentes de Abril. Pero la 31° secretaria cumplirá años en uno de los días que ya han sido "ocupados" por las 30 primeras, con lo que tenemos la plena seguridad que habrán dos que celebren su cumpleaños en el mismo día de abril.

Rpta.: 31

Problema 6

En una caja hemos metido 20 bolas blancas y 30 bolas negras. Enseguida, con los ojos cerrados vamos extrayendo las bolas una por una sin devolución. ¿Cuántas bolas debemos extraer para obtener con seguridad:

a. Una bola blanca
b. Dos bolas negras
c. Dos bolas del mismo color

Resolución

a. No hay la seguridad de que en la primera extracción salga una bola blanca. Tendremos la **plena seguridad** de extraer una bola blanca, cuando en la caja quedan exclusivamente bolas blancas. Si en 30 extracciones no ha salido una sola bola blanca, entonces habrán salido todas las negras. Por lo tanto, en la

Divertijo 2

Monedas de Bambalandia

En Bambalandia existen sólo dos clases de monedas, una moneda de un bambino y una moneda de dos bambinos. ¿De cuántos modos puede un bambilandiano pagar la cantidad de dos bambinos?. Muy sencillo, de dos maneras, con dos monedas de 1 bambino o con una moneda de 2 bambinos. ¿Sabes de cuántas maneras puede pagar un bambalandiano la cantidad de 10 bambinos?

Cómo contaban los Incas

Del imperio de los Incas han quedado muchas obras obras, así como los registros del modo de llevar sus cuentas.
Dichos registros han permanecido en conjuntos de cuerdas de diversos colores denominados quipus, cada uno de los cuales consta de una cuerda principal de la que se desprenden otras cuerdas (ramales). En éstas aparecen nudos que representan números de un sistema de base diez. Por lo general, cada ramal contiene un número. Los grupos de nudos están separados por espacios, y colocado uno encima de otro.
Cada grupo representa una potencia de diez de orden mayor. En cada quipu, los números se leen del extremo atado a la cuerda principal al extremo libre (hacia abajo). Primero se cuentan los nudos del grupo más cercano a la cuenta principal; en un número de tres dígitos, este grupo representa las centenas. El grupo intermedio representa a las decenas y el de abajo, a las unidades. Si no existen nudos en un lugar (grupo), se coloca cero.

31° extracción la bola ha de ser blanca.

Rpta.: 31

b. Si en las 20 primeras extracciones no ha salido una sola bola negra; entonces habrán salido las 20 bolas blancas. Por lo tanto con la 21° y 22° extracción, con toda seguridad tendremos 2 bolas negras.

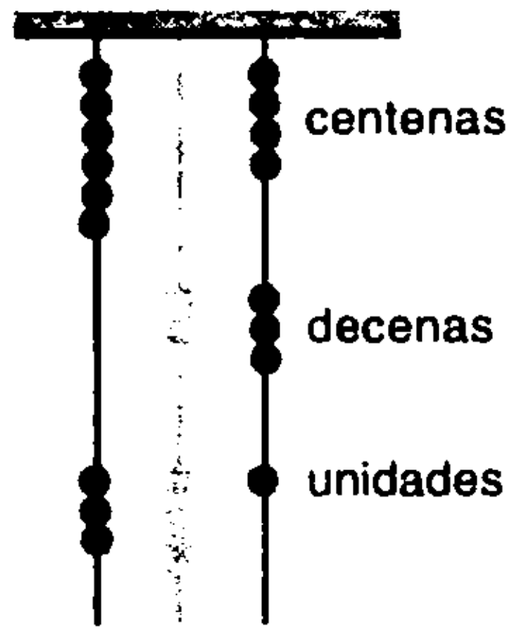
Rpta.: 22

c. Dos bolas del mismo color. No importa qué color. Veamos: En la primera extracción sale un color. Si en la segunda extracción sale del mismo color, tendríamos un par del mismo color, pero no hay la seguridad que ocurra esto. Digamos que en la segunda extracción sale de otro color, entonces haremos una tercera extracción. Esta bola tendrá el mismo color que una de las 2 bolas ya extraídas, con la cual hará un par del mismo color.

Rpta.: 3

Las cuerdas de los quipus tienen diversos colores, empleados para representar información diferente. Por ejemplo, si estaba censándose a un poblado inca, podría emplearse color rojo para los hombres, amarillo para las mujeres y verde para los niños.

Para censar un segundo poblado, se utiliza otro conjunto de cuerdas con los mismos colores empleados en el primero.



Problemas

1. En una caja hay 10 pares de medias blancas y 12 pares de medias negras. Se extrae sin mirar una por una. ¿Cuántas extracciones hay que realizar como mínimo para tener la plena seguridad de que se tiene un par de medias del mismo color?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 11

2. Con relación al problema anterior, ¿cuántas extracciones habría que realizar como mínimo para tener la seguridad de que se tiene un par de medias negras?

A) 11 **B)** 21 **C)** 22 **D)** 14 **E)** 10

3. Con referencia al problema 1; ¿cuántas extracciones habría que realizar para tener la plena seguridad de que se tiene un par de medias de distinto color?

A) 13 **B)** 14 **C)** 25 **D)** 10 **E)** 11

4. En una urna hay 10 bolas rojas, 15 bolas azules y 20 bolas amarillas. ¿Cuántas bolas hay que extraer al azar, para tener la seguridad de que se tiene tres bolas del mismo color?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

5. Con referencia al problema 4, ¿Cuántas extracciones hay que realizar para tener la plena seguridad de que se tiene 3 bolas de colores distintos?

A) 26 **B)** 31 **C)** 36 **D)** 46 **E)** 4

6. En una caja hay 10 pares de guantes blancos y 12 pares de guantes negros. ¿Cuántas extracciones hay que realizar como mínimo para tener la plena seguridad de que se tiene un par de guantes utilizables del mismo color?

A) 3 **B)** 11 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 23

7. ***En el problema anterior, ¿cuántas extracciones hay que realizar para tener la seguridad de que se tiene un par de guantes utilizables de color blanco?***

A) 30 B) 35 C) 13 D) 11 E) 14

8. ***Con referencia al problema 6, ¿cuántas extracciones hay que realizar como mínimo para tener la plena seguridad de que se tiene dos pares de guantes utilizables de colores diferentes?***

A) 30 B) 32 C) 35 D) 36 E) 37

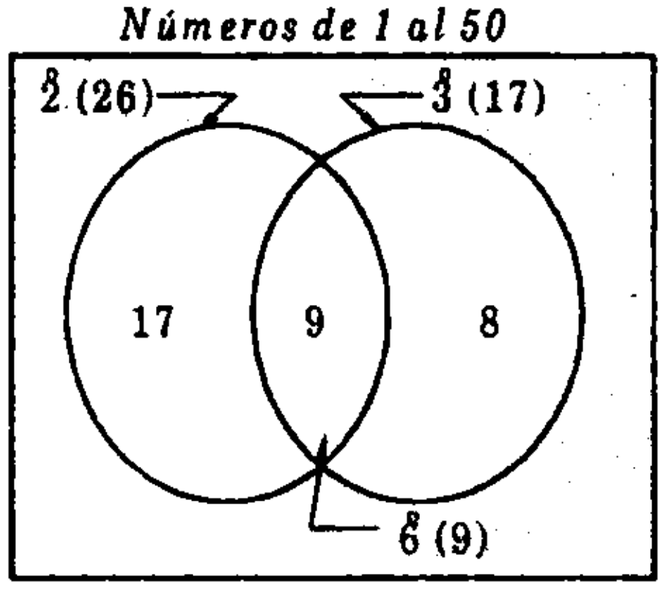
9.6. Principio de inclusión y exclusión (1)

Problema 7

¿Cuántos enteros positivos menores o iguales que 50 no son múltiplos de 2 ni de 3?

Resolución

Para encontrar los números que no son múltiplos de 2 ni de 3, resulta **más facial** hallar los que son múltiplos de 2 ó de 3. Luego, por diferencia se obtienen los buscados.



- $\overset{o}{2}$ $2;\quad 4;\quad 6;\quad \ldots;\quad 50 \Rightarrow \dfrac{50}{2} = 25\ \#s$
  $\quad\ 2\quad 2\qquad\quad 2$
- $\overset{o}{3}$ $3;\quad 6;\quad 9;\quad \ldots;\ 48 \Rightarrow \dfrac{48}{3} = 16\ \#s$
- $\overset{o}{6}$ $6;\quad 12;\quad 18;\quad \ldots;\quad 48 \Rightarrow \dfrac{48}{6} = 8\ \#s$
- Son $\overset{o}{2}$ ó $\overset{o}{3}$: $25 + 16 - 8 = 33 \Rightarrow$ no son múltiplos de 2 ni de 3: $50 - 33 = 17$

Rpta.: 17

Estos números son:

1; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 25; 29; 31; 35; 37; 41; 43; 47 y 49

Los principios de Adición y Multiplicación se abordan en el capítulo de análisis combinatorio.

Conclusión

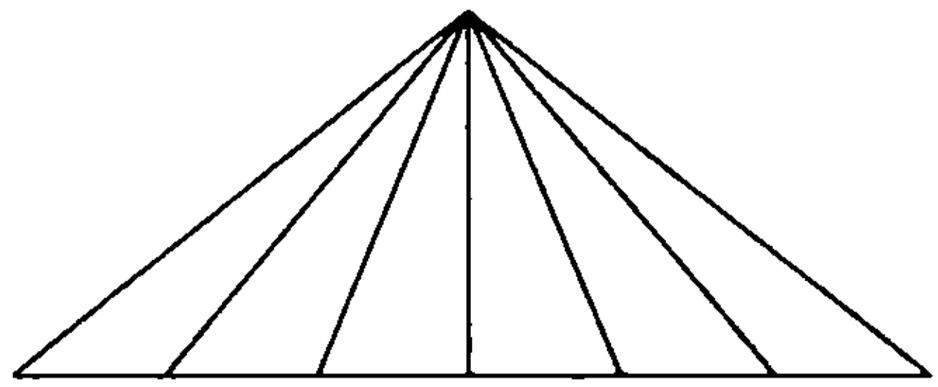
Cuando resulta complejo hallar el número de objetos que cumplan ciertas condiciones, podemos optar por el camino de hallar aquellos que no cumplen las condiciones y calcular por diferencia los buscados.

(1) Este principio en su forma general es bastante complejo. Aquí mencionamos sólo algunas nociones al respecto.

9.7. Aplicaciones de las series en conteo de figuras

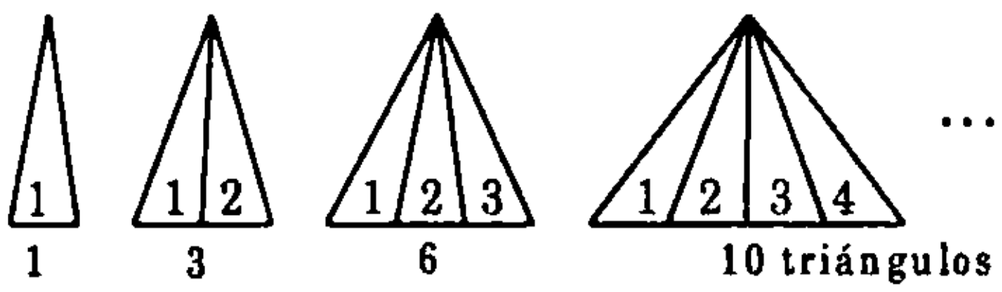
Problema 1

¿Cuántos triángulos se puede contar en la figura adjunta?



Resolución

Mediante la inducción tenemos:



El número de triángulos en cada una de las figuras forma una sucesión; donde:

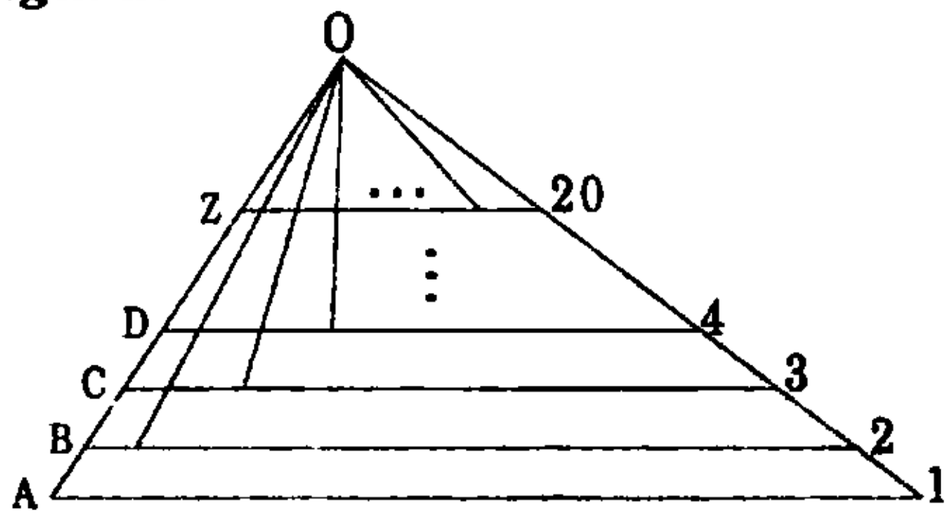
1	3	6	10	n
↑	↑	↑	↑	↑
1	(1+2)	(1+2+3)	(1+2+3+4)	$\frac{n(n+1)}{2}$

En la figura del problema, $n = 6$. Luego: la figura contiene $\frac{6(6+1)}{2} = 21$ triángulos.

Rpta.: 21

Problema 2

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



Resolución

En el triángulo A01 hay 1 triángulo, que según el problema anterior se puede expresar como $\frac{1\times2}{2}$. En el triángulo B02 hay 3 triángulos, que según el problema anterior se puede expresar como $\frac{2\times3}{2}$. Así sucesivamente, en cada uno de los siguientes triángulos hay un total de $\frac{k(k+1)}{2}$ triángulos. El número total de triángulos de la figura se obtiene sumando:

$$\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\frac{3\times4}{2}+\ldots+\frac{20\times21}{2}$$

Más exactamente:

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}(k^2+k)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{20}k^2+\sum_{k=1}^{20}k\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{20\times41\times21}{6}+\frac{20\times21}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[2870+210]=1540$$

Rpta.: 1540 triángulos

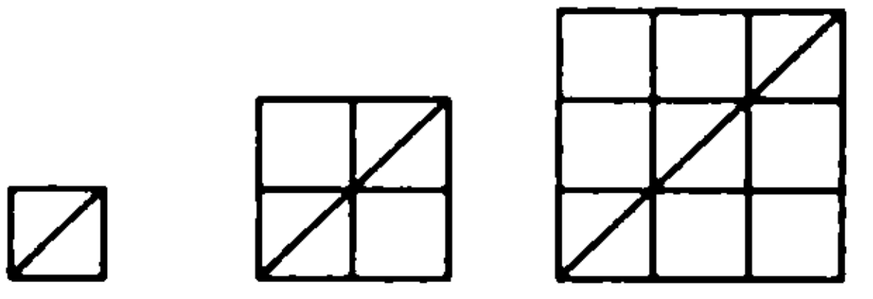
Problemas 3

En una hoja cuadriculada y cuadrada con "n" cuadraditos por lado se traza una de las diagonales. ¿Cuántos triángulos se forman como consecuencia de este trazado?

Resolución

Por Inducción:

1 cuadrado por lado | 2 cuadrados por lado | 3 cuadrados por lado



2 triángulos | 6 triángulos | 12 triángulos.

Donde:

$*2 = 2$ $*6 = 2 + 4$ $*12 = 2+4+6$

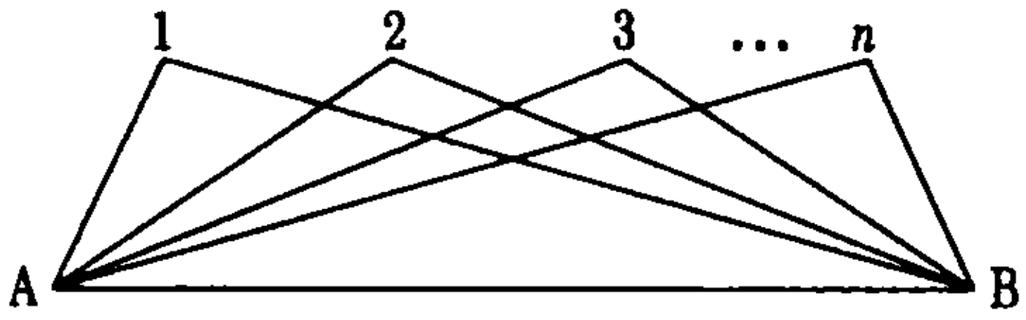
Si hay "*n*" cuadraditos por lado, habrá:

$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... + 2n = n(n + 1)$

Rpta.: n(n + 1)

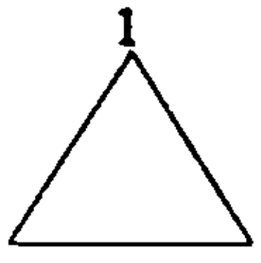
Problema 4

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



Resolución

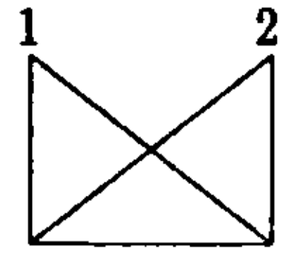
Por inducción



1 triángulo

↑

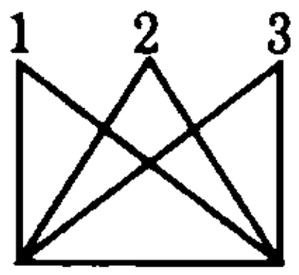
1^2



5 triángulos

↑

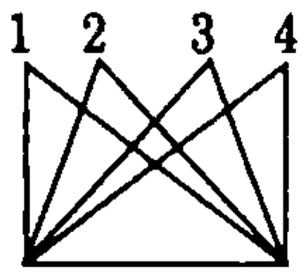
$1^2 + 2^2$



14 triángulos

↑

$1^2 + 2^2 + 3^2$



30 triángulo

↑

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

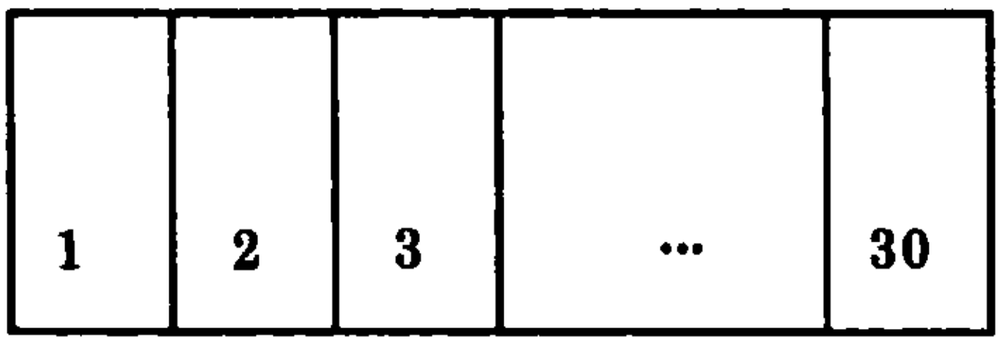
Para *n* vértices:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Rpta.: $\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$

Problemas

1. Calcular cuántos rectángulos se puede contar en la figura siguiente.



A) 460 B) 462 C) 465 D) 470 E) 475

2. ¿Cuántos trapecios hay en la siguiente figura?

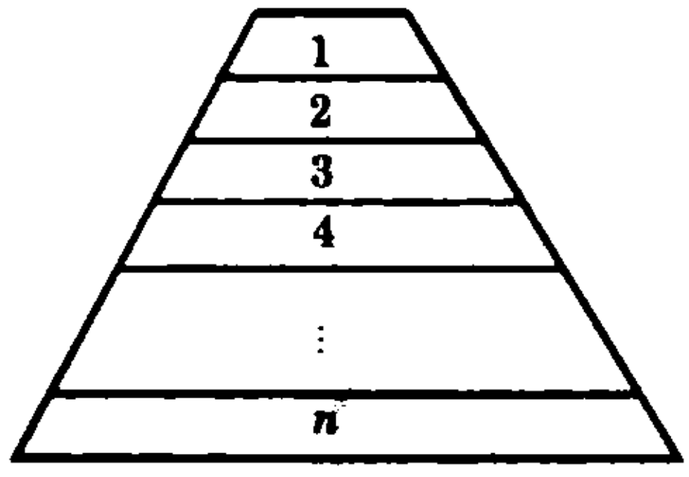
A) n^2

B) $n(n+1)$

C) $n(n+1)/2$

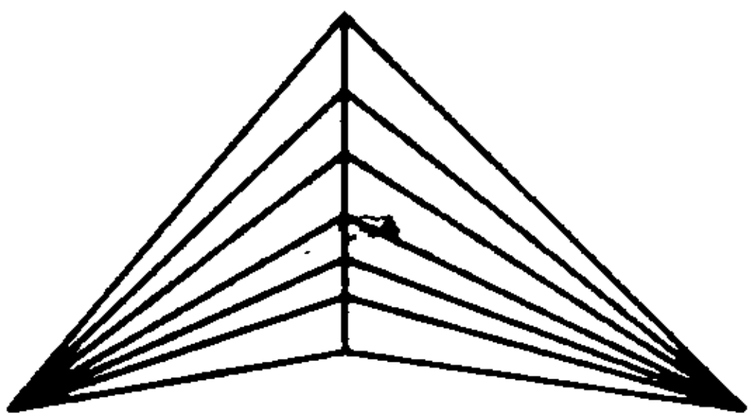
D) $n(n-1)$

E) $n(n-1)/2$

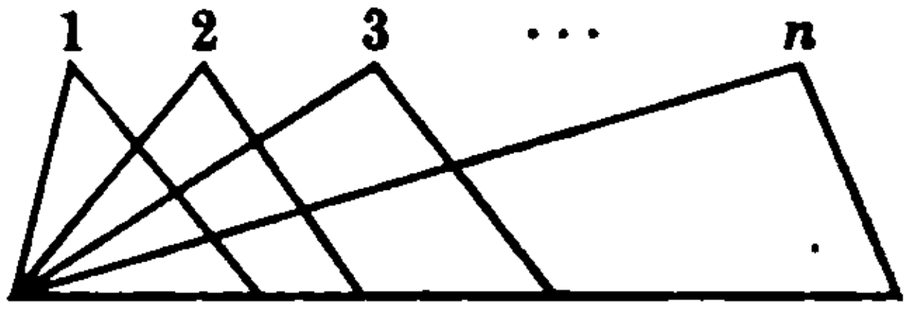


3. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?

A) 15
B) 30
C) 35
D) 36
E) 42



4. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?

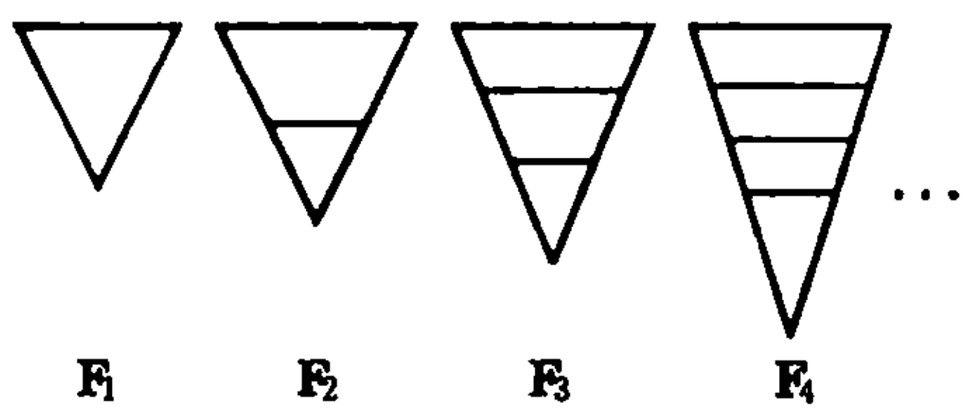


A) $\frac{n(n+1)}{2}$ **B)** $\frac{3n^2-3n+2}{2}$

C) $\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$

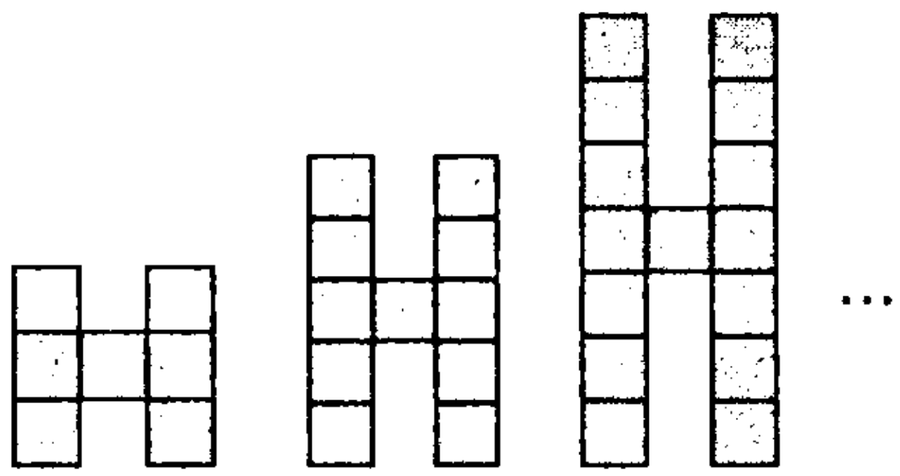
D) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ **E)** $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

5. ¿Cuál es el número de triángulos en F_{40}?



A) 40 **B)** 41 **C)** 420 **D)** 820 **E)** 120

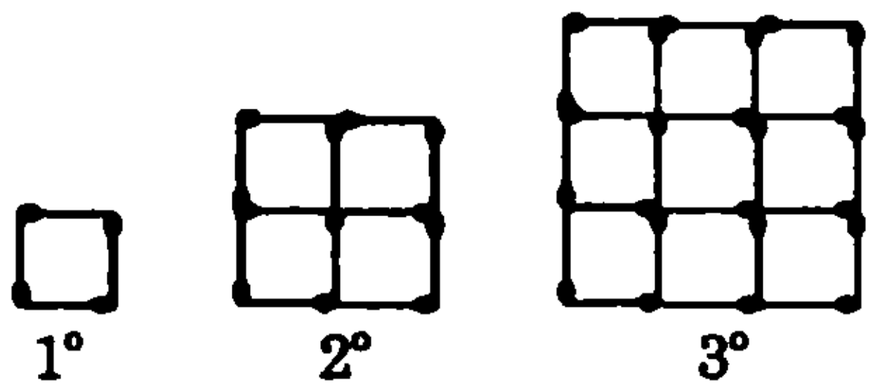
6. Observa la siguiente sucesión de figuras.



En la posición n, ¿cuál es el número de cuadraditos?

A) $4n-3$ **B)** $4n+2$ **C)** $4n+1$
D) $4n+3$ **E)** $4n+5$

7. Se forman figuras con cerillas tal como se muestra:



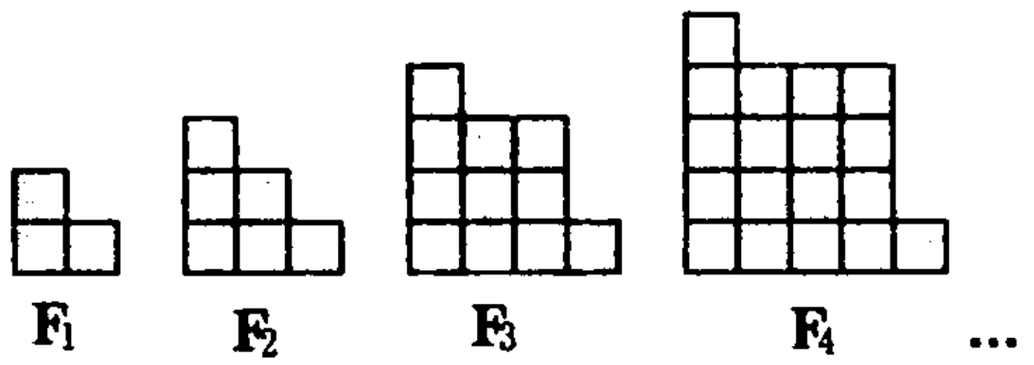
¿Cuántas cerillas se necesitan para formar la figura de la posición 12?

A) 300 **B)** 310 **C)** 312 **D)** 320 **E)** 340

8. En el problema anterior, ¿cuántas cerillas son necesarias para hacer todas las figuras hasta la posición 12?

A) 480 **B)** 1456 **C)** 1540
D) 1650 **E)** 1460

9. Observa la siguiente sucesión de figuras:



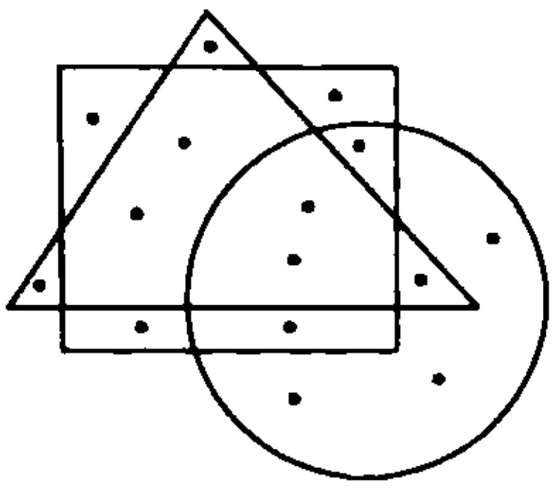
¿Cuántos cuadraditos corresponden a la figura F_{40}?

A) 1560 **B)** 1602 **C)** 1680
D) 1690 **E)** 1820

Problemas Resueltos

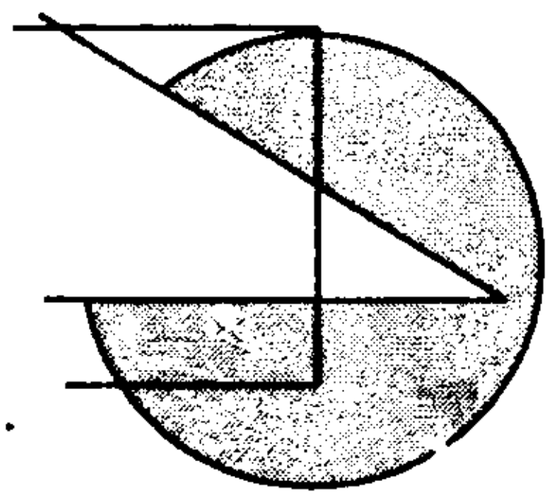
Problema 1

En la figura adjunta cuántos puntos pertenecen al círculo pero no al triángulo.



Resolución

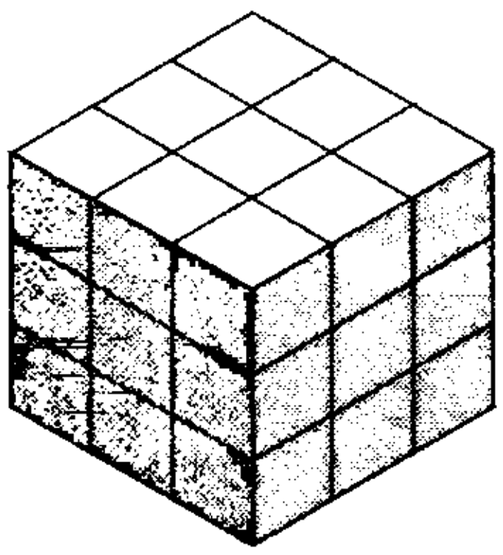
Son puntos del círculo y no del triángulo los puntos de la parte sombreada.



Rpta.: 5

Problema 2

Si pintamos las 6 caras del siguiente sólido formado por cubitos:



a) ¿Cuántos cubitos quedarán pintados exactamente en 2 caras?

b) ¿Cuántos cubitos quedarán pintados exactamente en 3 caras?

c) ¿Cuántos cubitos quedarán pintados al menos en una cara?

d) ¿Cuántos cubitos quedarán pintados en 1 sola cara?

Resolución

a) Los cubitos pintados en dos caras son los que se encuentran en el centro de las aristas. En las 12 aristas del cubo hay 12 cubitos.

Rpta.: 12

b) Los cubitos pintados en 3 caras corresponden a los vértices del cubo.

Rpta.: 8

c) En total hay $3\times3\times3 = 27$ cubitos, de los cuales hay uno solo, el del centro, que no está pintado en ninguna cara; por lo tanto, hay 26 cubitos que están pintados al menos en una cara.

Rpta.: 26

d) Los cubitos pintados en una sola cara corresponden al centro de cada cara del cubo.

Rpta.: 6

Problema 3

¿Cuántos números de dos cifras no terminan en 5?

Resolución

Números de 2 cifras: {10; 11; ... ; 99}

Son : $99 - 9 = 90$ números

terminan en 5: {15; 25; ... ; 95}

Son: 9 números

$\therefore$ No terminan en 5: $90 - 9 = 81$ números

Rpta.: 81

Problema 4

Un cuadrado está dividido en nueve cuadrados iguales. ¿De cuántas maneras se puede pintar con verde, negro y rojo, de modo que en cada horizontal y en cada vertical haya un cuadrado de cada color?

Resolución

Los tres cuadrados superiores los podemos pintar mediante las permutaciones;

VNR, VRN, NRV, NVR, RNV y RVN

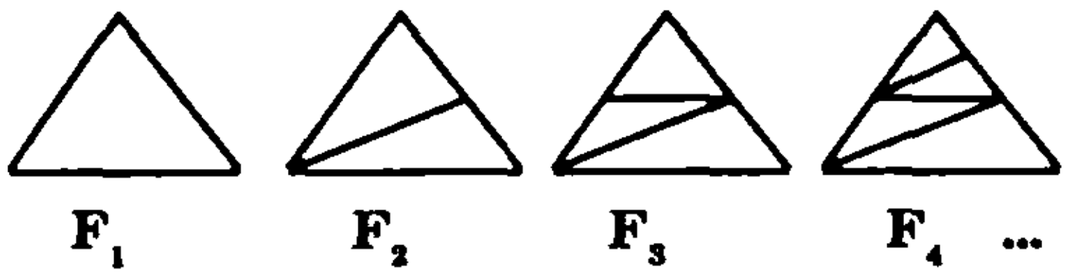
Para cada una, sólo hay 2 formas de pintar los cuadrados restantes

$\therefore$ Hay $2\times6 = 12$ formas diferentes

Rpta.: 12

Problema 5

¿Cuál es el número de triángulos en F_{100}?



Resolución

Posición	# triángulos
F_1	$1 = 2(1) - 1$
F_2	$3 = 2(2) - 1$
F_3	$5 = 2(3) - 1$
...	. . . . .
F_{100}	$2(100)-1 = 199$

Rpta.: 199

Problema 6

¿Cuántos tríos de números enteros positivos suman 50?

Resolución

Supongamos que los números son x, y, z cuya suma es 50. Debemos hallar todos los valores de x, y, z. Para no repetir el mismo trío vamos a convenir que $x \le y \le z$. Para contarlos procederemos de manera ordenada:

$x + y + z = 50$			
1	1	48	24 #s
1	2	47	
⋮	⋮	⋮	
1	24	25	

$x + y + z = 50$			
2	2	46	23 #s
2	3	45	
⋮	⋮	⋮	
2	24	24	

$x + y + z = 50$			
3	3	44	21 #s
3	4	43	
⋮	⋮	⋮	
3	23	24	

$x + y + z = 50$			
4	4	42	20 #s
4	5	43	
⋮	⋮	⋮	
4	23	23	

Continuando con la secuencia:

$x + y + z = 50$			
15	15	20	3 #s
15	16	19	
15	17	18	

$x + y + z = 50$			
16	16	18	2 #s
16	17	17	

Total de tríos

$$T = (2 + 3) + (5 + 6) + \ldots + (20 + 21) + (23 + 24)$$

$$T = \underbrace{5 + 11 + 17 + \ldots + 41 + 47}_{8\ tnos} = \frac{8(47 + 5)}{2} = 208$$

Rpta.: 208

Problema 7

¿Cuál es el máximo número de puntos de intersección de 100 circunferencias coplanares y no coincidentes?

Resolución

Dibujemos una circunferencia. Al trazar la segunda circunferencia corta a la primera en 2 puntos. Al trazar la tercera circunferencia corta a los dos anteriores en 4 puntos, de modo que van 2 + 4 = 6 puntos. Al trazar la 100° circunferencia, corta a las 99 anteriores en $99\times2 = 198$ puntos. Luego, el número total es:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 198 = 99(99 + 1) = 9\,900$$

Rpta.: 9 900

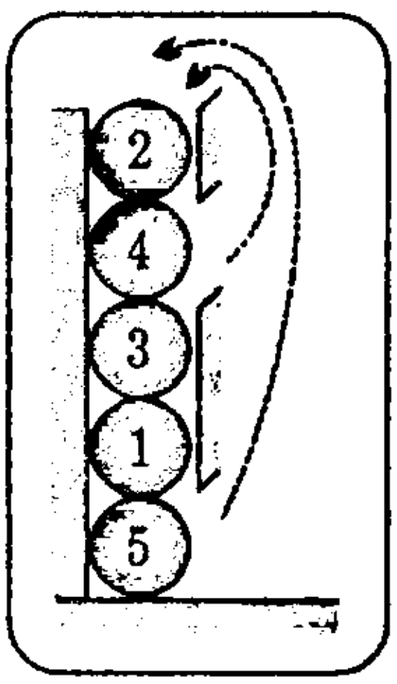
Problemas Propuestos

1. *¿Cuántas veces debemos lanzar un dado para obtener al menos 2 veces la misma puntuación?*

   A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2. *Cinco bolas numeradas son colocadas dentro de una caja. La caja es fija vertical y provista de dos aberturas, permitiendo salir la bola del fondo o la segunda bola a partir de lo alto.*

   Uno saca una bola a la vez solamente y la remite inmediatamente dentro de la caja por lo alto. Indicar el número de operaciones mínimas a efectuar para obtener el orden 1; 2; 3; 4; 5 de abajo hacia arriba

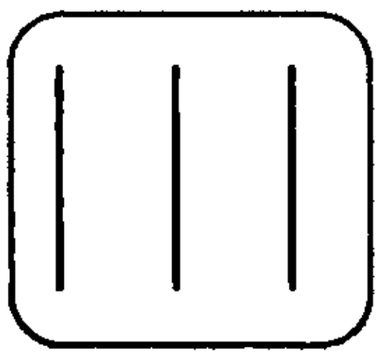


   A) 3 B) 4 C) 5 D)6 E) 7

3. *¿Cuál es el máximo número de triángulos equiláteros y congruentes que se pueden formar con 6 palitos de fósforo sin cortarlos.*

   A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

4. *La figura adjunta muestra tres segmentos.*



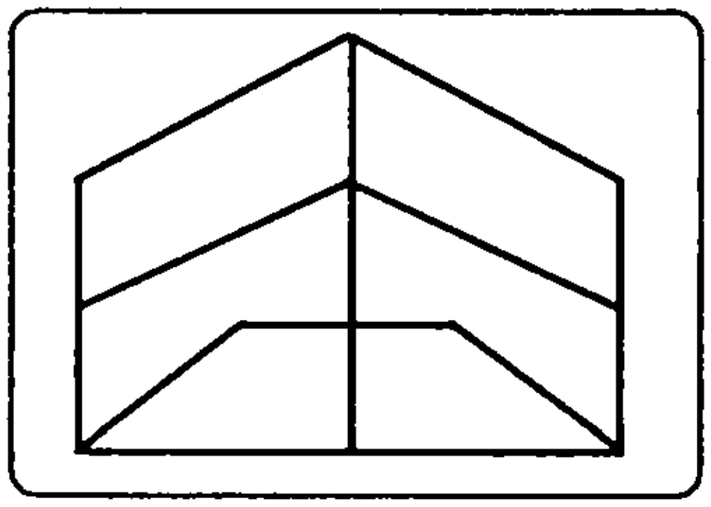
   ¿Cuántos segmentos adicionales se debe trazar como mínimo, para obtener un total de 19 segmentos?

   A) 1 B) 2 C) 3 D) 10 E) 16

5. *¿Cuál es la mayor cantidad de números de 2 cifras que se pueden formar con 3 fichas en las que se han pintado un dígito en cada una?*

   A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E)12

6. *En la figura adjunta, ¿cuántas figuras tienen 4 lados?*



   A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

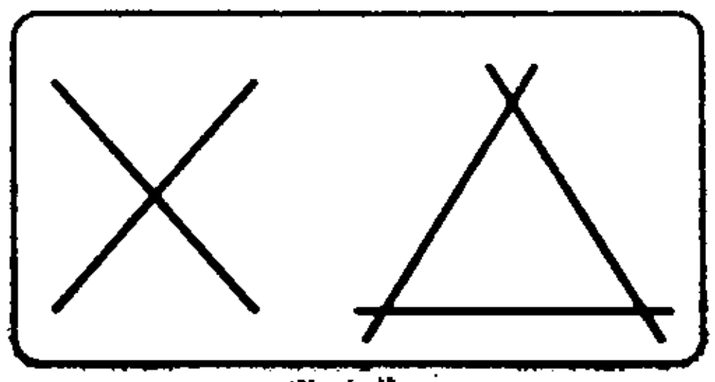
7. *Una partida de póker se juega hasta que uno de los jugadores logre ganar 5 partidas ¿Cuántos partidos se juegan como máximo?*

   A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 11

8. *Festino y su amigo se ponen a jugar a las cartas hasta que uno de ellos gane 3 partidas. ¿De cuántas maneras diferentes puede acabar el juego?*

   A) 10 B) 15 C) 18 D) 20 E) 25

9. *En la figura adjunta se indican el número de intersecciones de dos y tres rectas. Identifique el número de intersecciones de 4 rectas.*



   A) 4
   B) 5
   C) 6
   D) 7
   E) 8

10. En una caja se tiene diez fichas numeradas del 1 al 10. De la caja se sacan tres fichas. ¿Cuántas posibilidades se tiene de conseguir que la suma de los números de las fichas sea 9?

A) Exactamente 5
B) Más de 8
C) Más de 5 y menos de 8
D) Menos de cinco
E) Ninguno

11. Una urna contiene 13 bolas negras 12 rojas y 7 blancas. La menor cantidad que debe sacarse para obtener el menor número de bolas de cada color es:

A) 25 **B)** 19 **C)** 21 **D)** 28 **E)** 26

12. En una urna hay 13 bolas negras y 14 bolas blancas. ¿Cuántas extracciones debo realizar como mínimo para obtener con seguridad 2 bolas negras y cuántas para obtener 2 bolas del mismo color?

A) 16; 4 **B)** 14; 3 **C)** 16; 3
D) 15; 3 **E)** 16; 4

13. De una urna que contiene 20 pares de guantes rojos y 10 pares de guantes blancos, se van extrayendo uno por uno sin reponerlos. ¿En cuántas extracciones se tendrá la plena seguridad de tener un par de guantes utilizables del mismo color?

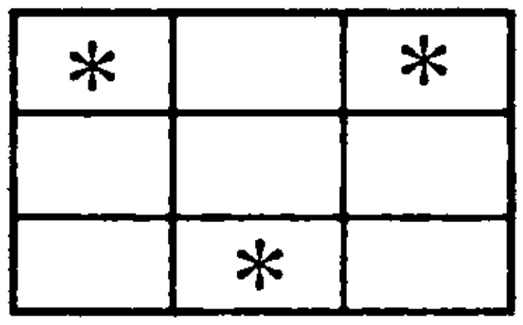
A) 3 **B)** 2 **C)** 10 **D)** 21 **E)** 31

14. ¿Cuántas parejas de números enteros positivos existen tales que suman 200?

A) 100 **B)** 99 **C)** 101
D) 400 **E)** 600

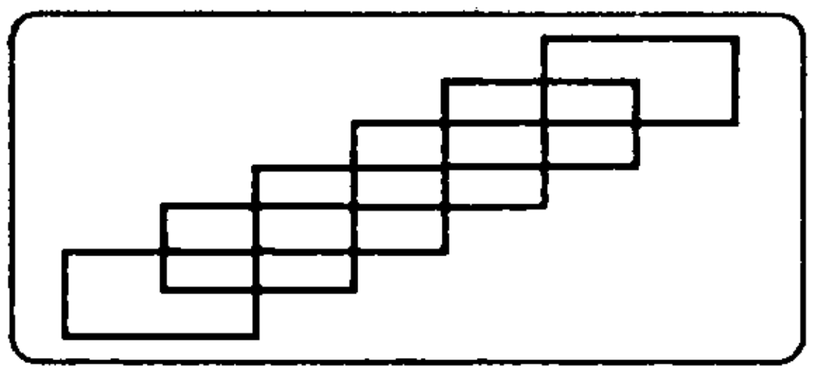
15. Hallar el número de cuadriláteros que contengan un solo asterisco, en la siguiente figura mostrada.

A) 12
B) 16
C) 15
D) 17
E) 18



16. ¿Cuántos rectángulos hay en la siguiente figura?

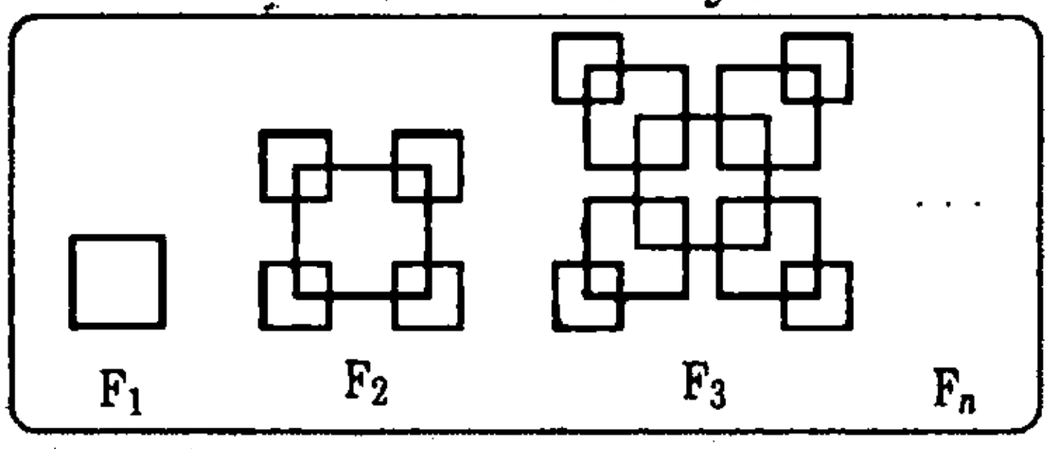
A) 38
B) 41
C) 39
D) 36
E) 35



17. ¿Cuántos triángulos se forman al trazar todas las diagonales de un pentágono?

A) 30 **B)** 32 **C)** 35
D) 38 **E)** Ninguna anterior.

18. Cuántos cuadrados hay en Fn



A) n^3 **B)** $(n+1)^2$ **C)** $8n+7$
D) $8n-7$ **E)** $8n+1$

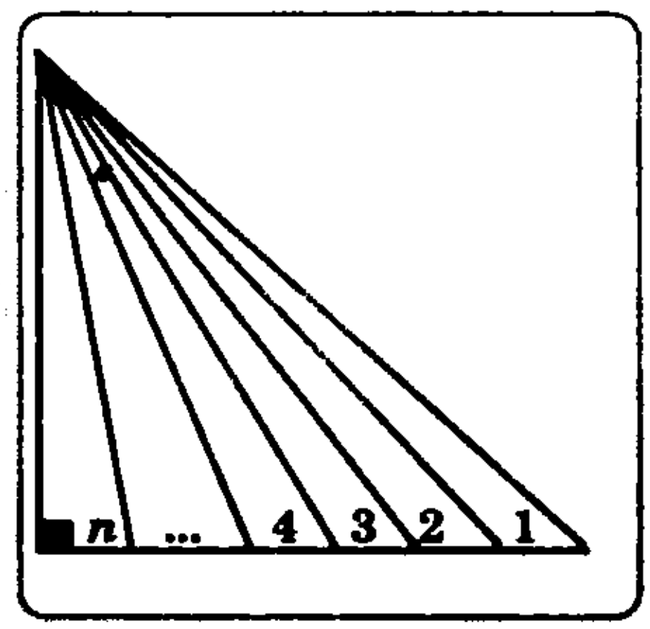
19. En la figura mostrada, hallar el número total de ángulos agudos que se puede contar:

A) $\frac{n(n+1)}{2}$

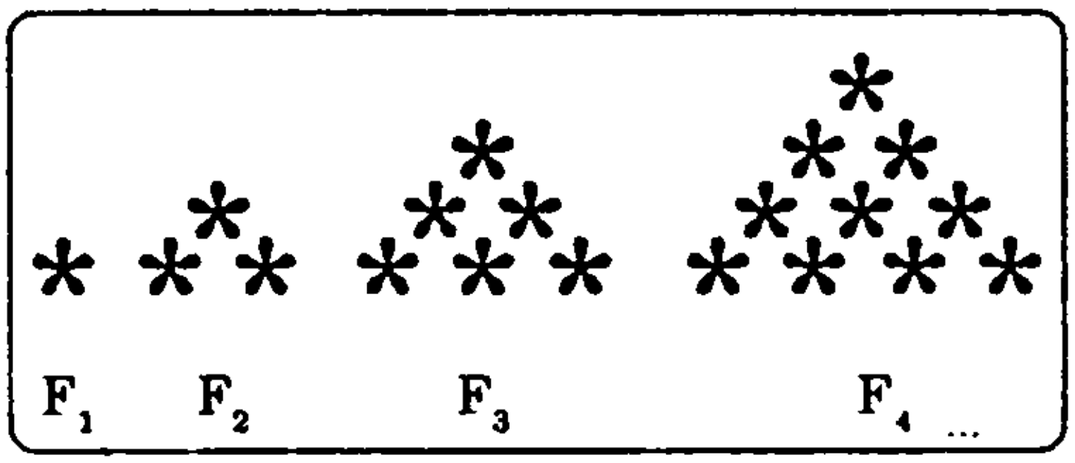
B) $\frac{n(n+2)}{2}$

C) $\frac{n(n+3)}{2}$

D) $(n+1)^2$
E) $8(n+3)$

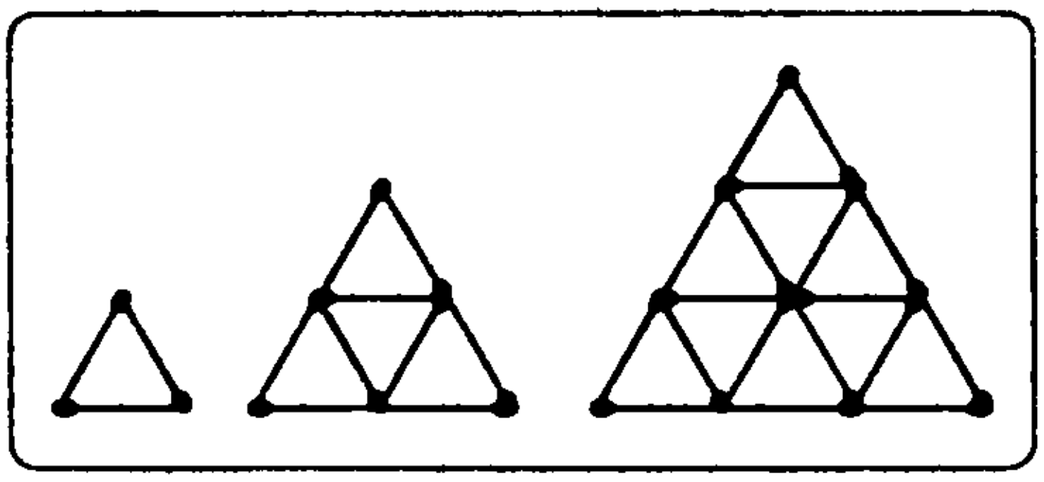


20. ¿Cuántos asteriscos hay en: F_{100}



A) 4500 B) 5400 C) 5050
D) 5060 E) 5000

21. Estos triángulos han sido construidos con palitos de fósforo. ¿Cuántos palitos serán necesarios para construir el triángulo T_{50}?

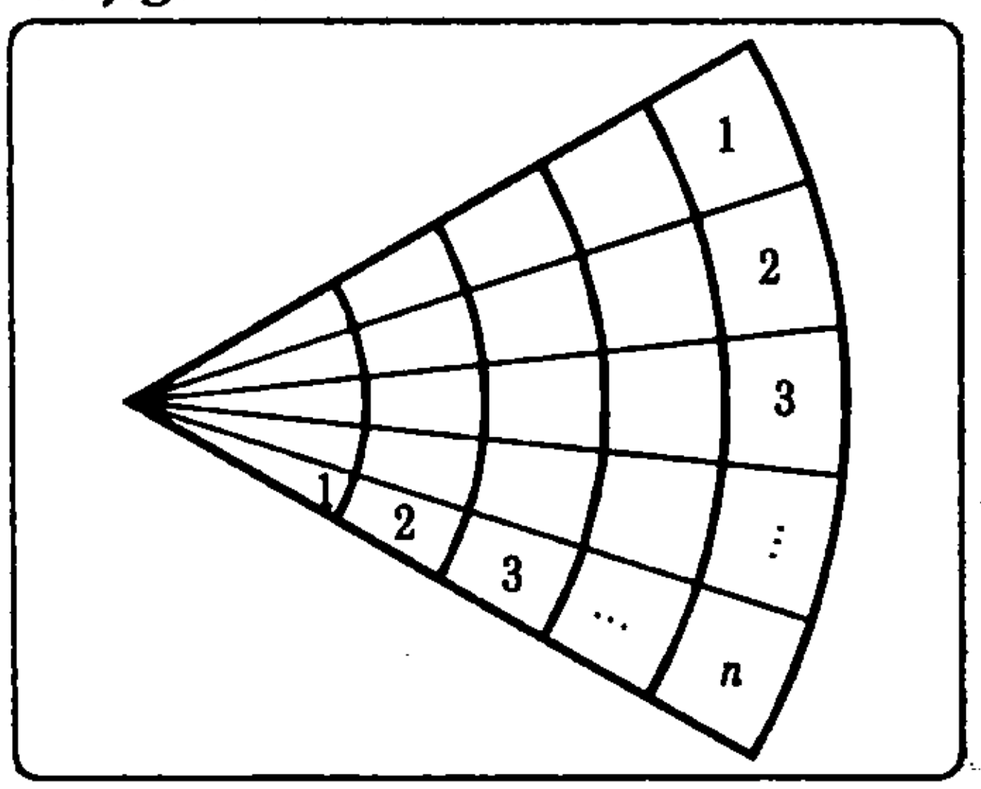


A) 1273 B) 3825 C) 4500
D)3495 E) 3725

22. ¿Cuántos cuadriláteros del tablero de ajedrez no son cuadrados?

A) 1232 B) 1260 C) 0
D) 1092 E) 1080

23. ¿Cuántos sectores circulares hay en la figura?

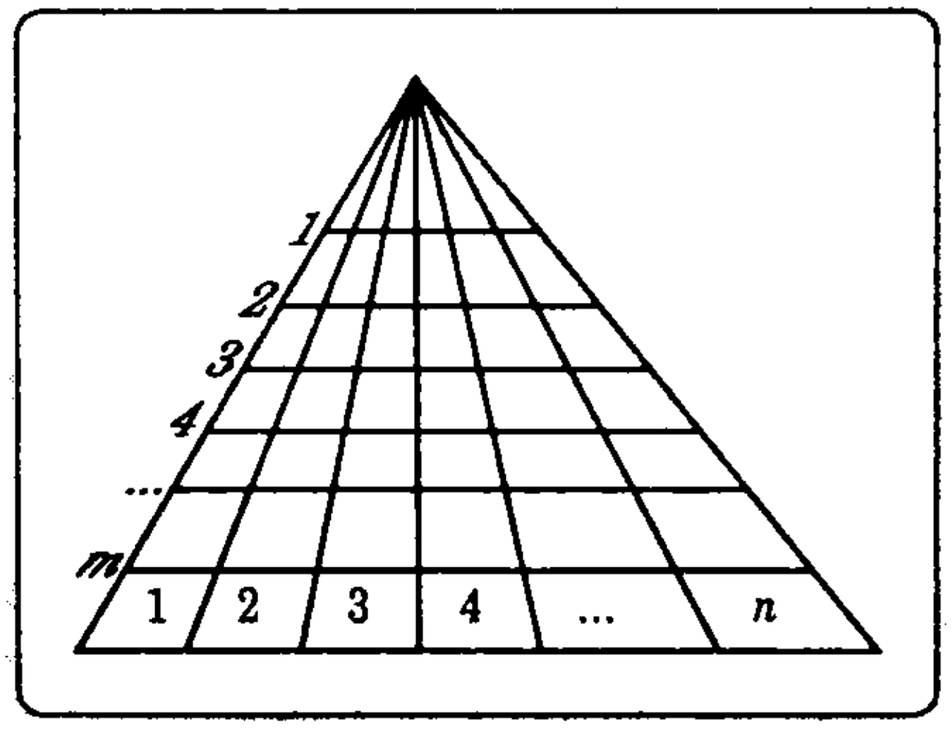


A) $\frac{n(n+1)}{2}$ B) $n(n+1)$

C) $\frac{n^2(n+1)}{2}$

D) $n^2(n+1)$ E) $n^2(n+1)^2$

24. Cuántos cuadriláteros hay en:

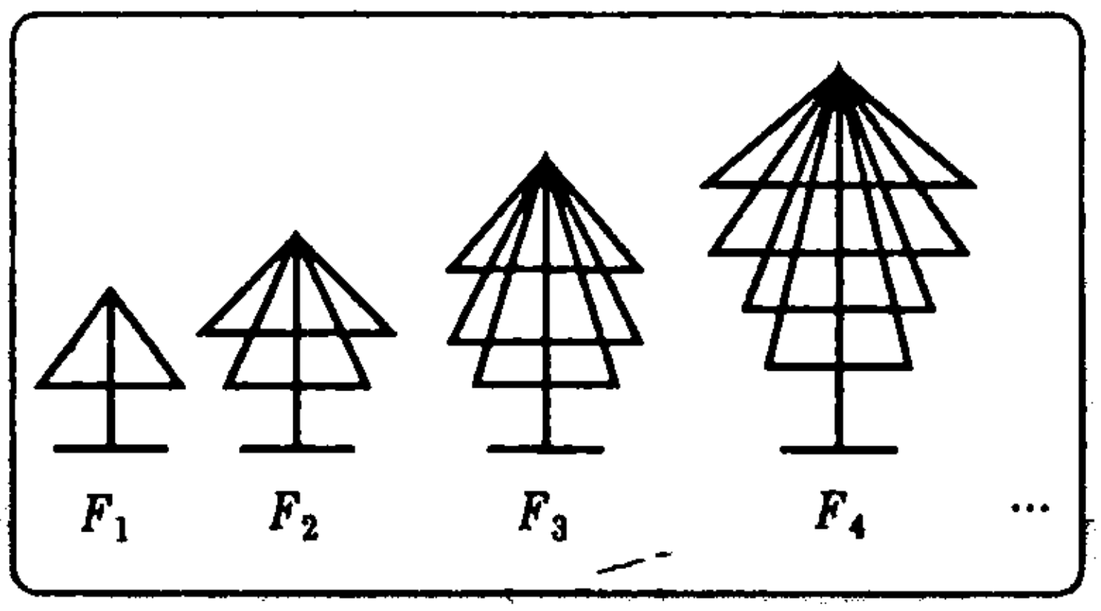


A) $\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{m(m+1)}{2}$

B) $\frac{n(n+1)(m+1)}{2}$ C) $\frac{m(m+1)n}{2}$

D) mn E) n^2m^2

25. ¿Cuántos triángulos hay en la figura Fn?

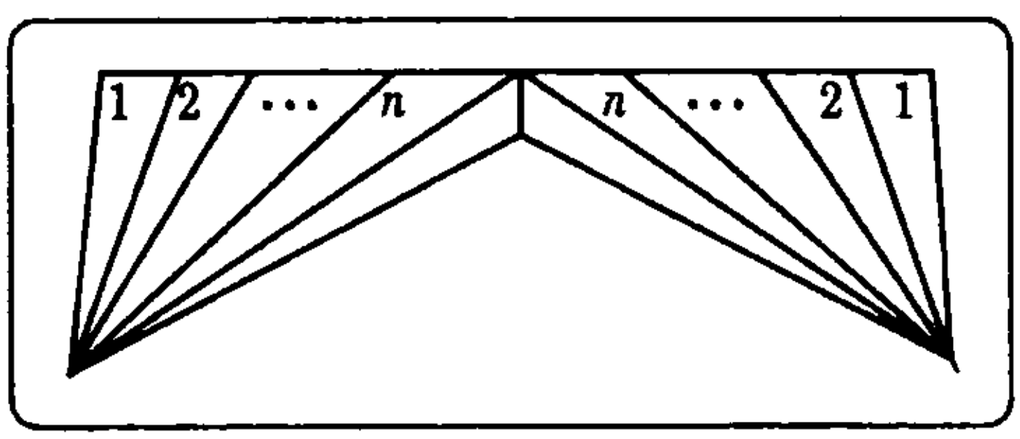


A) $\frac{n(n+1)}{2}$ B) $\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$

C) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

D) $\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$ **E)** $\frac{n(n+1)(2n+3)}{6}$

26. ¿Cuántos pentágonos hay en esta figura?



A) $n(n+2)$ **B)** $2n$ **C)** $3n$
D) $n(n+1)$ **E)** $n(n+1)/2$

27. ¿Cuántos triángulos son tales que tienen 15 cm de perímetro y la medida de sus lados son un número entero de centímetros

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 14 **E)** 12

CLAVES DE RESPUESTAS

PÁGINA	1	2	3	4	5	6	7	8
395	D	B	B	B	C	C	A	D

PÁGINA	1	2	3	4
397	C	B	E	C

PÁGINA	1	2	3	4	5	6	7	8
399 - 400	C	C	C	E	C	E	B	C

PÁGINA	1	2	3	4	5	6	7	8
402 - 403	C	C	E	B	A	D	C	B
	1							
	B							

PROBLEMAS PROPUESTOS

1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	E	D	A	D	E	D	D	C
10	11	12	13	14	15	16	17	18
D	E	C	E	A	E	B	C	D
19	20	21	22	23	24	25	26	27
C	C	B	D	C	B	D	A	C

Divertijo

1. $2^4 = 16$
2. 6

Niels Abel (1802 – 1829)

Niels Abel

Nació : 5 de Agosto de 1802 en Finnoy (una isla cerca de Stavanger) Noruega.

Probó la imposibilidad de resolver algebraicamente ecuaciones de quinto grado.

La vida de Abel estuvo dominada por la pobreza. Después de muerto su padre, quien era un ministro protestante, Abel tuvo que asumir la responsabilidad de mantener a su madre y familia, en 1820.

El profesor de Abel, Holmboe, reconoció su talento para las matemáticas, debido a su falta de dinero para asistir a una colegiatura para ingresar a la universidad de Christiania, ingresó a la universidad en 1821, diez años después de que la universidad fuera fundada, y se graduó en 1822.

Abel publicó en 1823 escritos de ecuaciones funcionales e integrales . En esto Abel dio la primera solución de una ecuación integral. En 1824 probó que era imposible resolver algebraicamente ecuaciones de quinto grado y de su propio costo realizó publicaciones con la esperanza de obtener reconocimiento por su trabajo.

Eventualmente ganó un premio de escolaridad del gobierno para viajar al extranjero, visitó Alemania y Francia.

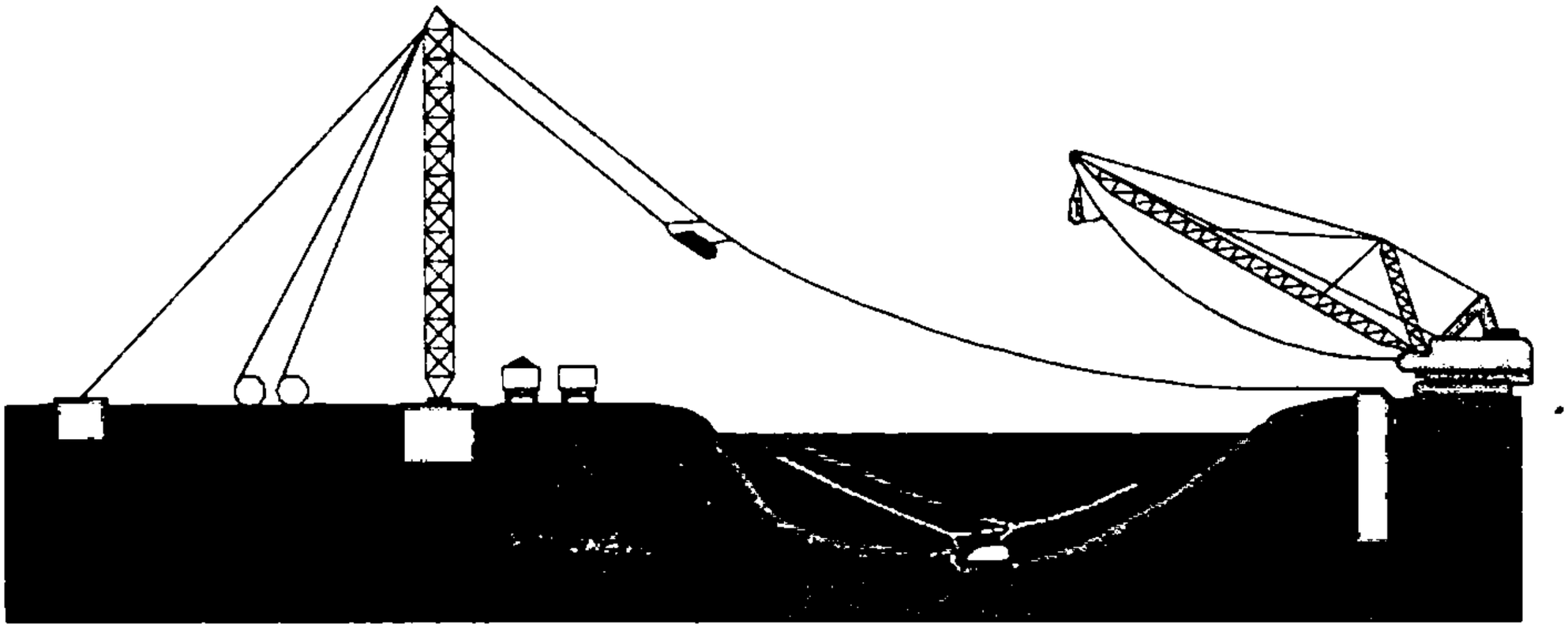
Abel fue el instrumento que le dio estabilidad al análisis matemático sobre bases rigurosas. Su mayor trabajo "Recherches sur les fonctions elliptiques" fue publicado en 1827 en el primer volumen del diario Crelle, el primer periódico dedicado enteramente a las matemáticas. Abel visitó este periódico en su visita a Alemania.

Después de su visita a París, retornó a Noruega bastante débil. mientras estuvo en París visitó a un doctor quién le informó que padecía de tuberculosis. A pesar de su mala salud y la pobreza, continuó escribiendo sus escritos y la teoría de la ecuación y de las funciones elípticas de mayor importancia en el desarrollo de la teoría total. Abel revolucionó el entendimiento de las funciones elípticas por el estudio de la función inversa de esa función.

Abel viajó muy enfermo a visitar a su familia para la Navidad de 1828 en Froland. El comenzó a decaer y estuvo seriamente enfermo y murió a los pocos meses después.

Falleció: 16 de Abril de 1829 en Froland Noruega

10 RAZONAMIENTO GEOMETRICO



INTRODUCCION

La Geometría es una de las disciplinas más antiguas de la humanidad; su desarrollo inicial como una necesidad pasa resolver los problemas del quehacer de la época, se fue estructurando en forma sistemática e independizando de su aplicación hacia una disciplina con sus propias reglas y principios, hasta alcanzar el nivel de desarrollo que hoy conocemos de la geometría.

En este texto haremos un esbozo de la geometría, desde las ilusiones ópticas, los elementos básicos de la geometría, poniendo énfasis en los temas que son materia de preguntas de los exámenes de admisión.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Necesitas saber plantear y resolver ecuaciones.

Te sugiero una revisión de la lógica proposicional, sobre todo la parte correspondiente a las inferencias, para comprender los principios bajo los cuales se construye la geometría.

10.1 Ilusiones ópticas

¡Ver para creer! Es un viejo adagio que da autoridad a la vista para su aprobación de la existencia de las cosas.

Es verdad, cuando se nos presenta algún objeto desconocido lo primero que atinamos es a mirar. A OBSERVAR.

Pero, ¿basta ver para creer? ¿Podemos creer en todo lo que vemos o creer que todo lo que vemos existe? ¿La vista nos proporciona toda la información sobre las cosas visibles?

Los elementos de la geometría son figuras. Las figuras existen en la medida en que las vemos. Pero, si ponemos en duda sobre las cosas que vemos, cómo podemos estar seguros de que otra persona ve una figura tal cual como la vemos. Por ejemplo, observa las figuras de abajo:

¿De dónde salió el cuadrado negro?

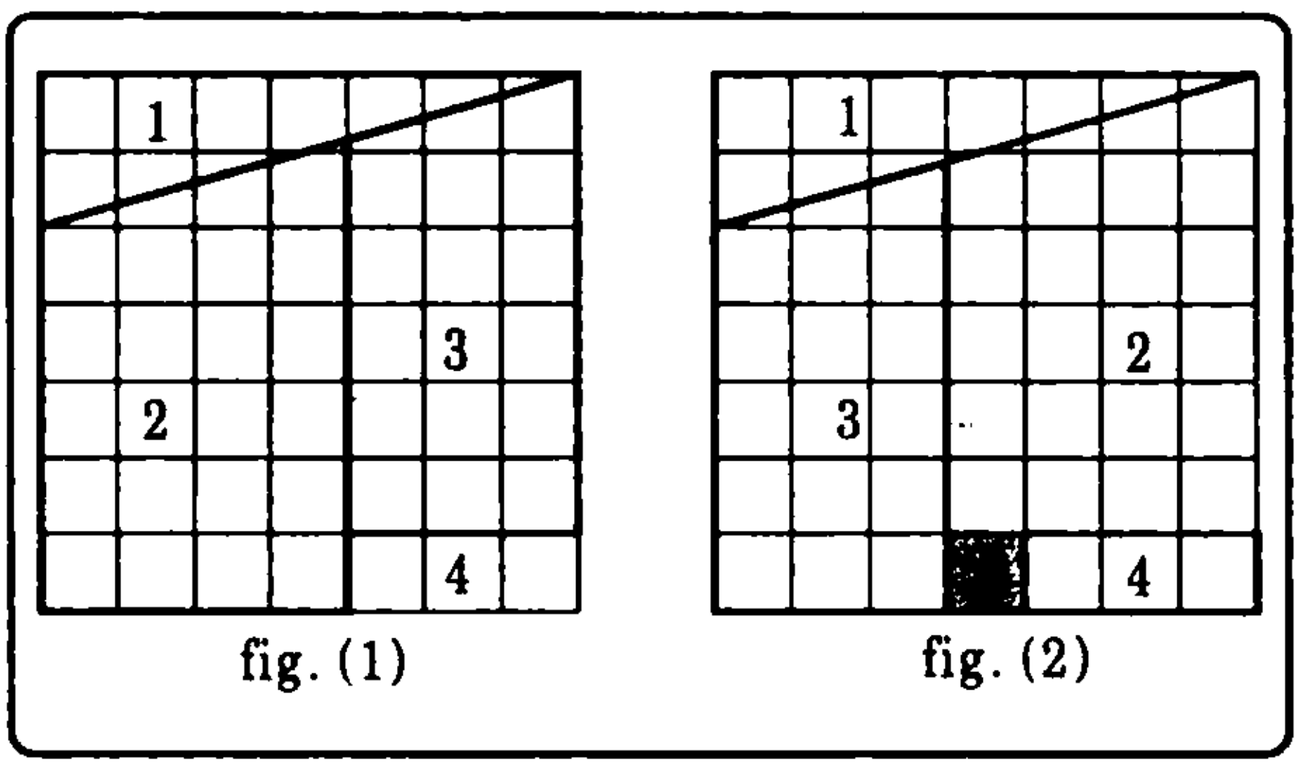
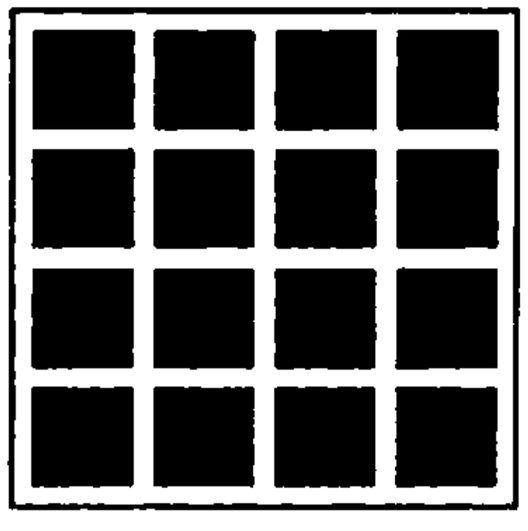


fig. (1) fig. (2)

Pega un pedazo de papel sobre un cartón, dibuja la figura (1) y corta siguiendo las líneas en 4 partes. Luego arma el rompecabezas según la fig. (2) y aparecerá un agujero.

A pesar de ser las mismas piezas de (1), en (2) aparece un cuadrado demás. ¿Cómo explicar esto? ¿Ahora puedes confiar en lo que ves?

No todas las cosas que vemos existen, ni todas las cosas que existen las vemos. La vista nos proporciona sólo una parte de la información de las cosas. Es muy fácil engañar a la vista, sino recuerda nomás a los magos.

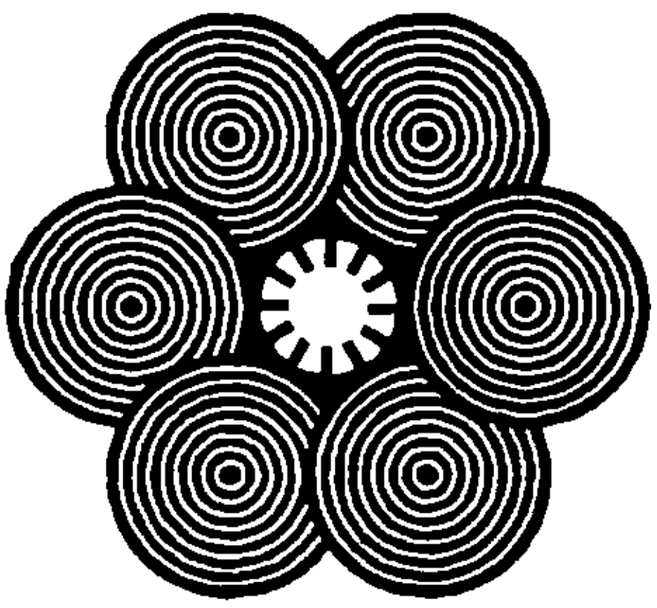


El tablero intermitente

Observa la figura y notarás unos puntos grises en la intersección de las líneas blancas. No pienses que estás mal de la vista.

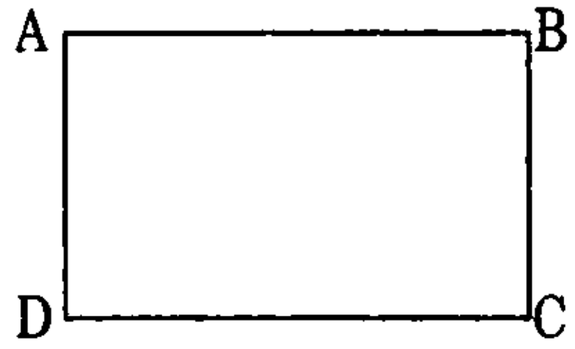
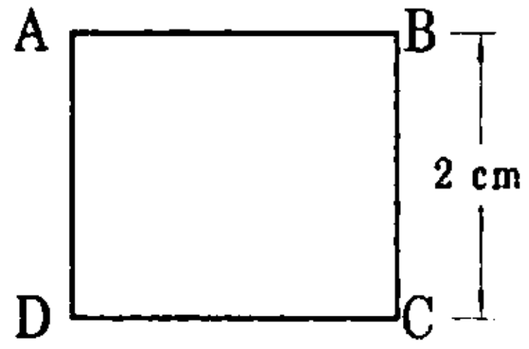
La ilusión de Silvanius Thompson

Has girar esta figura (haciendo girar el libro en cualquier sentido), verás que todos los círculos giran en el mismo sentido, mientras que la rueda blanca dentada del centro, gira en sentido contrario.



Los antiguos griegos ya se habían percatado de este problema. Había la necesidad de crear un sistema de construcción de las figuras de modo que nadie estuviera en desacuerdo sobre que si una cosa es así o no es así.

Por ejemplo, ¿Cuál de los siguientes dos problemas está correctamente formulado?

Problema A	**Problema B**
Hallar el área del cuadrado A B C D, cuyo lado mide 2 m.	Calcular el área de la figura adjunta
	
(1)	(2)

El problema A está bien enunciado, a pesar de que la figura no represente un cuadrado. El enunciado garantiza que la figura es un cuadrado.

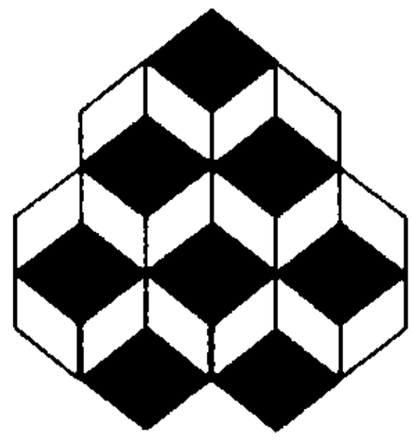
El problema B es inconsistente. Si bien la figura aparentemente es un cuadrado, pero eso no es suficiente. La figura no garantiza que sea un cuadrado.

Los griegos, particularmente EUCLIDES, han resuelto este problema, utilizando la lógica, esto es, estableciendo ciertas reglas de juego básicas, que todo aquel que quiere jugar el juego tiene que aceptarlas sin demostración. A partir de ellas se pueden derivar todas las reglas que sean posibles pero que tienen que ser demostradas en base a las originales u otras previamente demostradas.

Los axiomas, postulados y teoremas, son precisamente las categorías de las mencionadas reglas de juego en la geometría.

Lo interesante de esta forma de construir la geometría, es que ha sido extendida para toda la matemática. Esto ha hecho que sea posible crear sistemas matemáticos de los más diversos y complejos.

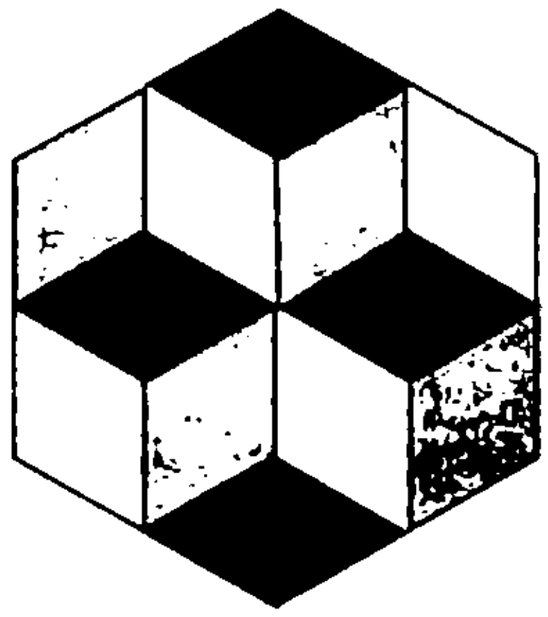
Un cubo de más



Observa la figura. Verás que hay 6 cubitos. Ahora voltea el libro, ¿Cuántos cubitos hay? ¿ Verdad que son 7?

¿Qué porción falta?

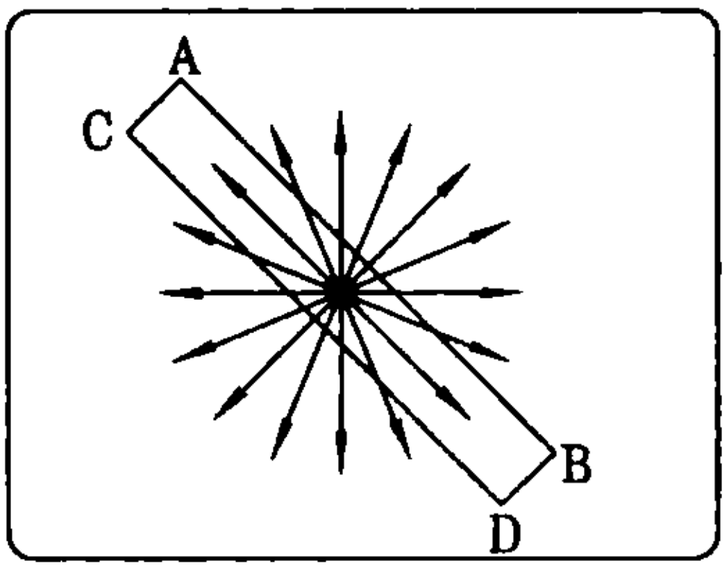
Observa la figura y notarás que falta una pequeña porción de la torta. Ahora voltea el libro y observa nuevamente. ¿Qué porción falta?



¿Los cubos sobresalen hacia abajo o hacia arriba?. Mirando durante cierto tiempo puedes provocar a voluntad una u otra imagen.

Problemas

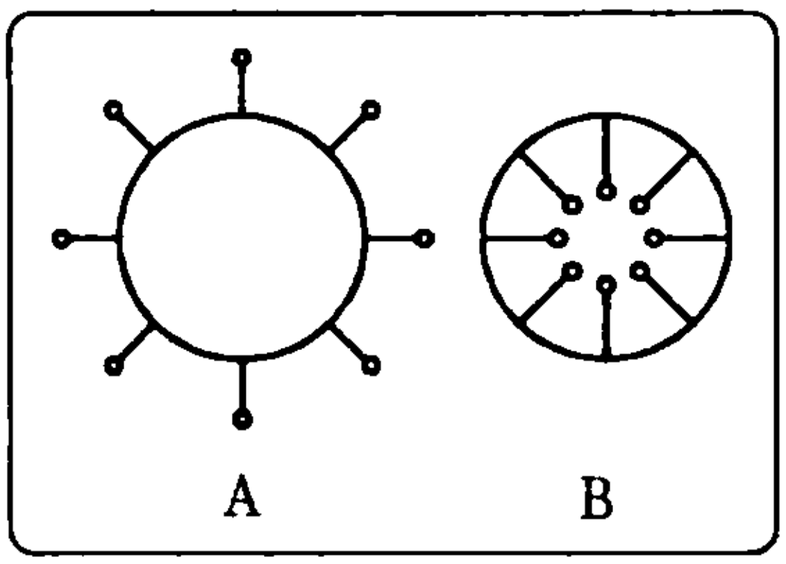
1. ¿Son paralelas los segmentos A B y C D?



A) Sí

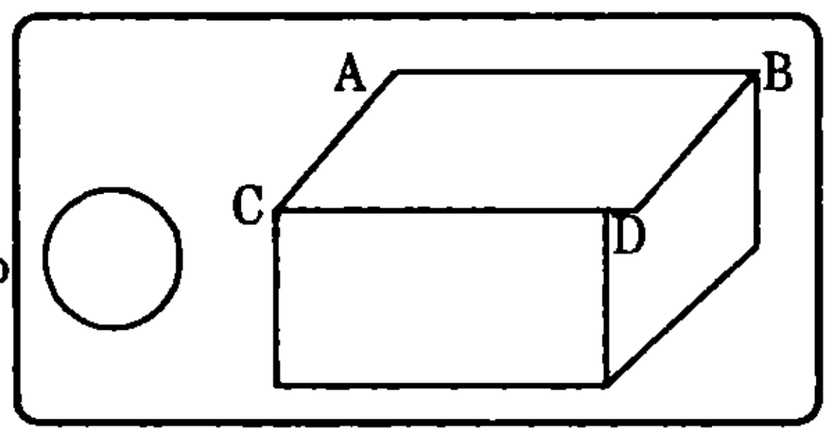
B) No

2. ¿Cuál de las circunferencias es más grande?



A) Sí B) No C) Son Iguales

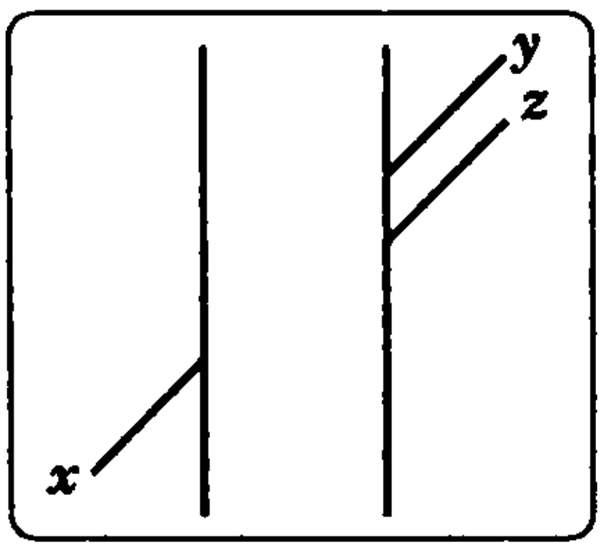
3. Entre los segmentos AB y CD ¿Cabe el círculo de a lado?



A) Sí

B) No

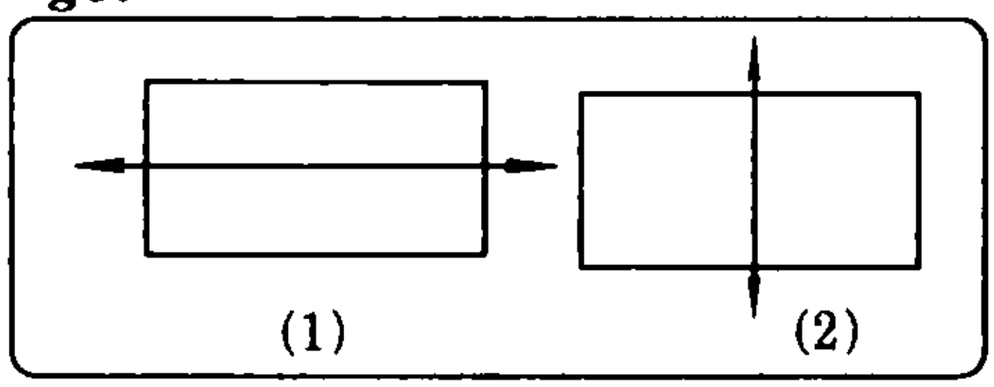
4. ¿Cuál de los segmentos es la prolongación de x?



A) y

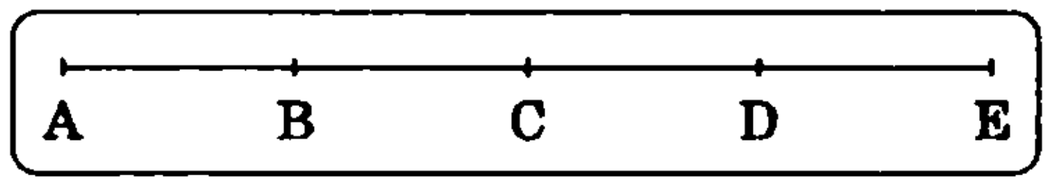
B) z

5. ¿Cuál de los rectángulos es más largo?



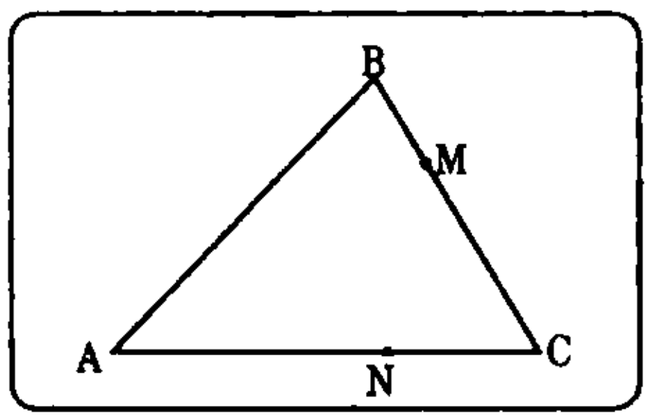
A) (1) B) (2) C) Son iguales

6. ¿Cuál es la longitud del segmento BE, si el segmento AC mide 20 cm.?



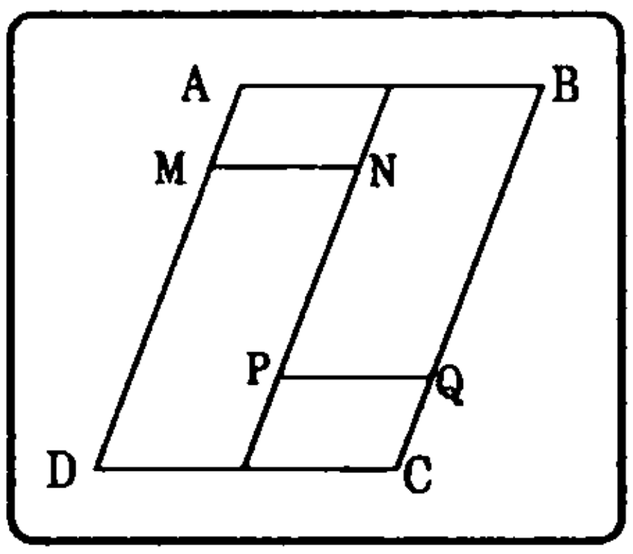
A) 40 cm B) 50 cm C) 45 cm
D) 60 cm E) Faltan datos

7. En el triángulo equilátero ABC de perímetro 45 cm, los puntos M y N son puntos medios, respectivamente, de los lados BC y AC, ¿Cuál es la longitud de M N?



A) 15 cm
B) 7,5 cm
C) 30 cm
D) 17,5 cm
E) El triángulo ABC no es equilátero

8. En el paralelogramo ABCD, MN es paralelo a PQ, MD = BQ = 4 cm y AM = QC = 2 cm. ¿Cuánto mide el segmento PN?



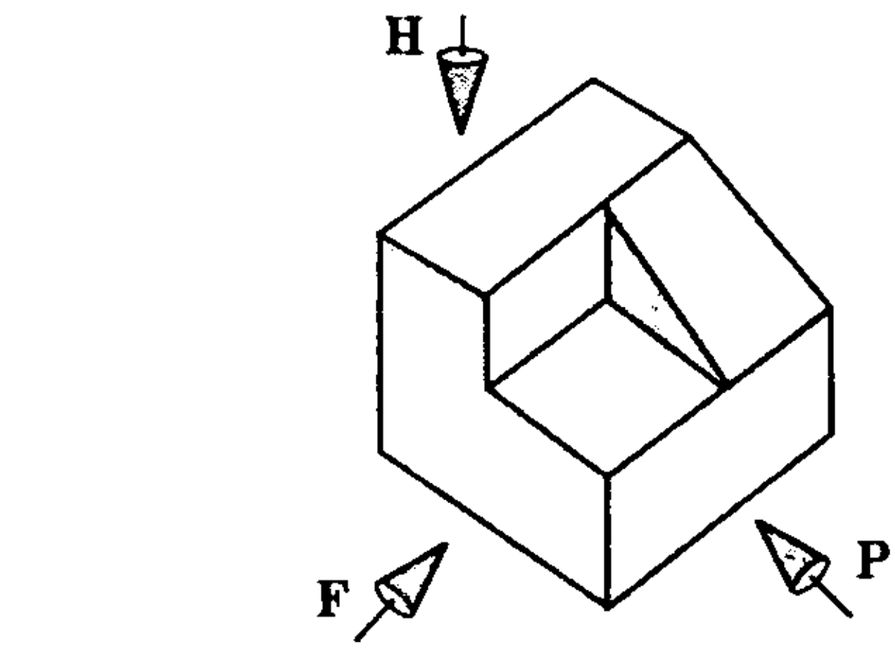
A) 4 cm
B) 2 cm
C) 3 cm
D) 1 cm
E) Falta información.

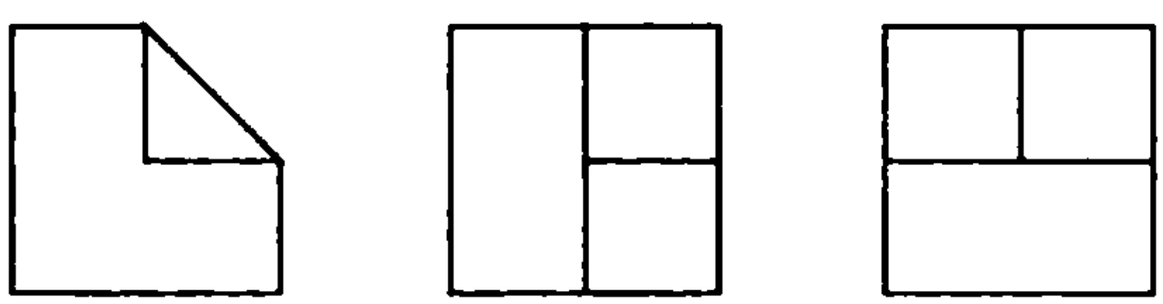
10.2 Visualización en el espacio

10.2.1. Isometría

Imagínate una persona parada en el centro de una habitación mirando hacia la pared donde se encuentra la puerta. Entras, cámara fotográfica en mano y le tomas 6 fotografías: de frente, de ambos costados, de espalda, del techo y del piso. Comparas las 6 fotografías de la misma persona ¡son todas diferentes! Cada foto se llama «vista», entonces tenemos 6 vistas. ¿Podemos tomar otras vistas, por ejemplo de las esquinas de la habitación? Sí. Se pueden tomar muchas otras.

De las seis vistas, nos interesan 3 de ellas: la del frente, la del techo y la del costado izquierdo. Estas vistas se llaman respectivamente **frontal (F), horizontal (H) y de perfil (P).**





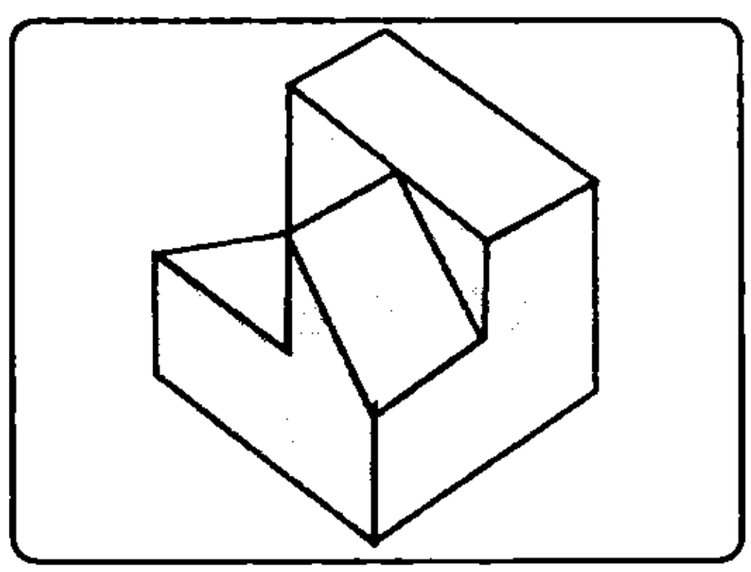
Vista F Vista H Vista P

Las tres vistas principales de un sólido.

Teniendo un sólido es posible dibujar sus vistas. El proceso contrario es «reconstruir» el sólido teniendo las tres vistas. Este procedimiento es muy usual en diseño mecánico y la arquitectura. Muchas veces, en lugar de transportar las piezas de un motor, de un país a otro, es suficiente enviar los «planos» de la pieza con los cuales, los especialistas lo reproducen con exactitud.

Problema 3

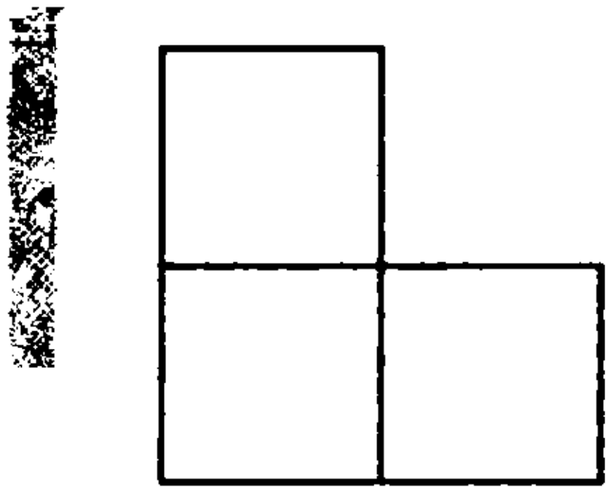
Hallar las tres vistas principales del sólido mostrado en al figura.



DIVERTIJO 1

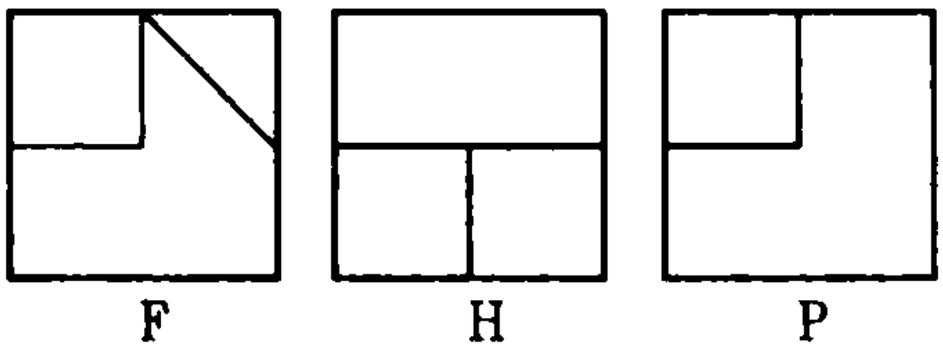
Una pieza peculiar

La figura adjunta es la vista frontal de la pieza que le falta al juguete del Manuelito.
El no puede jugar mientras no esté completo su juguete que es de plástico. A él no le importará si la pieza es de madera.



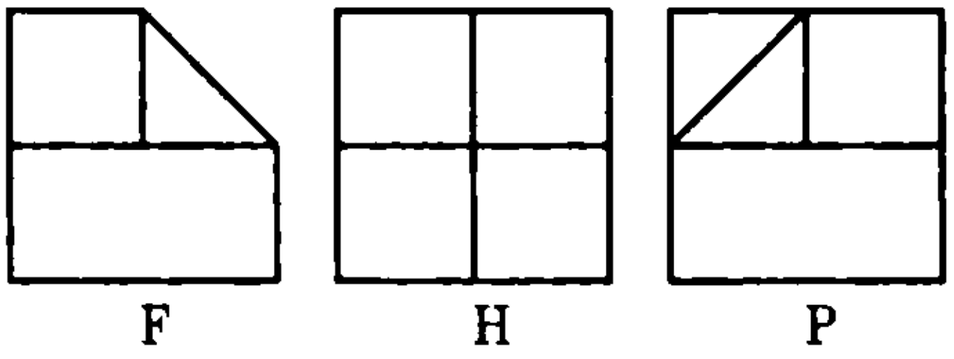
¿Necesitas las otras vistas?
Para obtener la vista horizontal haz girar la vista frontal 90° a la derecha y para la de perfil haces girar 90° a la izquierda.
¿Podrías dibujar la pieza para que el carpintero se la haga?.

Resolución



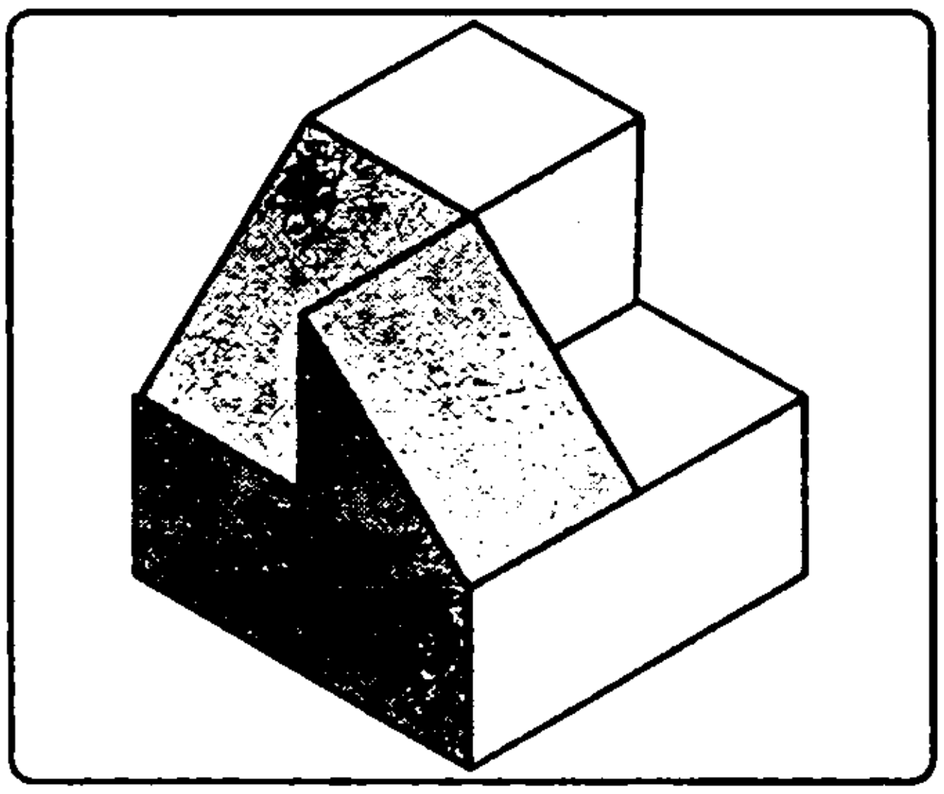
Problema 4

Dibuja el sólido cuyas vistas principales se dan a continuación.



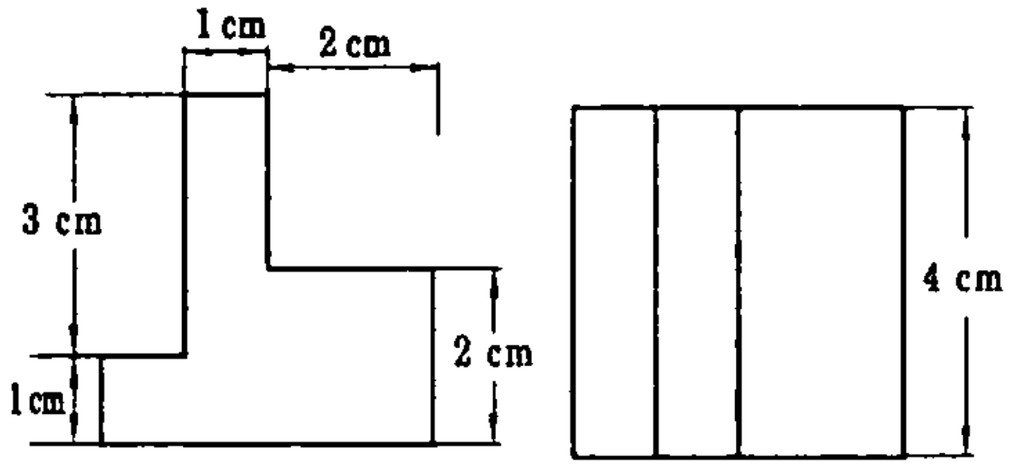
Las líneas que no son visibles de un lado del sólido, están dibujados en líneas punteadas.

Resolución



Problema 5

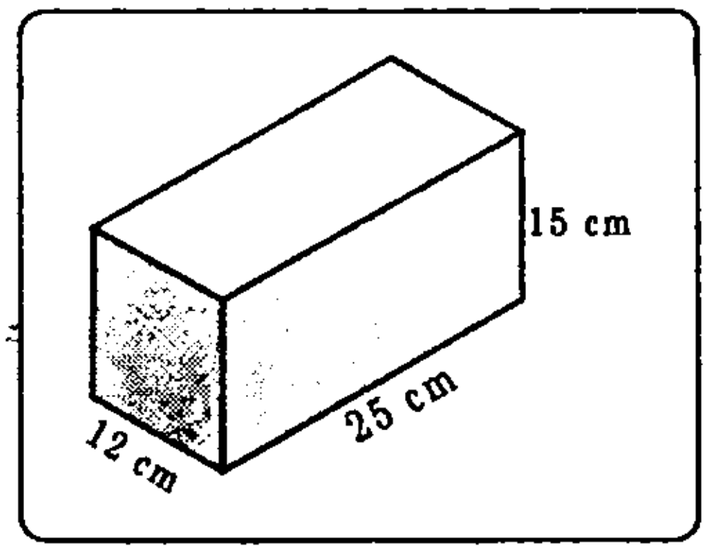
En la figura se representa una pieza metálica que forma parte de una máquina, ¿Cuál es el volumen de dicha pieza? (Ex. UNI '74)



A) 32 cm³ **B)** 16 cm³ **C)** 24cm³
D) 64 cm³ **E)** 36 cm³

Recuerda

¿Cómo se calcula el volumen de un ladrillo?

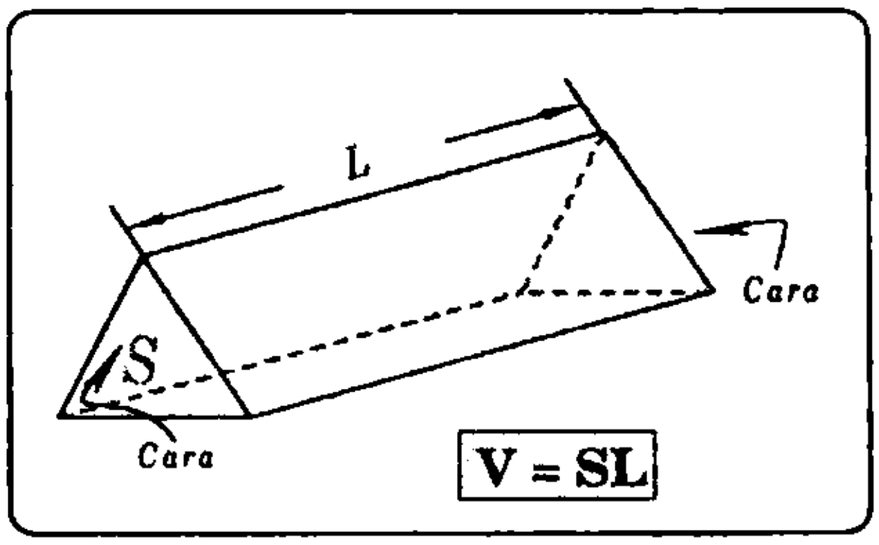


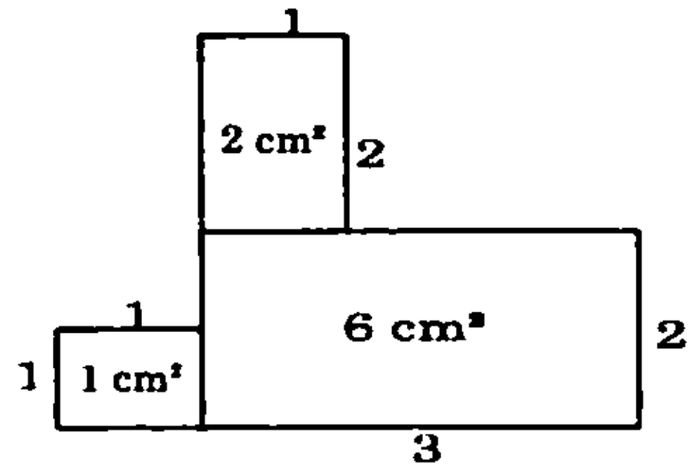
El volumen se obtiene multiplicando las tres dimensiones: el largo, el ancho y el alto, o sea

$$V_{ladrillo} = 25 \times 12 \times 15$$

Resolución

El volumen de un sólido prismático, es igual al área de una de las bases por la distancia entre las dos caras.





El área de la base es: $1 + 2 + 6 = 9\ cm^2$

La distancia entre las caras es: 4 cm

Luego, volumen = $9 \times 4 = 36\ cm^3$

Rpta.: E

10.2.2. Desarrollo de figuras tridimensionales

Las cajas de cartón están hechas de láminas de cartón, apropiadamente cortadas y pegadas.

Consideremos una caja cúbica, tal como la mostrada en la (**fig. 1**) Cortamos con unas tijeras siguiendo las aristas de la caja, hasta que quede una lámina plana y de una sola pieza (**fig. 2**) Esta lámina se conoce como el DESARROLLO de la caja.

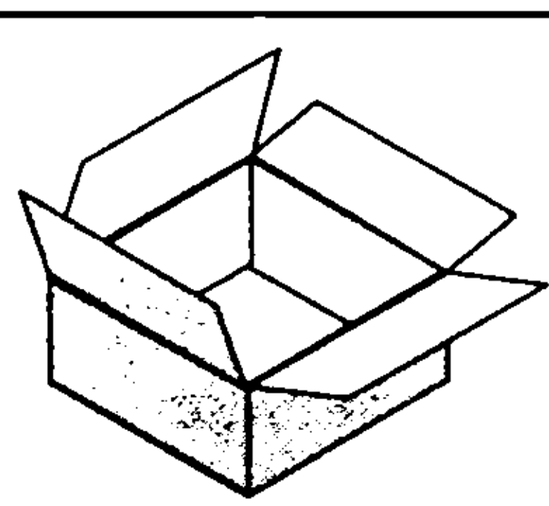


fig. 1

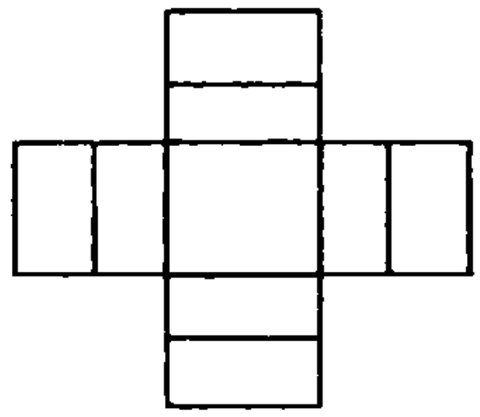
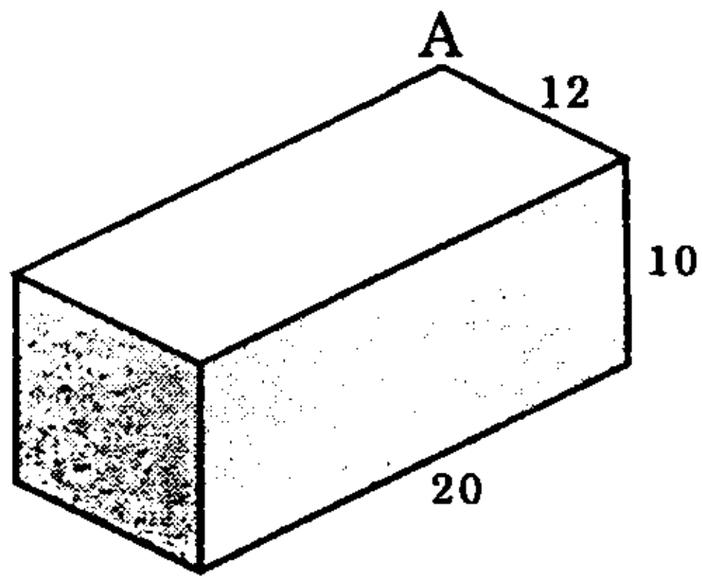


fig. 2

Es evidente que una misma caja es posible desarrollarla de diferentes formas.

Problema 6

En el vértice A, del ladrillo mostrado en la ilustración adjunta, está una araña, en tanto, en el vértice B hay una mosca "difunta". ¿Cuál es la trayectoria más corta que debería seguir la araña para ir hasta la mosca?. Encuentra la longitud de esta trayectoria.

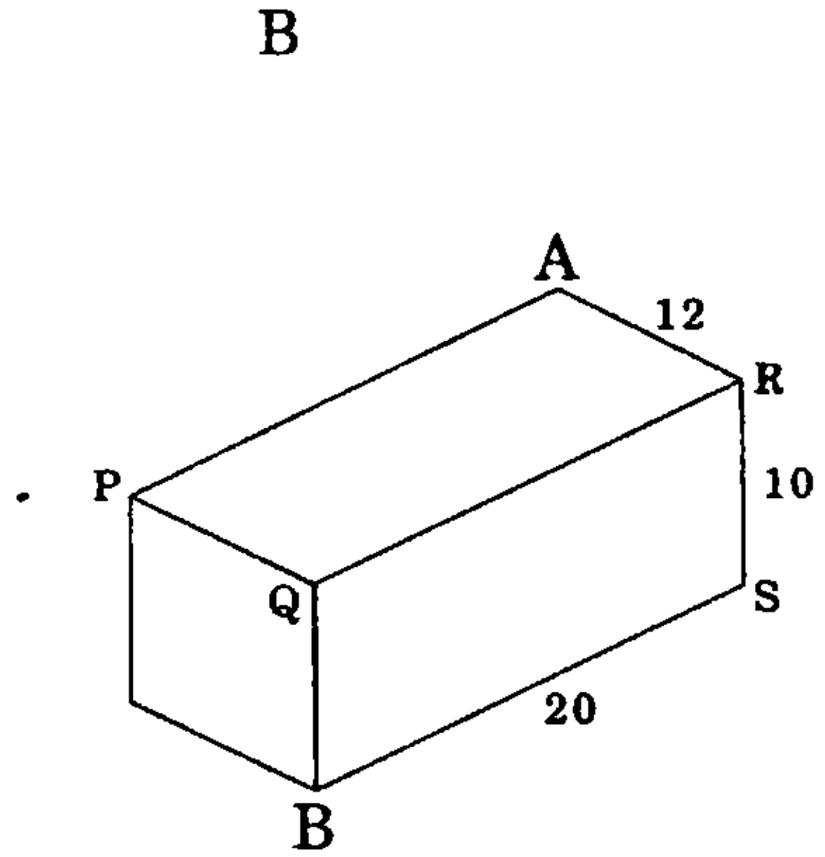


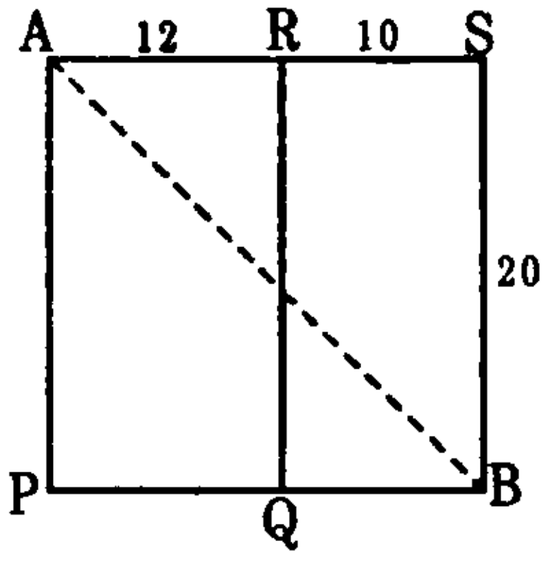
Resolución

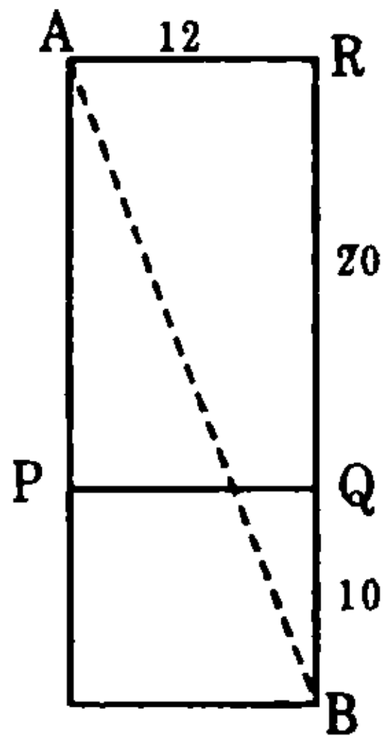
Trazar la trayectoria más corta sobre la superficie del ladrillo resulta bastante dificultosa si intentamos hacerlo sobre ella misma. Por por tanto, es conveniente desarrollarla.

Si bien, un ladrillo no se puede desarrollar igual que una caja de cartón cortándola por las arista, sin embargo, lo podemos desarrollar gráficamente.

Dado que es posible desarrollar un sólido en diferentes formas, se escoge aquel en el que los puntos en cuestión se encuentren más cercanos. Compara los 2 desarrollos y mide en ambos las distancias entre A y B.







Por Teorema de Pitágoras

En el triángulo rectángulo ASB

$$AB^2 = 22^2 + 20^2$$

$$\Rightarrow \quad AB = 29,73$$

En el triángulo rectángulo ARB

$$AB^2 = 12^2 + 30^2$$

$$\Rightarrow \quad AB = 32,31$$

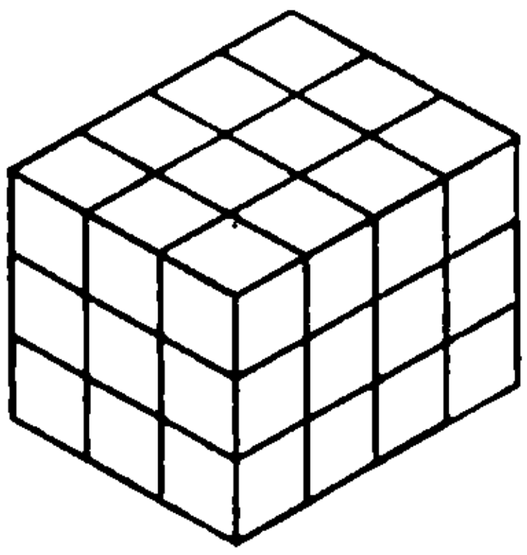
La distancia más corta resulta 29,73

Rpta.: 29,73

Problemas

ENUNCIADO

Si pintamos las 6 caras del siguiente sólido formado por cubitos:



1. ¿Cuántos cubitos quedarán pintados exactamente en 2 caras?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 8 **E)** 16

2. ¿Cuántos cubitos quedarán pintados exactamente en 3 caras?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

3. ¿Cuántos cubitos quedarán sin pintar siquiera una cara?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 0

4. ¿Cuántos cubitos quedarán pintados en una sola cara?

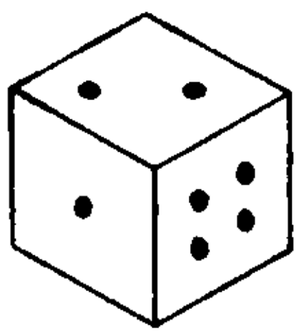
A) 4 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

ENUNCIADO

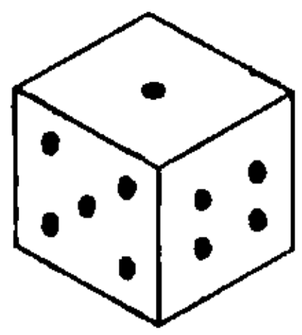
Los dibujos siguientes corresponden a un mismo dado, a excepción de uno. Señala el dado diferente, en cada caso.

5.

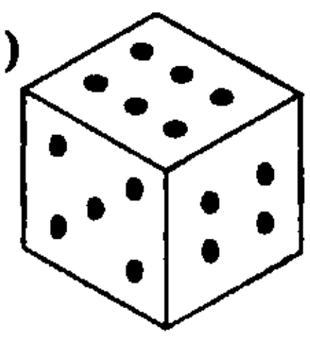
A)



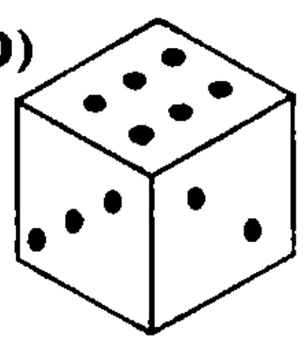
B)



C)

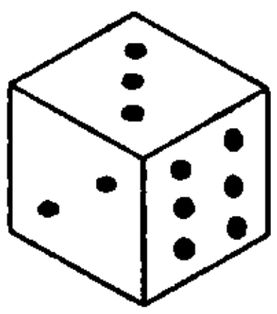


D)

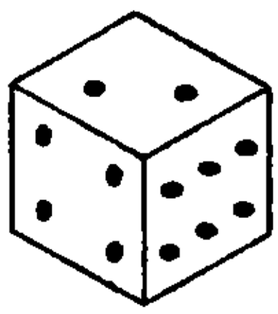


6.

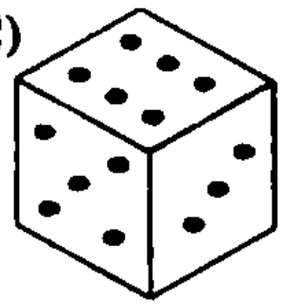
A)



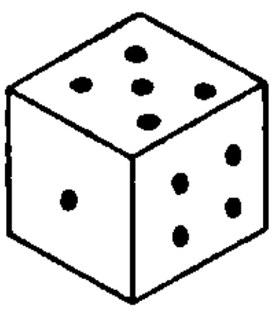
B)



C)

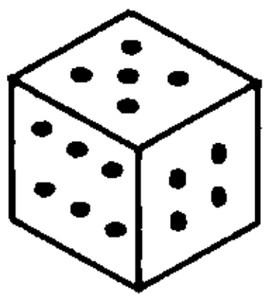


D)

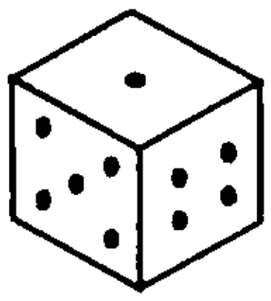


7.

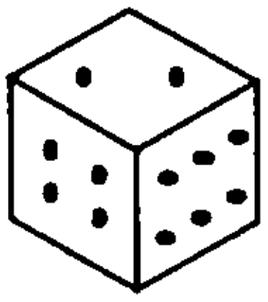
A)



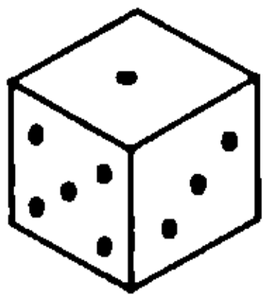
B)



C)

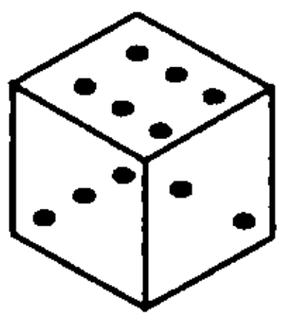


D)

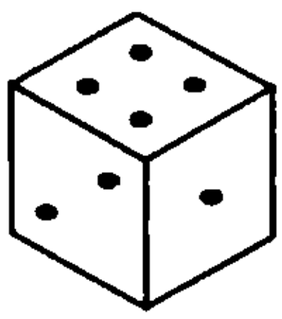


8.

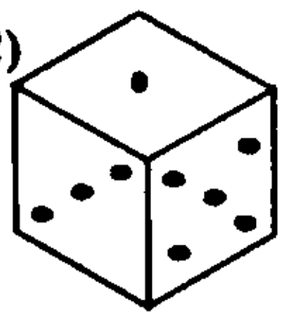
A)



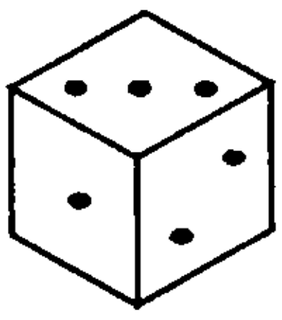
B)



C)

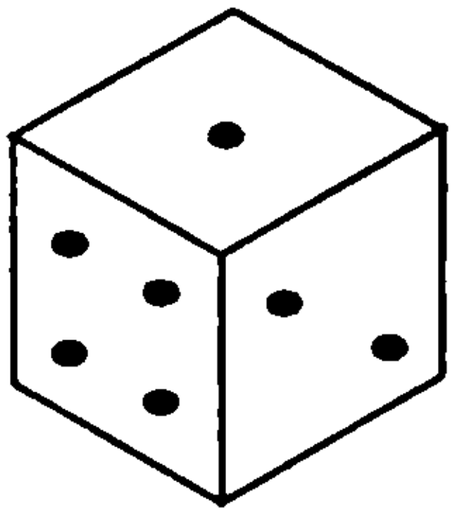


D)



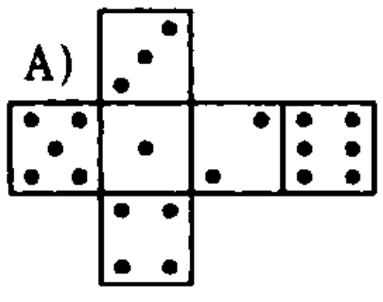
ENUNCIADO

En cada grupo de figuras señala el desarrollo que no corresponde al dado mostrado.

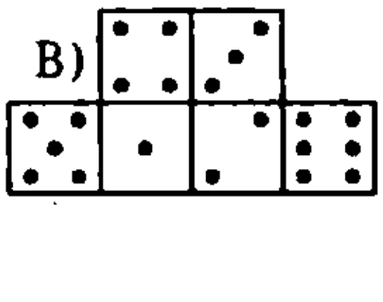


9.

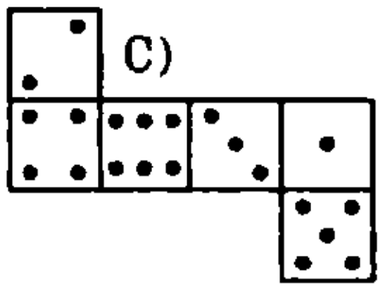
A)



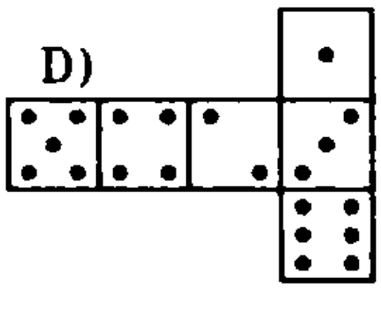
B)



C)

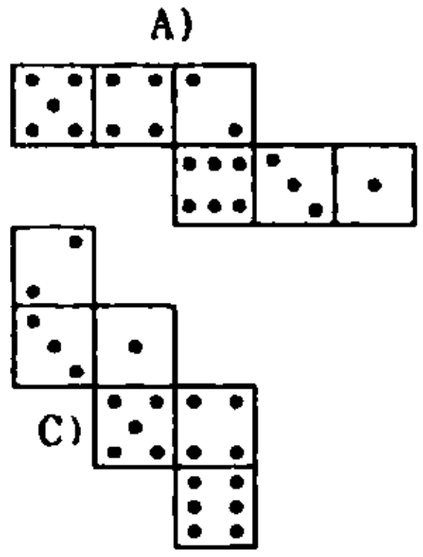


D)

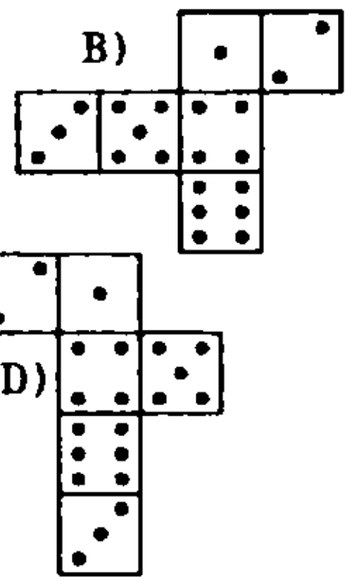


10.

A)

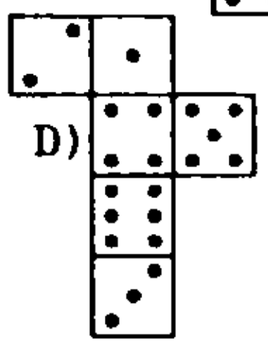


B)



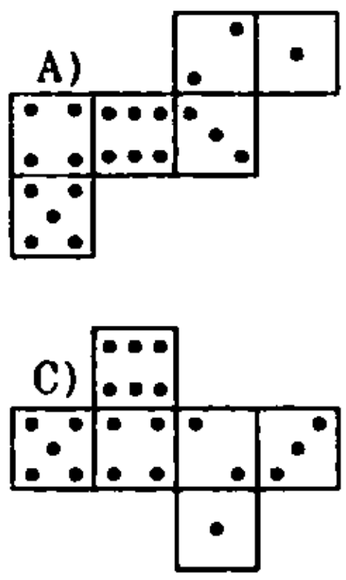
C)

D)

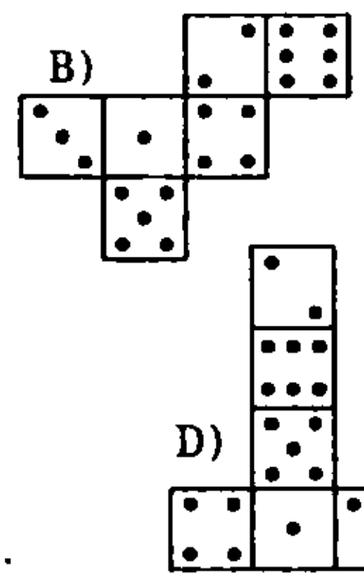


11.

A)

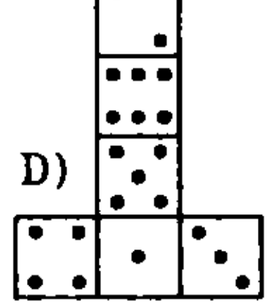


B)



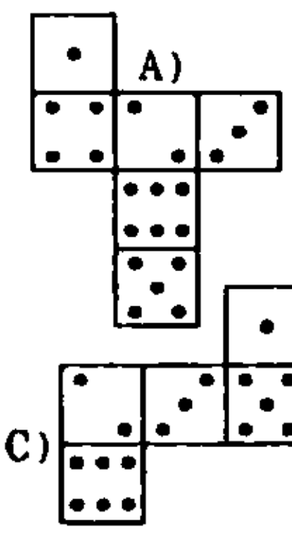
C)

D)

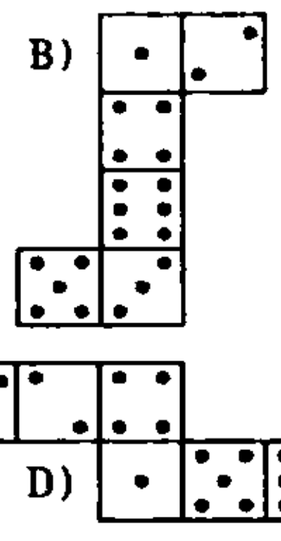


12.

A)

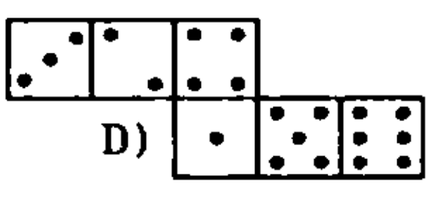


B)



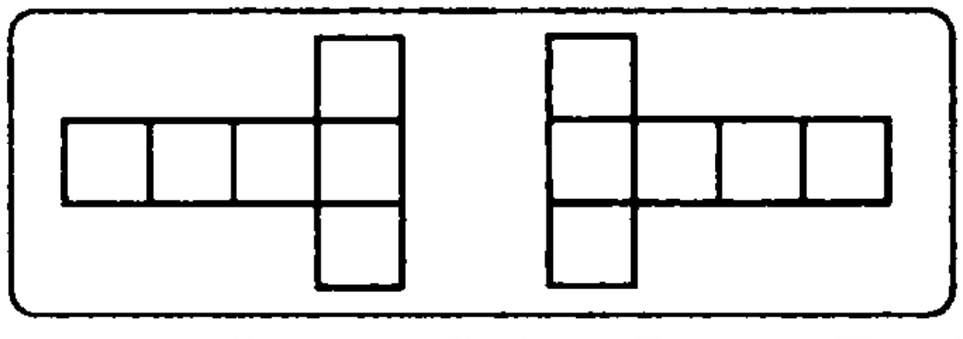
C)

D)



13. ¿De cuántas formas se puede desarrollar un cubo? La ilustración muestra una de las formas. No han de tomarse en cuenta las mismas forman en diferentes posiciones, u obtenidas por reflexión, como las mostradas que son iguales.

Cuenta sólo las formas diferentes.



A) 5 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

10.3 Simetría

Es muy probable que en algún momento de tu vida te hayas preguntado, mirándote al espejo, sobre cómo el espejo reproduce perfectamente la imagen de uno. Una vez que nos hemos acostumbrado al él, deja de llamarnos la atención.

Sin embargo, estoy seguro que hay algunas reflexiones al respecto que te llamarán la atención si observas tu imagen con mayor detenimiento. En primer lugar, la imagen que reproduce el espejo ¿es exactamente igual a uno?, pues cuando levantas la mano derecha la imagen levanta la mano izquierda, si te peinas con raya a la izquierda en el espejo apareces con raya a la derecha. Es decir, al observar tus rasgos en tu doble que aparece en el espejo, comprobarás que todos ellos están transpuestos . El espejo ha «cambiado» lo que es izquierda a la derecha.

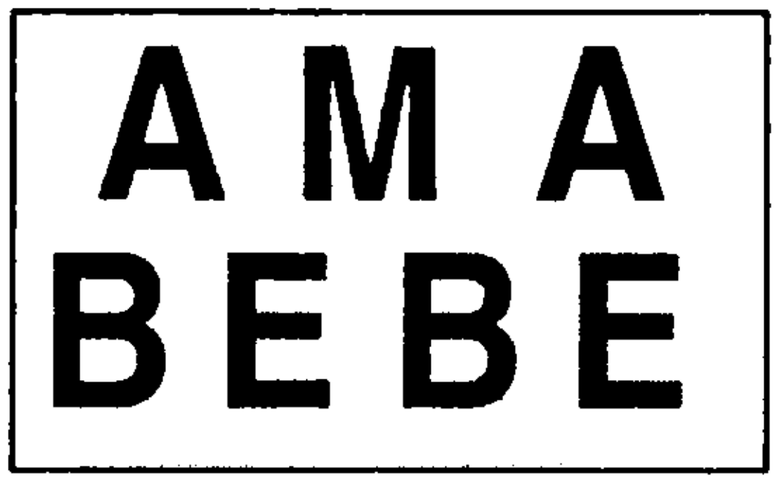
¿Por qué, sin embargo, no ha invertido los pies con la cabeza? Al acercar un libro al espejo las letras se leen de derecha a izquierda , pero mantienen su orientación vertical. ¿Cómo podemos explicar esto? ¿Por qué el espejo tiene preferencia por invertir el sentido derecha – izquierda, mas no el sentido arriba – abajo?

Si estas apreciaciones no son argumento suficiente para provocar tu curiosidad, te invito a que tomes una hoja de papel y escribas en ella, en letras grandes, las palabras AMA y BEBE tal cual la **fig.a**. Enseguida acércalo a un espejo y lee a través de él. Notarás que AMA no ha sufrido cambio alguno, mas BEBE no tiene sentido a menos que tuviéramos por regla leer de derecha a izquierda (**fig. b**). Ahora voltea el papel «cabeza abajo» y lee nuevamente a través del espejo. ¿Qué observas? ¿Podrías explicar las razones de este cambio? Habrás notado que AMA está «patas arriba», en cambio BEBE se lee perfectamente (**fig. c**)

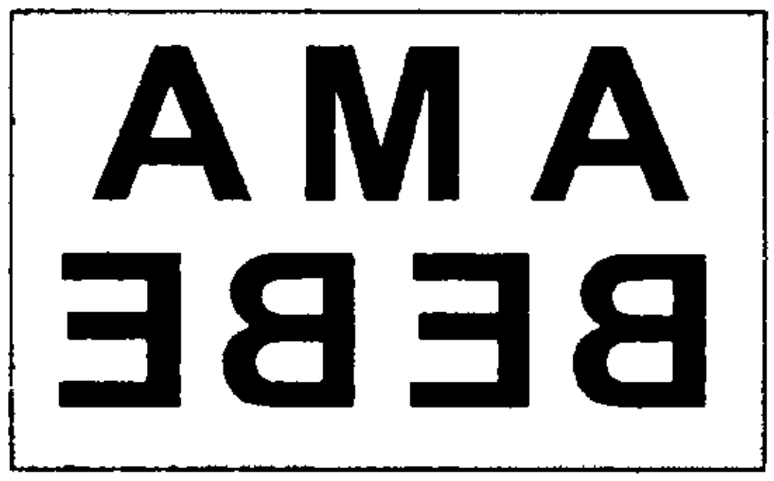
Por último, escribe en un papel los siguientes nombres: PABLO, OTO, KIKO y OIXIO, tal como muestra la fig.d.

Acércalo a un espejo y lee los nombres a través de él (tiene sentido el nombre si es posible leerlo tal como estamos acostumbrados, de izquierda a derecha) ¿Cuáles tienen sentido? Ahora voltea el papel y vuelve a leer por el espejo e identifica los nombres que tienen sentido. ¿Podrías **clasificar** los cuatro nombres según el resultado de esta experiencia?

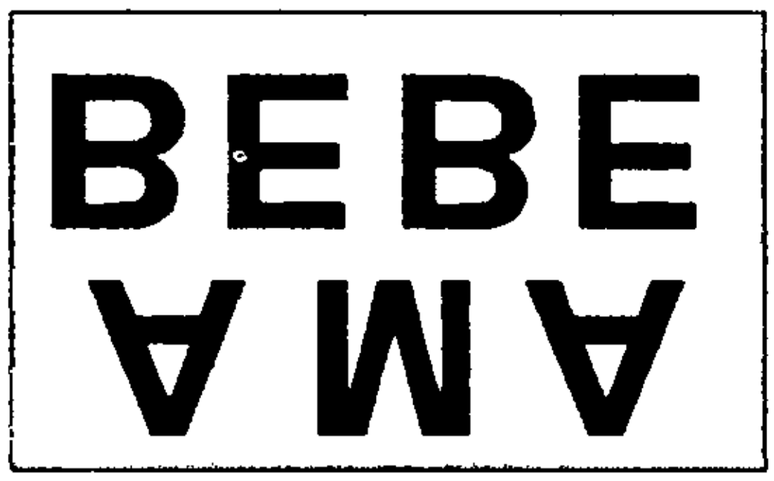
(a)



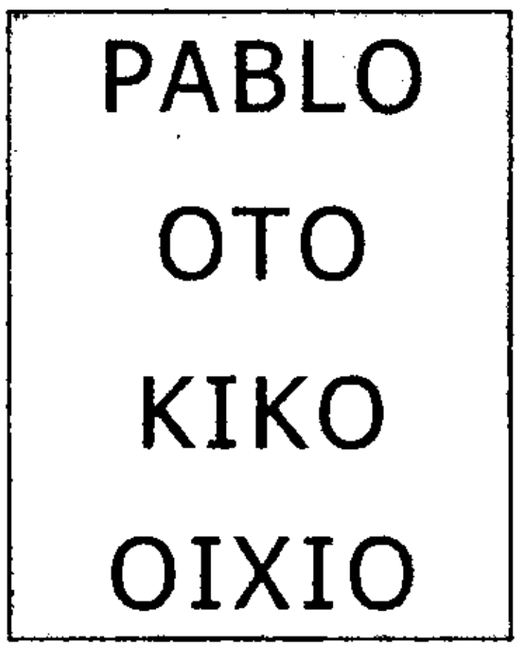
(b)



(c)



(d)



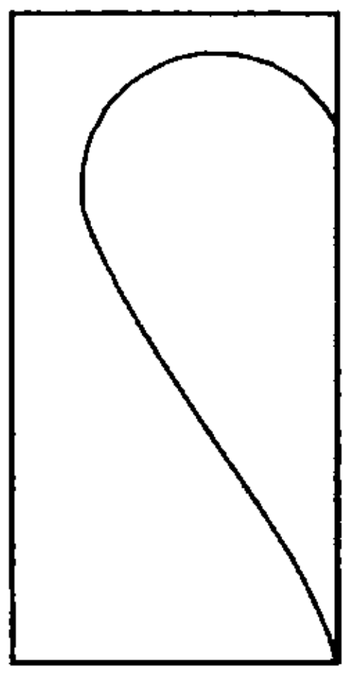
Lee este papel a través del espejo e identifica los nombres que tienen sentido. Repite lo mismo volteando el papel. Finalmente busca una explicación y clasifica los nombres según los resultados de la experiencia.

Si te pintas completamente la palma de la mano derecha y la pones sobre un papel, resultará la imagen de tu palma derecha. Esta imagen es igual a la que el espejo produce de la misma mano. Convengamos enseguida dar el nombre de IMAGEN ESPECULAR, a la imagen que el espejo produce de cualquier figura u objeto y una PAREJA ENANTIOMORFA, al par formado por el objeto y su imagen especular. Con estos términos, estamos listos para resolver las preguntas algo desconcertantes formuladas líneas arriba.

*Un caballo, frente a su **imagen especular**. Ambos forman una pareja enantiomorfa. ¿Cuál es el caballo y cuál es la imagen?*

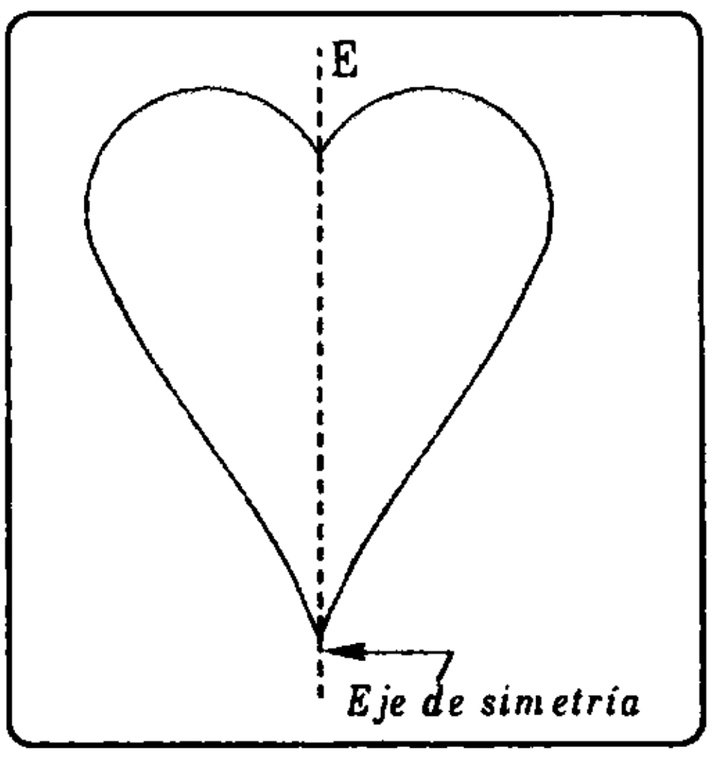
Antes de seguir adelante, quisiera advertirte que la explicación es muy sencilla y te la darás tu mismo(a), pero el objetivo que queremos alcanzar a través de estos párrafos, no es explicar los principios de la **simetría por reflexión**, ni la **simetría bilateral** del hombre y los animales, menos las simetría de la disposición de los átomos de un mineral que originan maravillosos cristales naturales, que son el «peldaño más alto de la estructura de la materia», tampoco la necesidad de la asimetría del sentido de giro de las roscas, los pernos o los diferentes objetos que son para diestros; ni mucho menos discutir sobre la simetría del universo para explicar las antipartículas o las partículas crono-retrógrados. ¡No! ¡De ninguna manera! Solamente quisiera que veas tu alrededor con «otros ojos», **los problemas aparentemente desconcertantes tienen soluciones sencillas y todo cuanto apreciamos tiene un porqué de su existencia.**

(a)



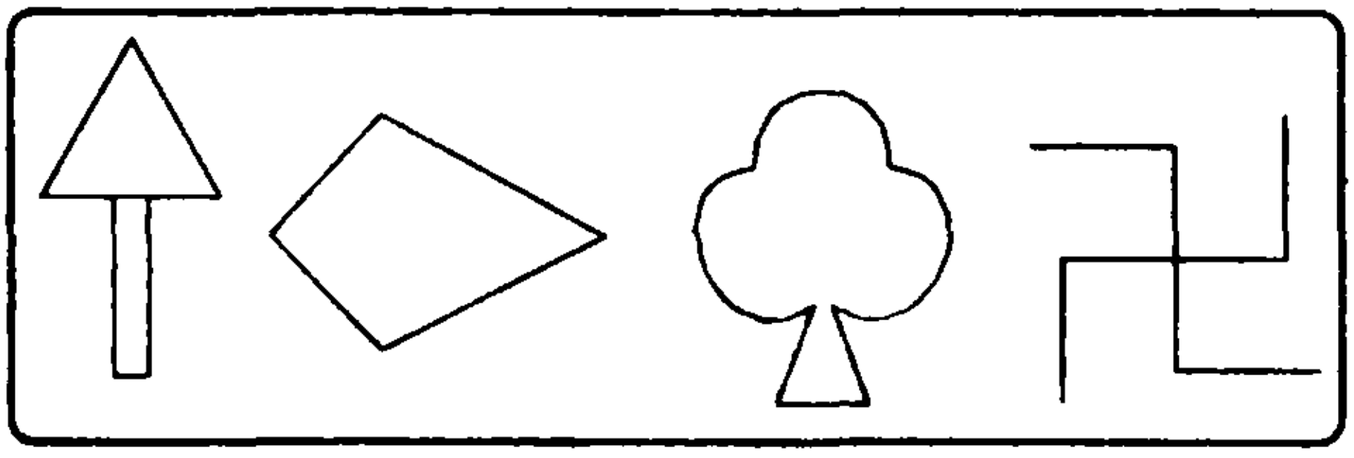
Nos hemos referido a la imagen especular de un objeto, como la imagen de él producida por el espejo, y que entre ambos, forman una pareja enantiomorfa. Sólo falta incorporar el término SIMETRÍA a nuestro conjunto de términos. Para ello dibuja en el borde derecho de un papel la mitad de un corazón Fig. (a) y has coincidir este borde con el plano del espejo y observa. Tu dibujo y su imagen especular forman la Fig. (b). Esta figura se dice que es SIMÉTRICA respecto a la línea E del espejo, el cual se denomina EJE DE SIMETRÍA. Puesto que en el papel el eje de simetría es vertical la figura es **simétrica respecto a un eje vertical.** ¿Podrías dibujar una figura simétrica respecto a un eje horizontal?

(b)

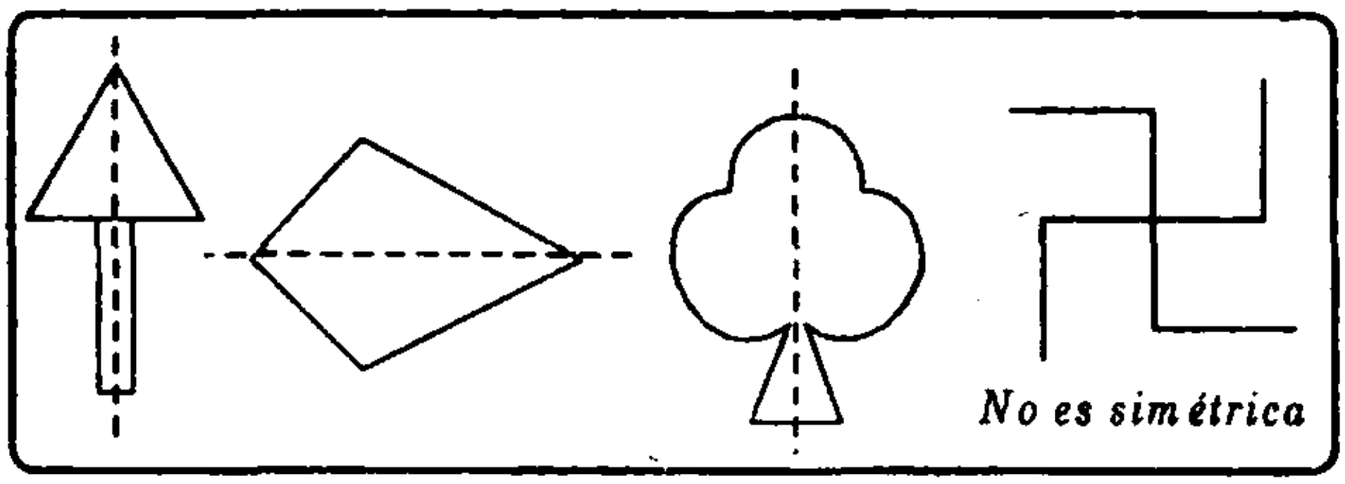


Problema 10

En cada una de las siguientes figuras identifica las que son simétricas y traza el eje de simetría.



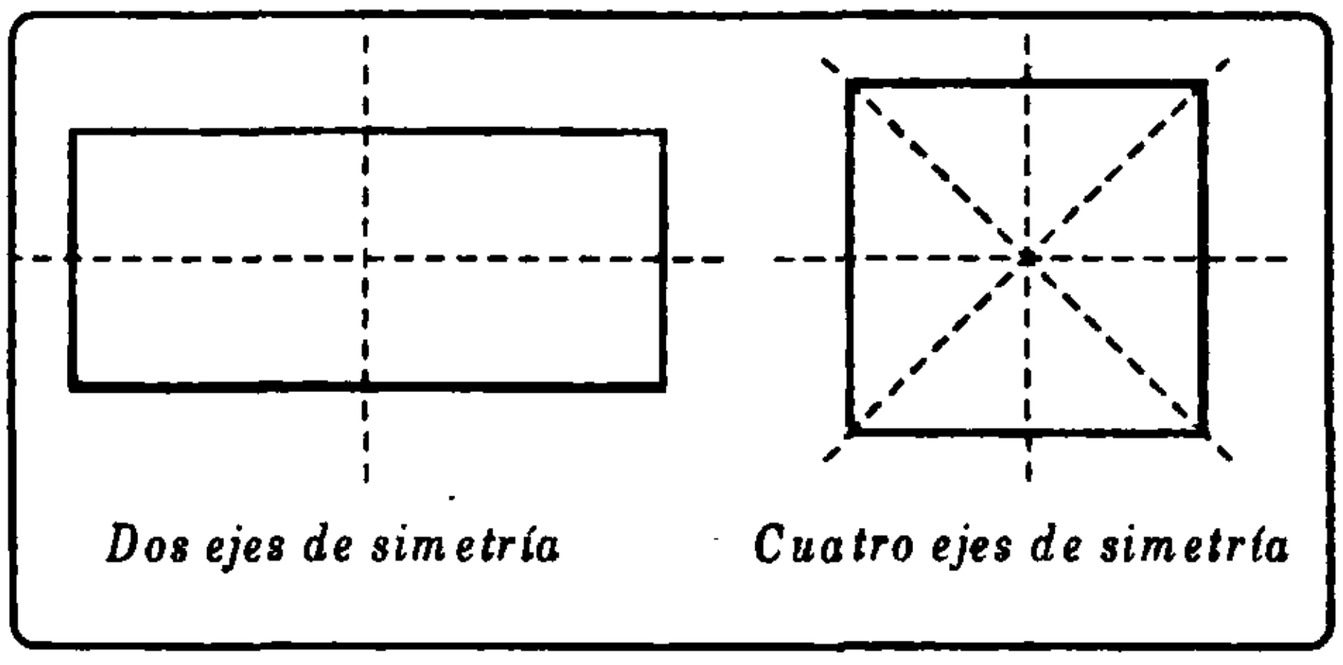
Resolución



Problema 11

¿Cuántos ejes de simetría tiene un rectángulo y cuántos, un cuadrado.?

Resolución



Hasta el momento hemos visto figuras simétricas planas (bidi mensionales). A continuación veamos objetos simétricos tridimensionales. Si cortamos una esfera mediante un plano que pasa por su centro, obtenemos dos hemisferios. Si cogemos uno de ellos y hacemos coincidir el plano de corte con el del espejo, se forma una esfera completa, en consecuencia, la esfera es simétrica

DIVERTIJO 2

Nada como una competencia tan sana como inventar figuras planas con el mayor número de ejes de simetría.

Todo empezó cuando el profesor pidió a Martín dibujar una figura plana con el mayor número de ejes de simetría. Martín dibujó una figura con 8 ejes de simetría. Se paró Juliana é hizo un dibujo con 10 ejes de simetría. Así desfilaron varios estudiantes incrementando en cada dibujo figuras con más ejes de simetría.

No faltan siempre aquellos que gustan malograr los más bonitos juegos matemáticos, siempre están en algún lugar del salón o el colegio, buscando dar la solución "final" a un problema. En efecto, en este juego tampoco podía faltar uno de estos jovencitos. Toñito, se levantó de su carpeta, caminó lentamente y con pasos seguros ante la mirada atónita de sus compañeros, se acercó a la pizarra, cogió el arma, digo, la tiza y dibujó una figura plana con infinitos ejes de simetría. ¡A dios juego!

¿Qué figura dibujó Toñito?

respecto al plano del espejo, para el que usaremos el nombre de PLANO DE SIMETRÍA.

Gran número de objetos que usamos son simétricos respecto a un plano vertical. Por ejemplo la silla, el maletín, los catedrales, nosotros mismos somos simétricos y también la mayoría de los animales.

Ahora contestemos a la pregunta: ¿porqué el espejo "cambia" la derecha por la izquierda?. Sucede que, como somos bilateralmente simétricos, nuestras manos forman una pareja enantiomorfa, la mano derecha es la imagen especular de la izquierda. Por eso, cuando acercas tu mano izquierda al espejo, del otro lado se acerca su imagen especular, que tiene la forma de la mano derecha.

Es decir, un espejo, "cuando estás frente a él no muestra en absoluto preferencia entre derecha e izquierda, entre abajo y arriba. El espejo *invierte* la figura punto por punto, a lo largo de la línea perpendicular a él. Tal inversión transforma automáticamente una figura asimétrica en su enantiomorfo. A causa de que somos bilateralmente simétricos, nos parece conveniente describir este proceso como una inversión derecha izquierda. Pero se trata sólo de una manera de hablar, una convención en el uso de las palabras" (2).

¿Cómo se explica lo de las palabras leídas a través del espejo?

¿Qué diferencia, respecto a la simetría, encuentras entre las letras:

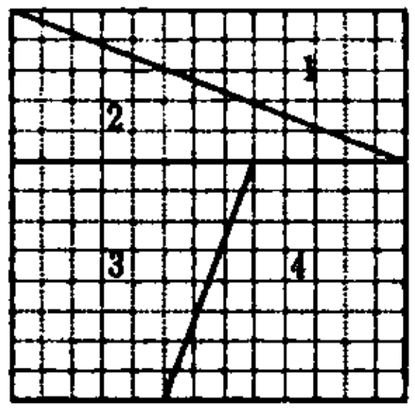
Problema 12

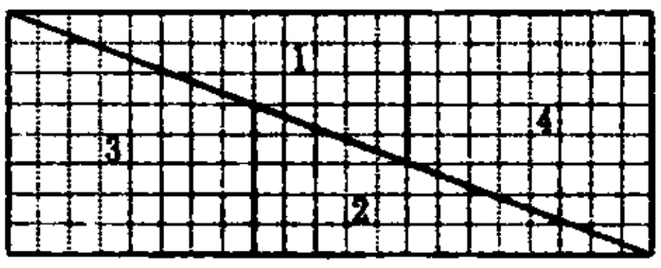
¿Qué tipo de letras son los que se leen perfectamente en el espejo?

(2) *Martín Gardner. Izquierda y derecha en el cosmos p.22*

DIVERTIJO 3

Toma un papel cuadriculado y dibuja un cuadrado de 13 por 13 cuadraditos, forma un rompecabezas cortando por las líneas como se muestran en la ilustración de la izquierda. En seguida arma el rompecabezas tal como se indica en el dibujo de la derecha. Compara las áreas y busca una explicación.





DIVERTIJO 4

Estas en una competencia de "patear" un balón pretendiendo acertar en un poste. Te dan en dos opciones: 1° Patear un balón de 30 cm de diámetro contra un poste de 10 cm de grueso (diámetro) 2° Chutar un balón de 20 cm de diámetro contra un poste de 15 cm de grueso. ¿Cuál escoges?

A) Primera opción

B) Segunda opción

C) Tercera opción

D) Cualquiera de las dos

E) No sé patear.

Respuesta

Son las simétricas respecto al eje vertical. Ejmplos:

A, M, T, Y, H, etc.

Problema 13

¿Qué tipo de letras no tiene sentido al leerlo a través del espejo, pero al voltear el papel, frente al espejo se leen perfectamente a través de él?

Respuesta

Son las letras simétricas respecto a un eje horizontal.

Ejemplos: B, D, E, K, H, X, etc.

Problema 14

¿Qué tipo de letras son las que se leen perfectamente a través del espejo, sin importar si frente al espejo ponemos el papel de pie o de cabeza?

Respuesta

Son las letras simétricas respecto a los dos ejes vertical y horizontal.

Ejemplos: H, I, O y X.

Problema 15

¿Cuáles de las siguientes palabras se leerán perfectamente a través del espejo, tal cual están escritos verticalmente?

Y	D	M	P	M
A	E	O	I	O
M	D	T	L	N
A	O	O	O	O
H			T	
A			O	

Respuesta

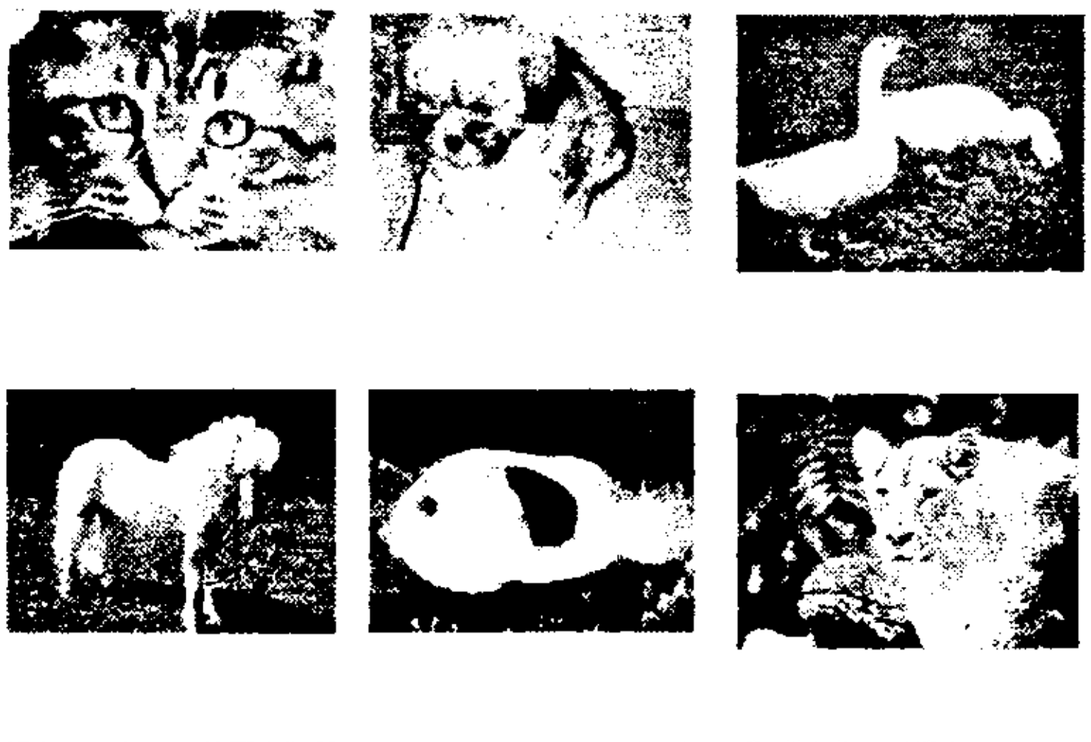
No se alterarán al ser expuestos al espejo, aquellas palabras que constan sólo de letras simétricos respecto a el eje vertical. Estas con YAMAHA y MOTO.

Problema 16

Expón las palabras, MOTIVO, BECO, DEDO, OTO, DEBE, MICA, CHICA y BEBIDO frente al espejo, pero con el libro volteado, ¿qué palabras se leerán correctamente a través del espejo?

Respuesta

Las palabras que constan únicamente de letras simétricas respeto a un eje horizontal. Estas son: BECO, DEDO, DEBE y DEBIDO.



La mayoría de los animales tienen simetría bilateral.

10.3.1. Palíndromos

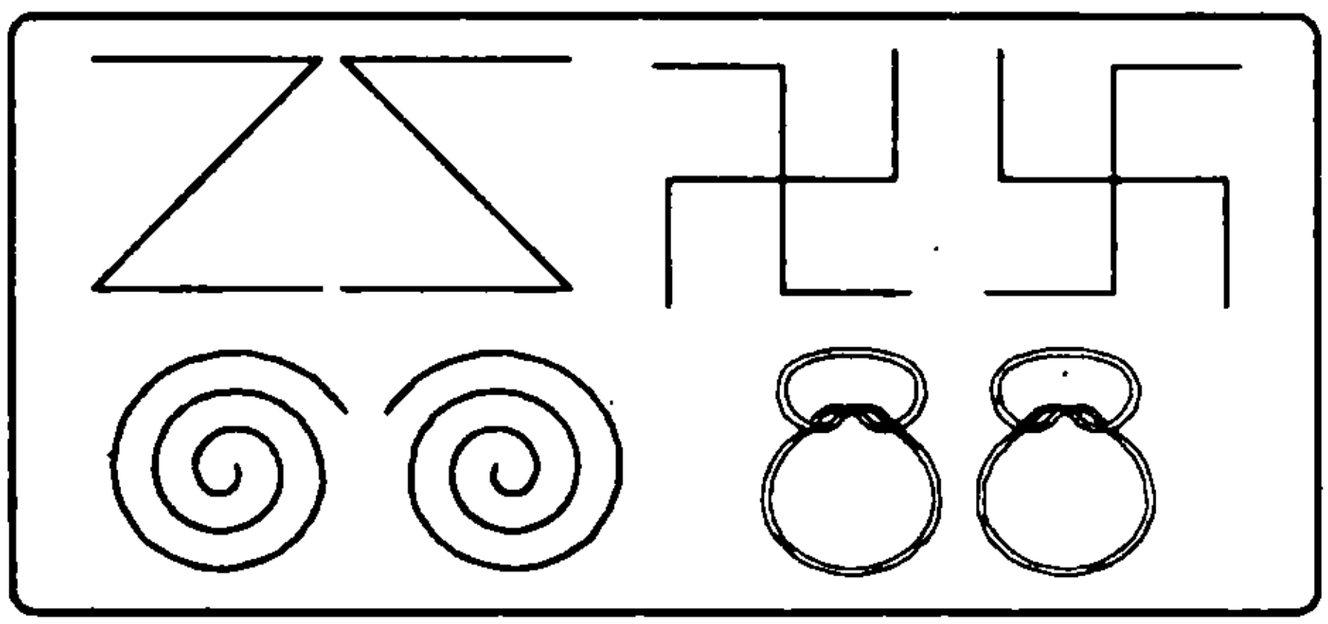
Hemos visto que las palabras AMA y OTO se leen correctamente al reflejarlo en un espejo, debido a la "simetría vertical" de sus letras y de toda la palabra. ¿Sucede lo mismo con la palabra **RADAR**? Escríbelo en un papel y refléjalo en el espejo, notarás que aparece **ЯADAЯ**. Las letras R y D no tienen sentido a menos que tuviéramos por costumbre leer de derecha a izquierda.

Sin embargo, si dejamos de lado la forma de las letras y consideramos una palabra como una sucesión de letras ordenadas, a lo largo de una línea recta, leeríamos RADAR. Visto de otro ángulo, si aceptamos leer de derecha a izquierda sin tener en cuenta la forma de las letras mas que su ubicación en la palabra, la palabra RADAR se leería lo mismo, tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. Este tipo de palabras se denominan PALÍNDROMAS O PALINDRÓMICAS. Son muchas las palabras palindrómicas como, RADAR, ANA, OSO, ASA, RODADOR, SOMOS incluso oraciones como ANITA LAVA LA TINA, etc.

Un numeral palindrómico, o capicúa, es un numeral que al ser leído de derecha a izquierda sigue siendo el mismo, como 343; 42124; 666; 75357; etc. El último año palindrómico fue 1991 y el próximo será 2002

10.3.2. Asimetría

Si bien la simetría refleja equidad, belleza, armonía, unidad de contrarios, etc, también la asimetría tiene lo suyo. Observa las siguientes parejas de figuras:



Figuras asimétricas, cada una con su pareja enantiomorfo. Si una de ellas la consideremos "derecha" la pareja correspondiente sería su "izquierda".

CURIOSIDAD

Una palabra "somordnilap" (palíndromos leída al revés) es aquella que al invertirla o leerla al revés se convierten en otra palabra que tiene sentido, como AMOR (Roma), AZAR (raza), etc.

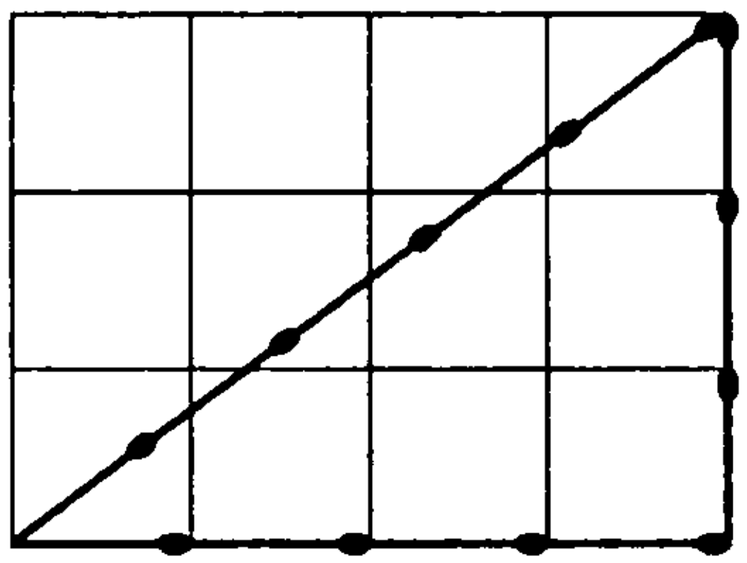
DIVERTIJOS 5

Con 12 cerillas se ha construido un triángulo rectángulo de 3; 4 y 5 cerillas de lado. Obviamente el área de este triángulo es igual a la mitad del rectángulo de 3 por 4, es decir 6 "cerillas cuadradas".

a) Mueve dos cerillas y forma una figura con un área de 5 "cerillas cuadradas"

b) Mueve tres cerillas y forma una figura con un área de 4 "cerillas cuadradas"

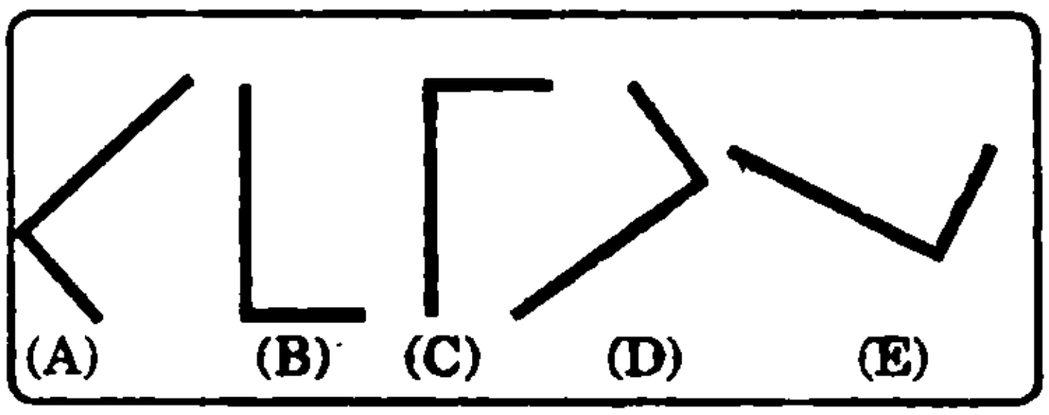
c) Mueve cuatro cerillas y forma una figura con un área de tres "cerillas cuadradas"



Cada figura por separada es asimétrica, viendo por pares, una es imagen especular de la otra y entre ambas forman una pareja enantiomorfa.

Problema 16

Del conjunto de gráficos, señala aquella figura que no concuerda con las demás.

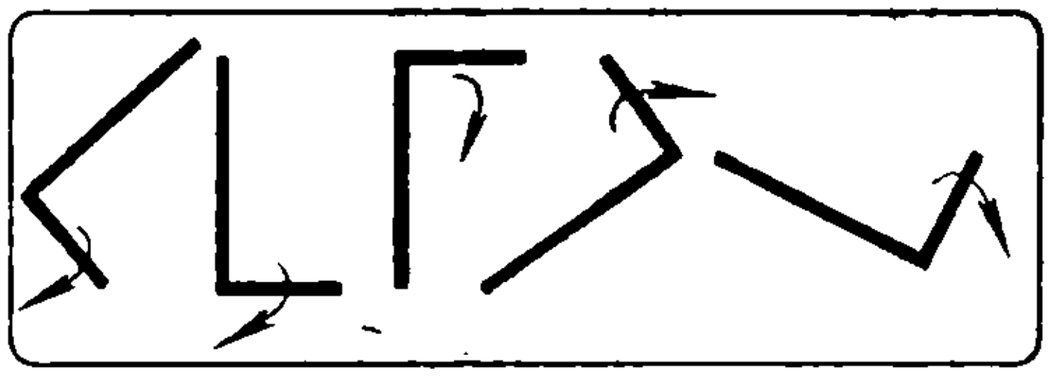


Resolución

Optemos por considerarlas a cada una como una escuadra asimétrica (un lado más largo que el otro) hecha de madera.

Consideremos además que cada escuadra está clavada en su vértice a una mesa horizontal, de modo que pueden girar libremente en torno a su vértice.

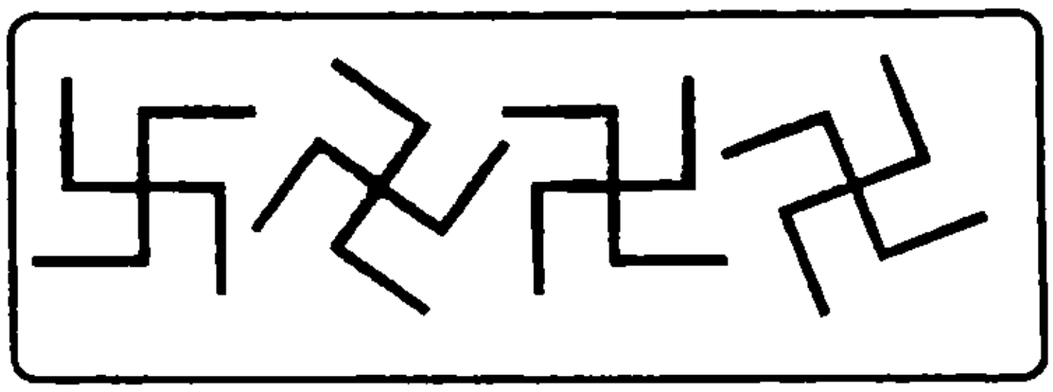
Poniendo un dedo en el interior de la escuadra y empujando el lado menor, lograremos hacer girar en el sentido de las agujas del reloj a todas las escuadras excepto la C, por ser enantiomorfa de las demás.



Rpta.: C

Problema 17

Los nacis escogieron por símbolo la "esvástica". Una de las que se muestran en esta secuencia de figuras es la de los nacis. ¿Cómo reconocerla? Es muy fácil; es aquella que no concuerda con las demás. ¿Puedes señalarla?

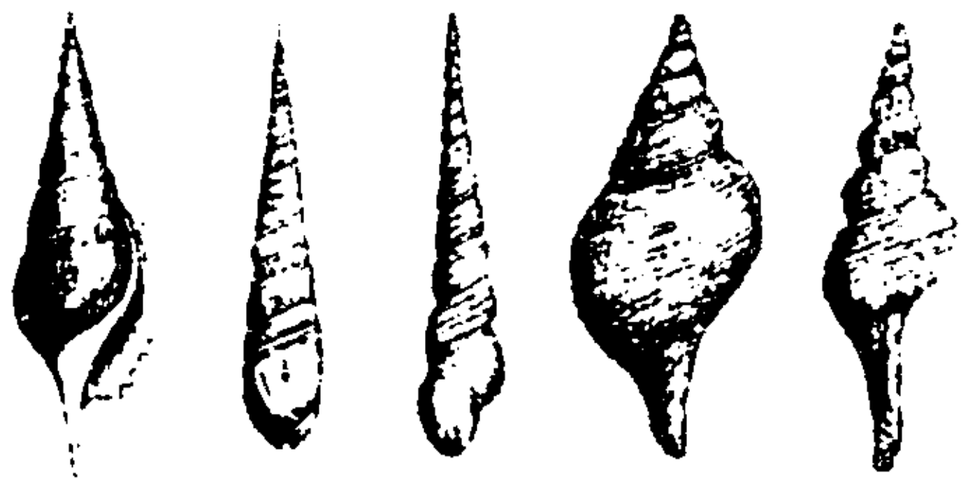


Resolución

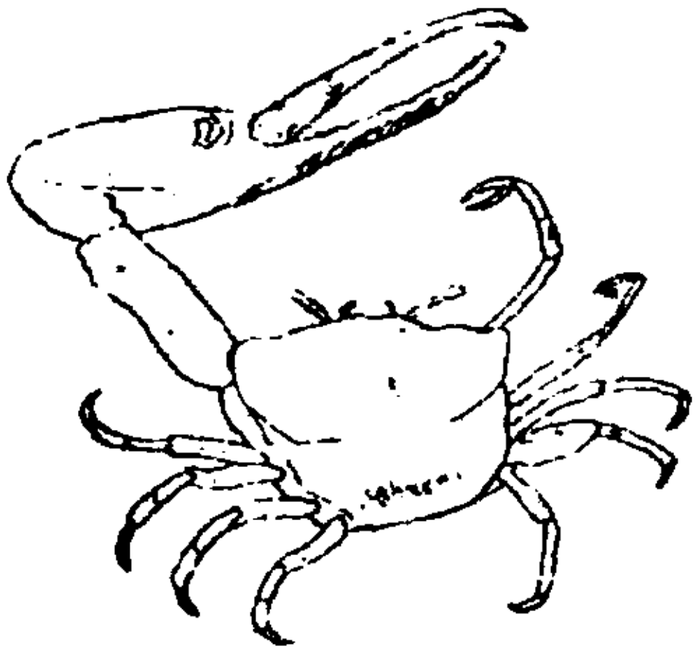
Tú puedes "inventar" tu propio método de diferenciar las figuras basado en el criterio que te sugiero en la resolución del problema anterior. En este caso la respuesta es la A.

Rpta.: A

Algunos animales asimétricos



Conchas de moluscos dextras, enrrolladas hacia la derecha



El cangrejo violinista con pinza a la izquierda

10.4. TOPOLOGIA

10.4.1 ¿Qué es la topología

Quizá, alguna vez hayas intentado dibujar la figura 1 de un solo trazo y sin levantar la punta del lápiz del papel, sin éxito. Esta figura se conoce como *"la firma del diablo"*. Problema similar, fue planteada a Leonard Euler en 1735. El mismo la enuncia de esta manera: "En Konigsberg hay una isla que se llama Kneiphof. El río que la baña se divide en dos brazos (ver fig. 2), sobre las cuales hay tendidos 7 puentes. ¿Puede cruzarse todos estos puentes sin pasar por ninguno más de una vez? Hay quienes afirman que es posible. Otros por el contrario, consideran que es imposible cumplir esta condición".

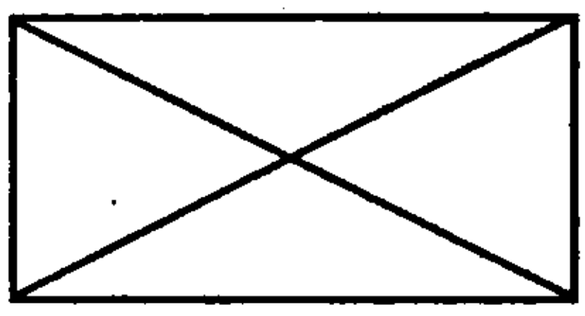


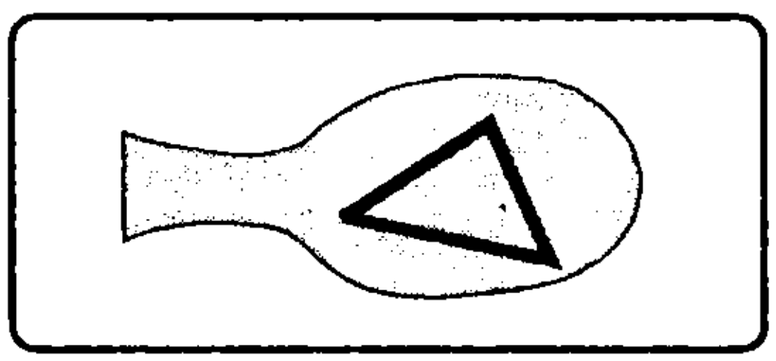
Fig.1

¿Qué opinas?

A raíz de este problema, Euler dio las primeras pautas a una nueva disciplina, que hoy cobra auge en la matemática contemporánea: LA TOPOLOGÍA.

Fig. 2

Dibuja un triángulo en la superficie de un globo antes de inflarlo.



Enseguida infla el globo. ¿Qué sucede con el triángulo? Pues, empieza a crecer. Sin embargo, después de inflar el globo, dos puntos vecinos cualesquiera del triángulo, siguen siendo vecinos. El triángulo ha sufrido una **transformación continua.**

La Topología, es la "ciencia" que estudia las propiedades de las figuras geométricas, propiedades que son invariables durante las transformaciones continuas.

Problema 1

¿Topológicamente son iguales las siguientes figuras?

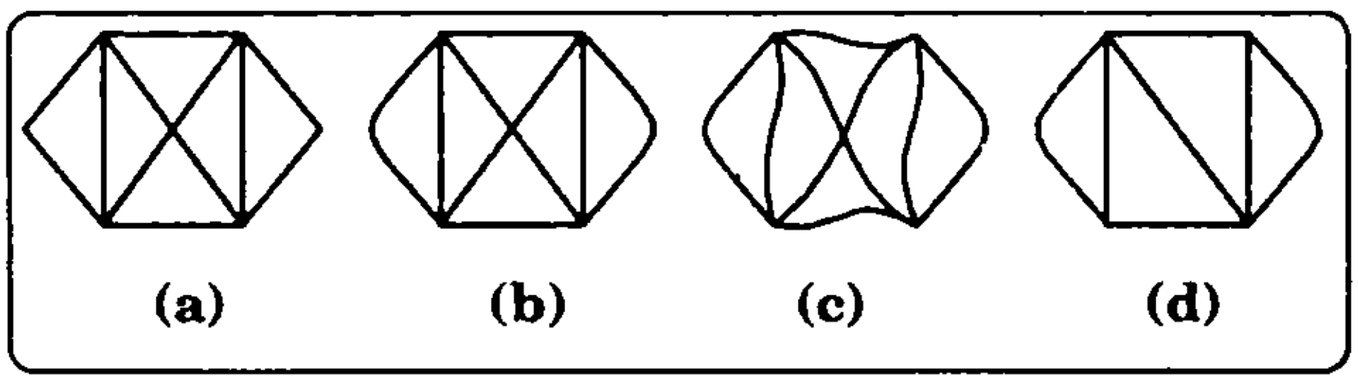


Fig. 3

Figuras topológicamente iguales

Topológicamente, una rosquilla es igual que una taza.

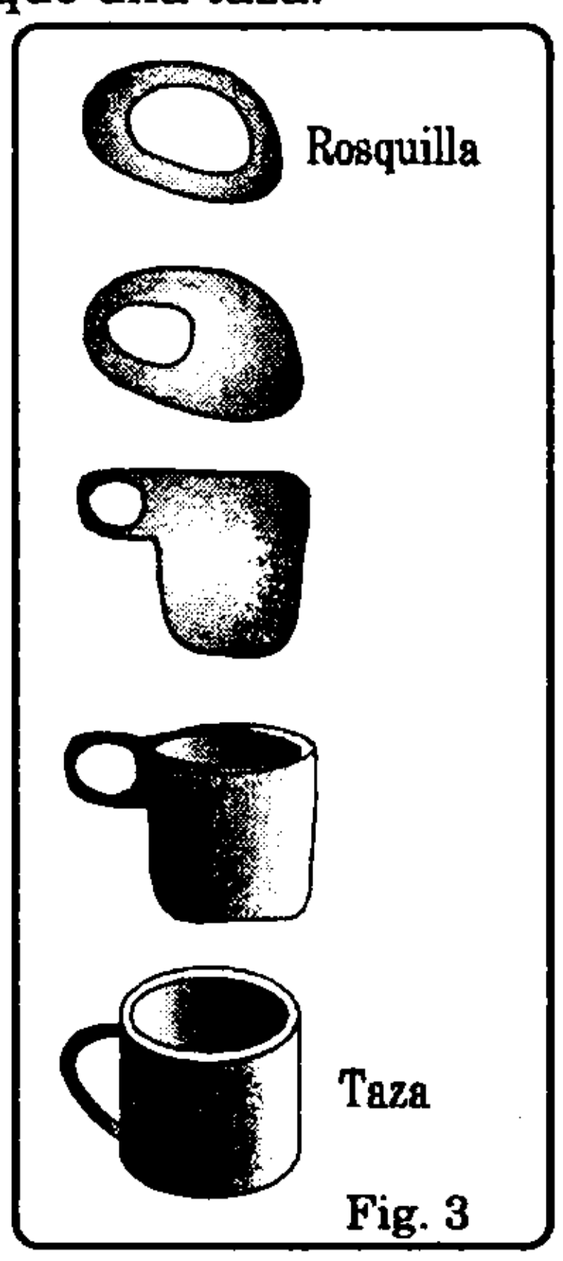


Fig. 3

Resolución

Imagínate que la figura (a) está hecha de hilos de goma (liga) con 4 nudos en los vértices del cuadrado. ¿Es posible convertir esta figura, sin agregar ni quitar nudos, en las figuras (b); (c) y (d)?

Sólo es posible en (b) y (c), pero no en (d). Por tanto las figuras (a), (b) y (c) son topológicamente iguales

Problema 2

¿Cuáles de las siguientes figuras se pueden dibujar sin levantar del papel la punta del lápiz ni pasar dos veces por la misma línea?

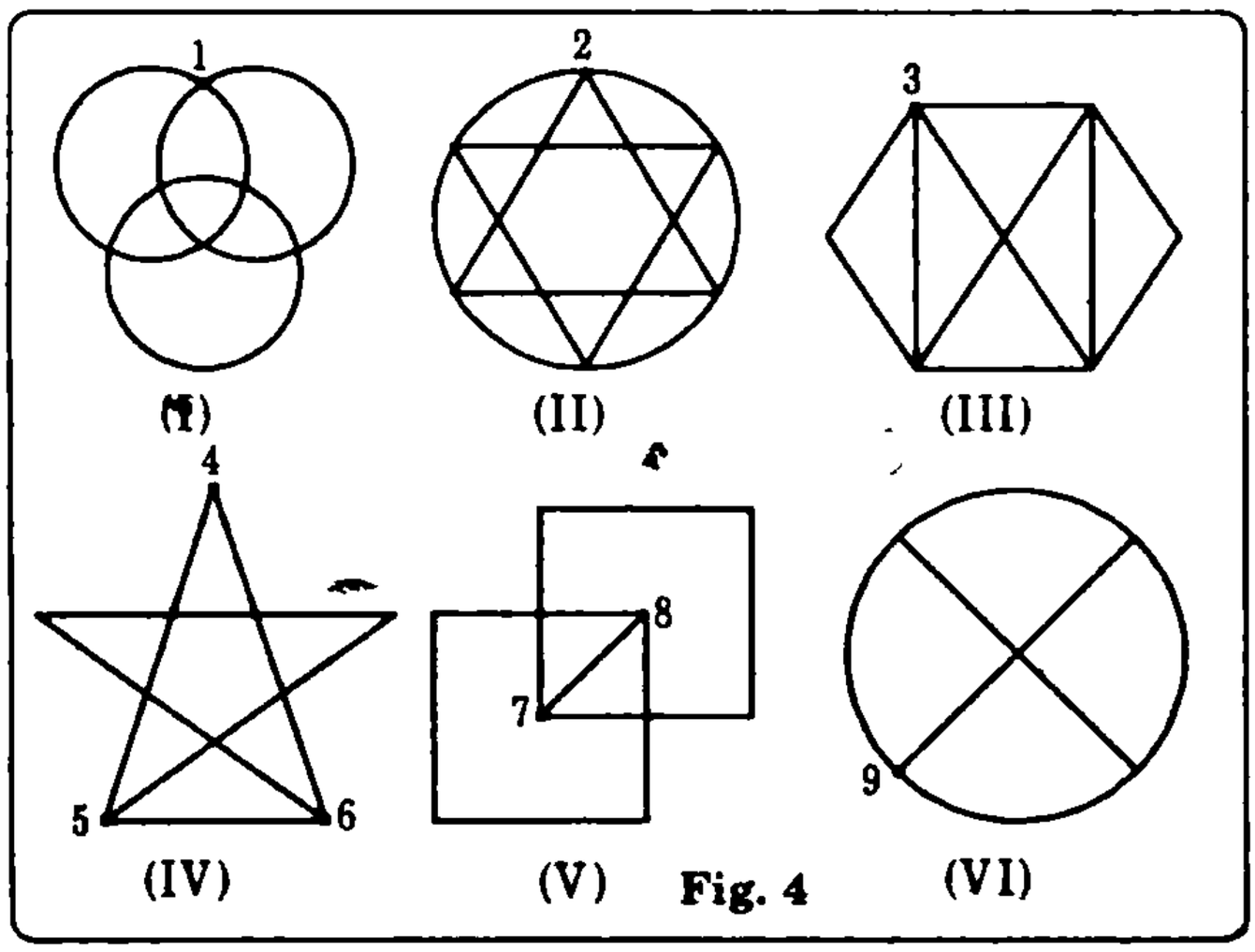


Fig. 4

Resolución

¿Cuáles te han "salido"? cuando logras dibujar una figura en las condiciones propuestas, puedes estar seguro de que esa figura es posible "dibujarla". Pero cuando no puedes "dibujarla" ¿puedes asegurar que efectivamente es imposible?

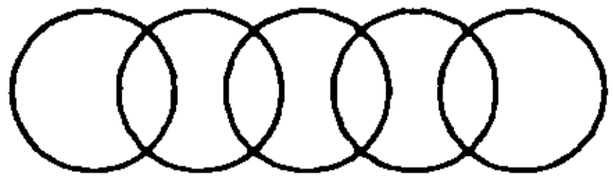
Aquí cabe dos posibilidades: Que en realidad la figura es imposible de "dibujar" o que la figura es posible de "dibujarla" pero que nosotros no la podemos.

¿Cómo asegurarnos sobre la imposibilidad de dibujar una figura bajo las reglas enunciadas?. Esto mismo se preguntó Euler hace más de 260 años, ante el problema de los puentes Konigsberg. Veamos cómo lo resolvió.

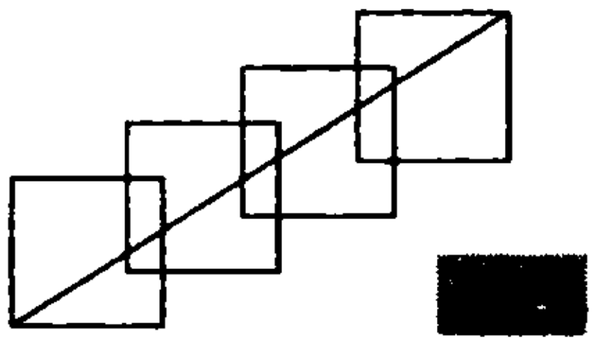
Ejercicios

Cuáles de las siguientes figuras se puede dibujar, sin levantar el lápiz del papel, ni pasar dos veces por la misma línea? (Indicar Sí o No)

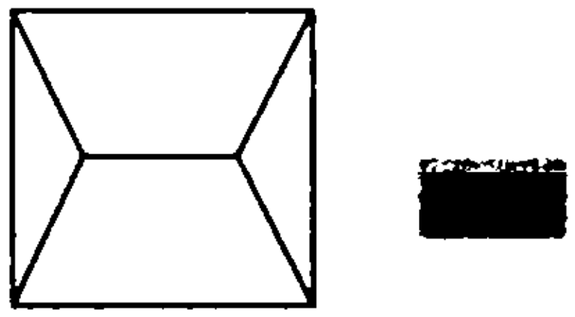
a)



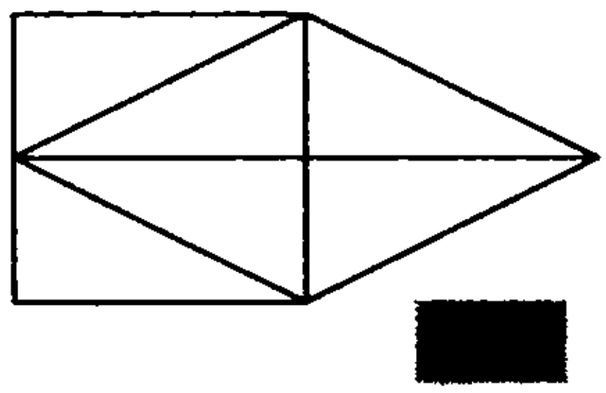
b)



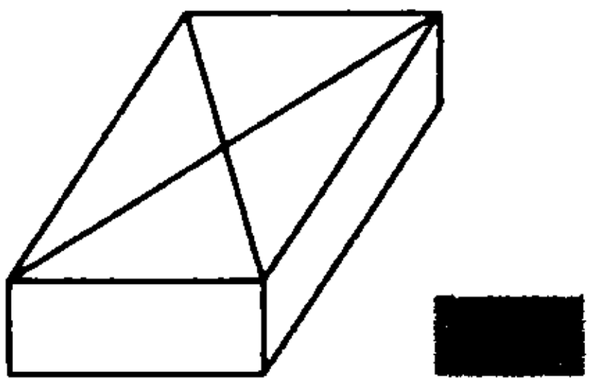
c)



d)



e)



a) Sí; b) Sí; c) No; d) Sí; e) Sí

***Punto par*:** Llamemos punto par aquel donde convergen un número par de líneas; puntos 1; 2; 3; y 4 de la fig. 4 por ejemplo

Punto impar: Llamamos así al punto en el cual congerven un número impar de líneas; puntos 5; 6; 7; 8 y 9, de la fig. 4, por ejemplo.

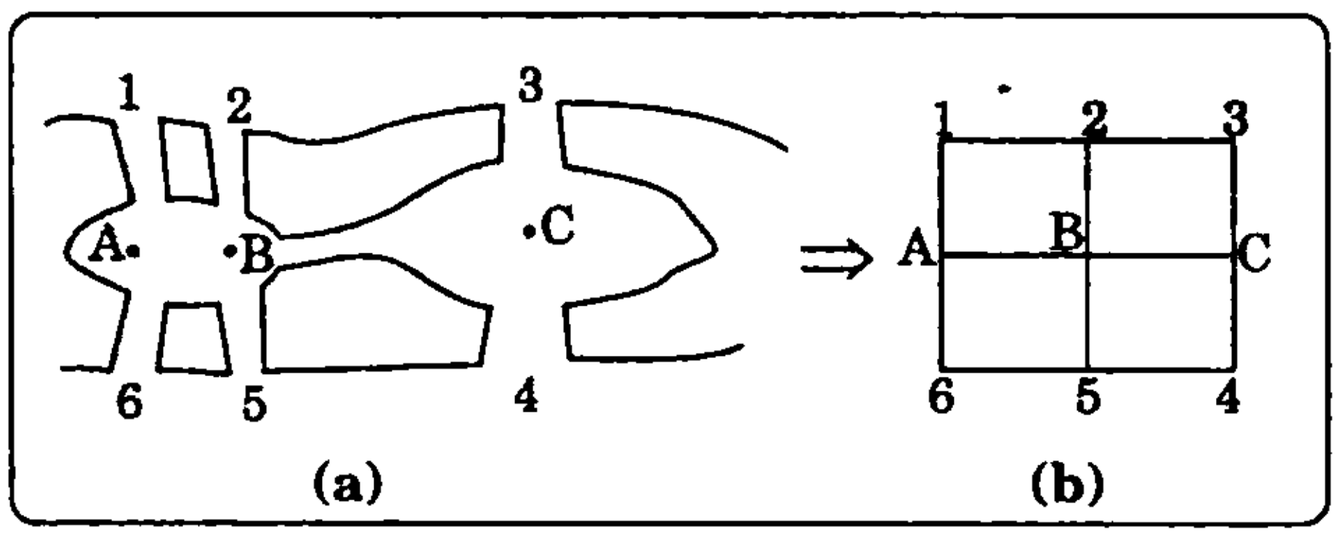
***Teoremas de Euler*:** Una figura se puede dibujar de un solo trazo y sin pasar dos veces por la misma línea, si **todos los puntos son pares** (casos I, II y III de la fig. 4) o si tiene **a lo más dos puntos impares** (casos IV y V de la fig 4), en este caso, siempre que se empiece de **uno de los puntos impares**. Si tiene más de 2 puntos impares, es imposible dibujarla bajo las pautas ya indicadas. ¿Podrías proponer la demostración de este teorema?

Problema 3

Con estas pautas, ¿Puedes dar respuesta al problema de "los puentes de Konigsberg"?

Resolución

Mediante una **transformación topológica**, los caminos de la figura (a), se pueden representar mediante la figura (b).



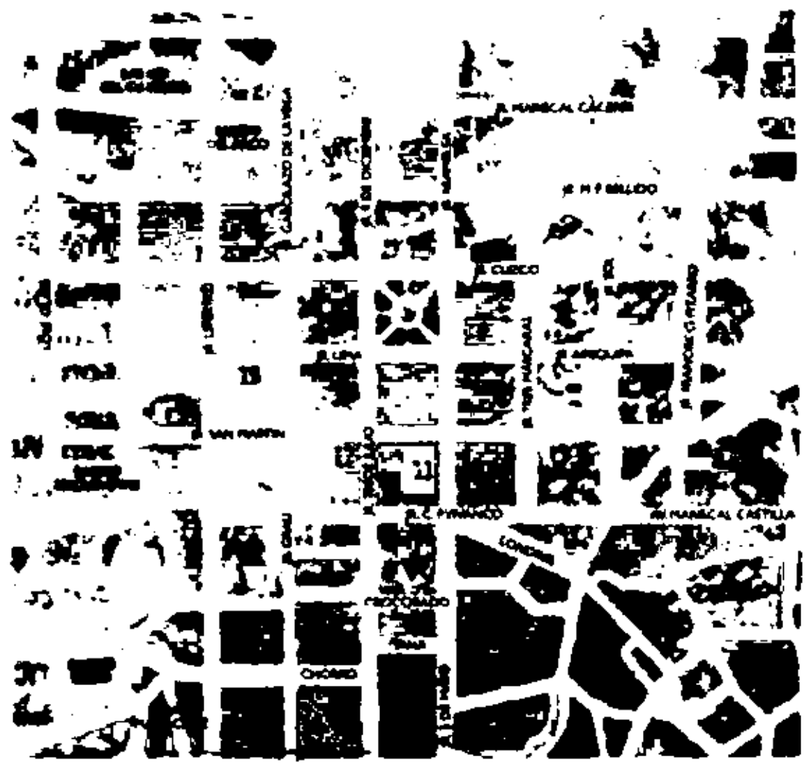
Puesto que la figura (b) tiene 4 puntos impares (A, C, 2 y 5) no es posible dibujarlo de un solo trazo. Por tanto, no es posible recorrer todos los puentes de Konigsberg, de una sola vez.

Problema 4

Con un alambre de 60 cm de longitud se construyó un cubo. Una arañita empieza a recorrer, a partir de uno de los vértices, todas las aristas del cubo. Se pide el tiempo mínimo requerido para ello, sabiendo que la arañita se desplaza con una rapidez constante de 5 cm/s.

COMENTARIO

Estos teoremas de Euler, se estudian actualmente en la teoría de grafos. Esta teoría tiene una gran aplicación, por ejemplo, en el diseño de cañerías de una ciudad (grafo dirigido), el sentido del tráfico en las calles, ventilación subterránea en minas, etc.



COMENTARIO

Una superficie asombrosa

La banda de Moebius, cuyo nombre se debe al matemático alemán August Ferdinand Moebius, que la creó en 1858, es la superficie más simple posible de una sola cara. Esta superficie se puede construir a partir de una tira rectangular de papel, uniendo sus dos extremos después de haber girado uno de ellos 180°. La característica principal de esta figura es el tener una única cara. Una hormiga que caminara por cualquiera de las dos caras —interior o exterior– de un anillo normal de papel (obteniendo con la unión de los dos extremos de una tira de papel sin girar ninguna de ellos) volvería al punto de partida después de haber dado una vuelta completa. En cambio una hormiga que caminase por una banda de Moebius recorrería la su-

Resolución

¿Has resuelto el problema? En tal caso, ¿Cuál es tu respuesta?. Si tu respuesta es 15, pásate al siguiente problema.

Cada arista del cubo mide 60÷12 = 5 cm. Por tanto la arañita recorre cada arista en un segundo.

Si pudiera recorrer todas las aristas de una sola vez, la respuesta sería 12 s; pero en realidad, la arañita repite 3 aristas, entonces se demora 15 s

Rpta.: 15 segundos

10.4.2. Adentro o fuera

Problema 5

Herminio ha dibujado en la pizarra una curva simple cerrada y dos puntos A y B. Más tarde, el maestro de geografía pegó sendos mapas en la pizarra, de modo que apenas se ve una parte del dibujo de Herminio. Si el punto A está dentro de la curva cerrada. El punto B ¿está adentro o está afuera?

Resolución

Entendemos por curva simple cerrada, aquella curva unida en los extremos y que no se cruza a sí misma.

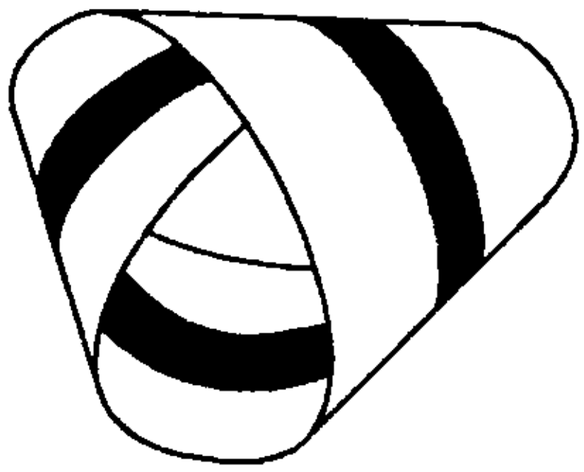
Cualquier curva simple cerrada divide a la superficie del plano en dos regiones, un adentro y un afuera (Teorema de Jordan).

Todas las regiones de "adentro" están separadas por un número par de líneas. Igualmente, todas las regiones de "afuera".

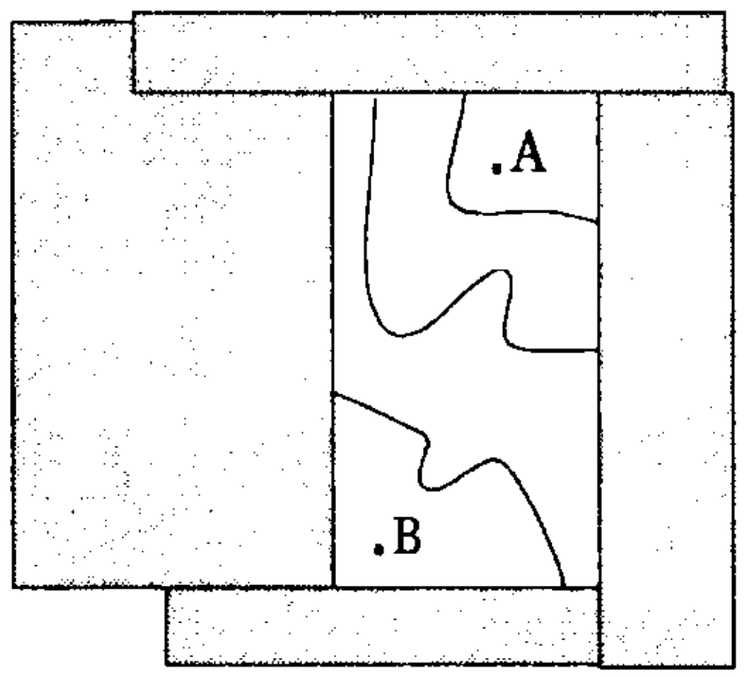
En consecuencia, para determinar si dos puntos pertenecen a la misma región basta contar el número de líneas que los separa: Si es par, ambos pertenecen ya sea adentro o fuera; si es impar uno está adentro y otro afuera.

A y B están separados por 3 (impar) de líneas. Entonces, si A, está adentro, B está afuera.

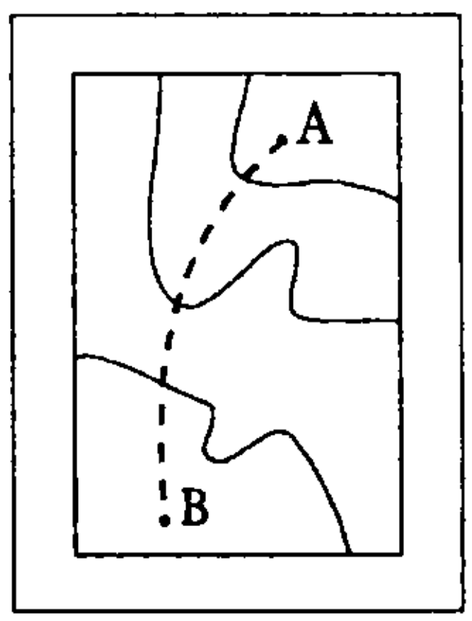
perficie completa del papel, pasando al cabo de una vuelta por debajo del punto de partida, para volver a él después de haber dado otra vuelta. La prueba



de que la banda de Moebius tiene un único borde se consigue pasando un dedo a lo largo del borde, ya que se llegará al punto de partida sólo después de haber tocado todos los puntos del borde.



Afuera

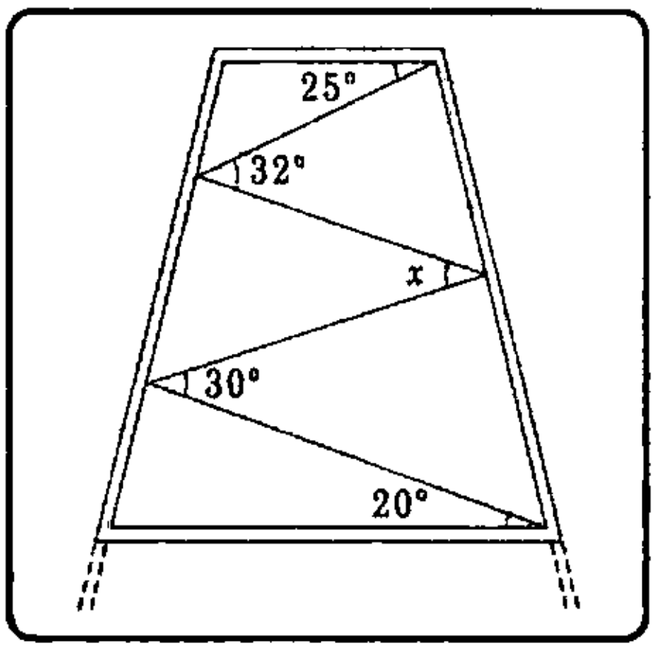


10. 5. Rectas, ángulos y triángulos

10. 5. 1 Angulos entre rectas paralelas y secantes

Problema 1

El ingeniero que ha diseñado una torre de alta tensión se ha olvidado de poner el ángulo que forman los refuerzos de la parte alta de la torre ¿Puedes completarlo?



Resolución

Si x es el ángulo que falta, se debe verificar que:

$25° + x + 20 = 32° + 30°$

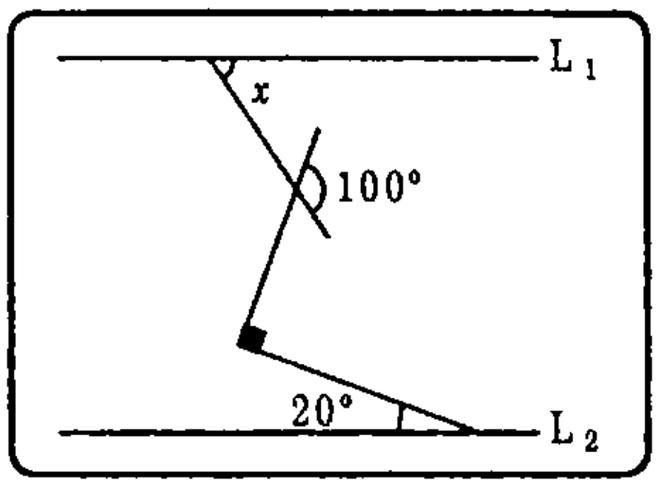
$x = 17°$

Rpta.: 17°

Problema 2

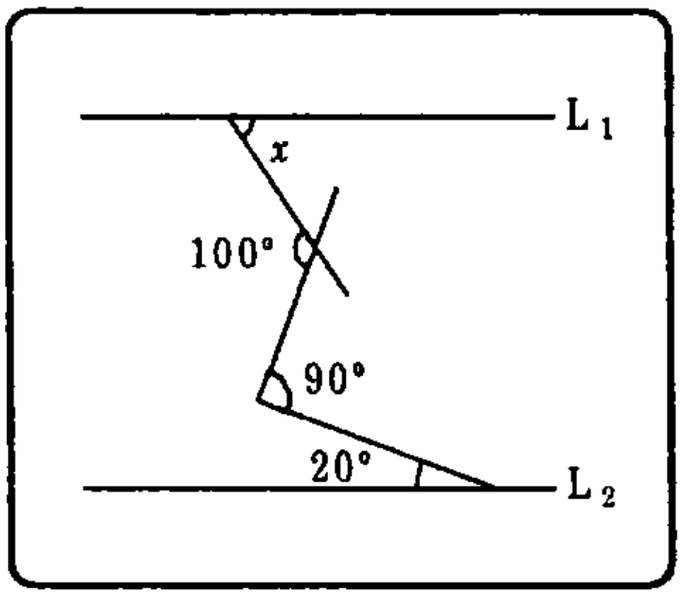
¿Cuál es el ángulo que debe ir en lugar de x?

L_1 es paralela a L_2



Resolución

La figura es análoga a:



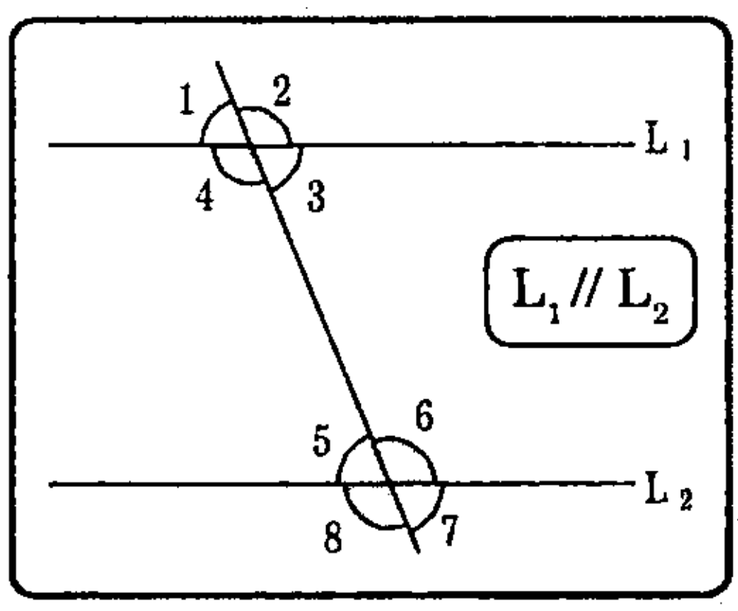
Donde se debe verificar:

$100° + 20° = x + 90°$

$x = 30°$

Rpta.: 30°

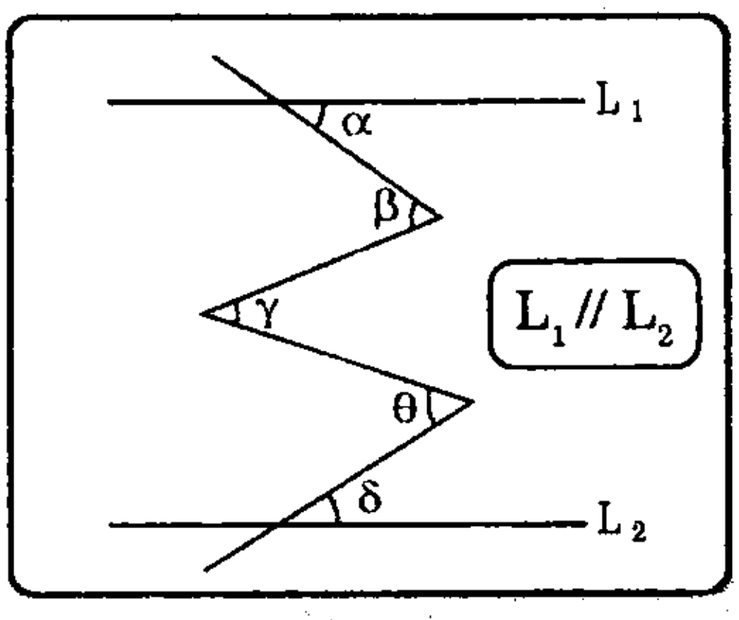
Ten presente



Los ángulos signados con números pares son iguales entre sí y los signados por impares, tambien son iguales entre sí.

Un ángulo con número par y otro ángulo con número impar, suman siempre 180°.

ANGULOS FORMADOS ENTRE DOS PARALELAS

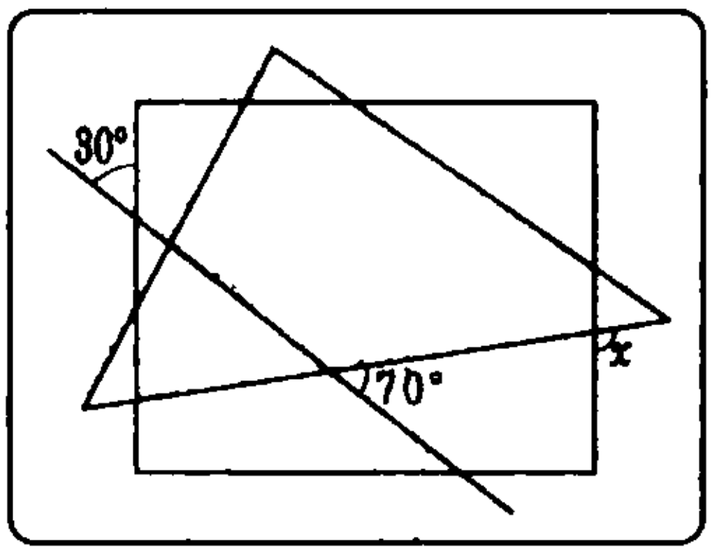


$\beta + \theta = \alpha + \gamma + \delta$

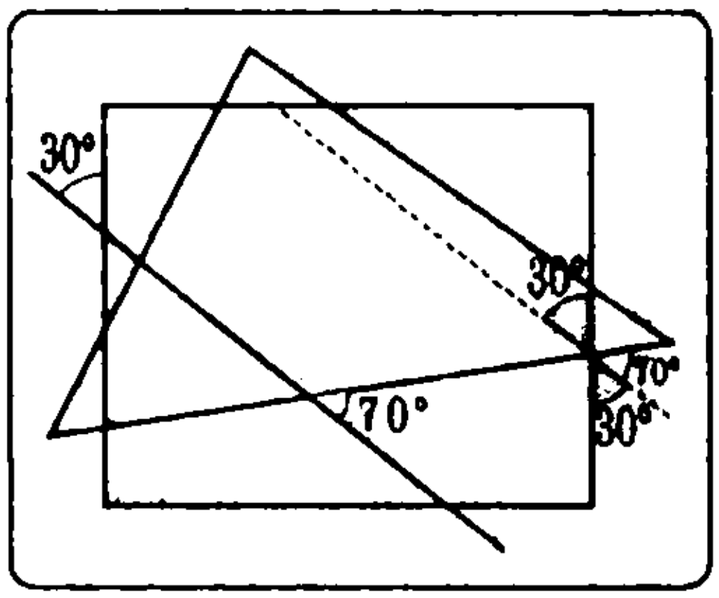
Problema 3

La figura muestra un cuadrado y un triángulo equilátero "superpuestos".

¿Cuánto mide el ángulo signado con x?



Resolución



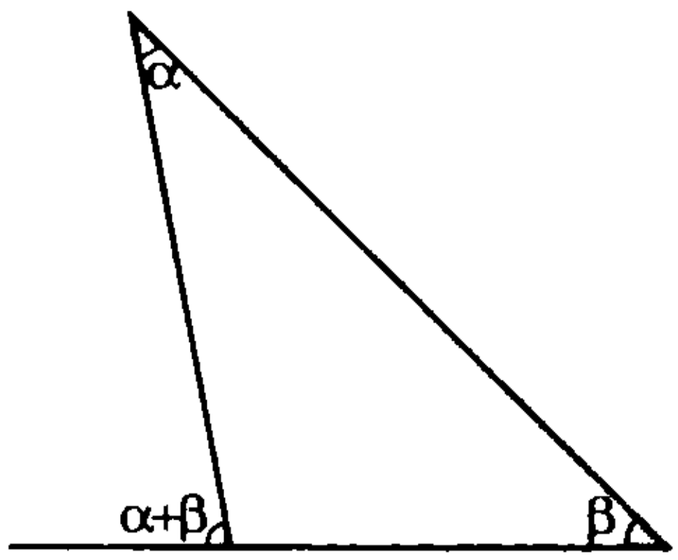
Trazando una paralela a la recta secante:

$x = 30° + 70°$

$x = 100°$

Rpta.: 100°

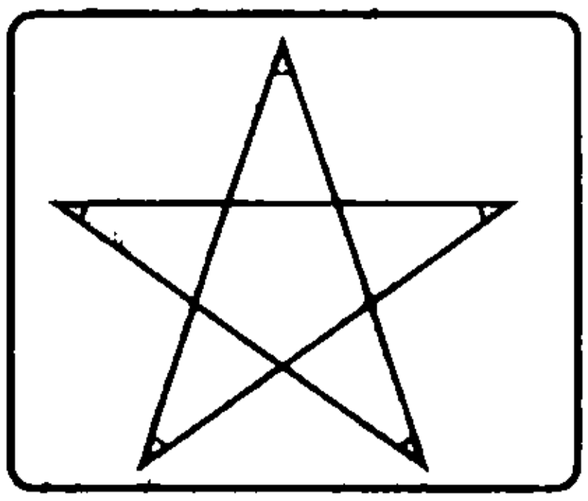
ANGULO EXTERIOR



10.5.2. Suma de ángulos interiores

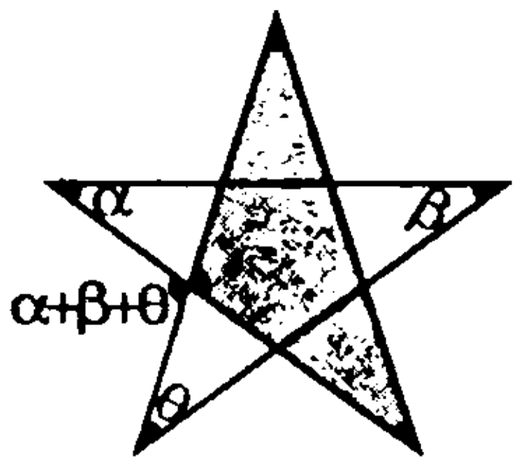
Problema 4

Hallar la suma de los ángulos que se indican en la figura adjunta.



Resolución

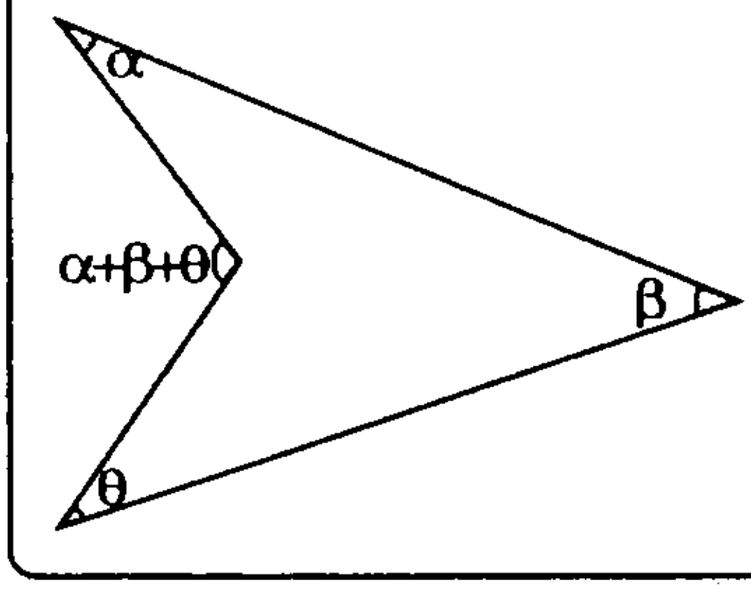
Designando los ángulos con letras:



La suma de los ángulos pedidos, resulta igual a la suma de los ángulos interiores del triángulo sombreado, que es 180°.

Rpta.: 180°

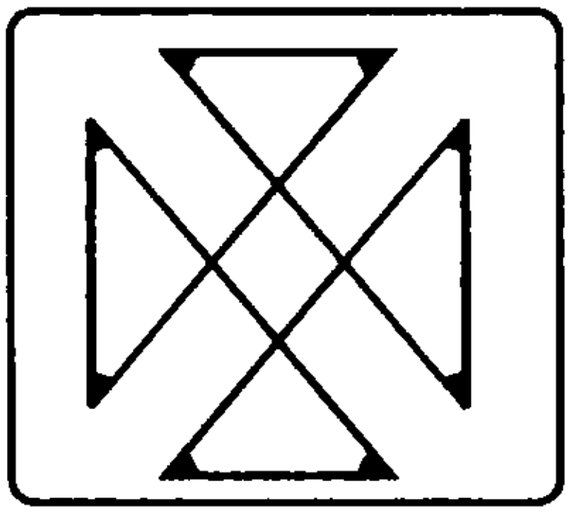
CUADRILATERO CONCAVO



Problema 5

Hallar la suma de los ángulos que se indican en la siguiente figura.

Resolución



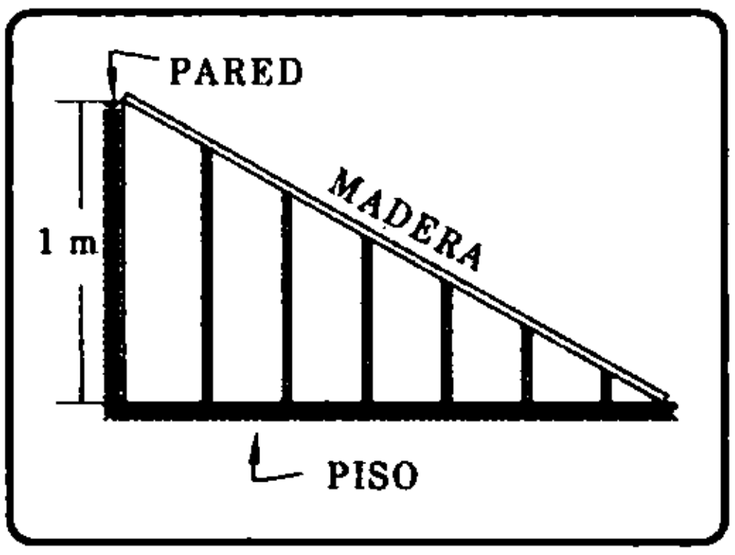
Si sumáramos los ángulos interiores de los 4 triángulos, obtendríamos $4 \times 180 = 720°$; pero en esta suma estarían considerados 4 ángulos que no deben estar, los 4 ángulos no marcados de los triángulos, que son los mismos ángulos interiores del cuadrilátero central, que suman 360°.

Por lo tanto, para quedarnos solamente con la suma de los ángulos marcados a 720° le quitamos 360°.

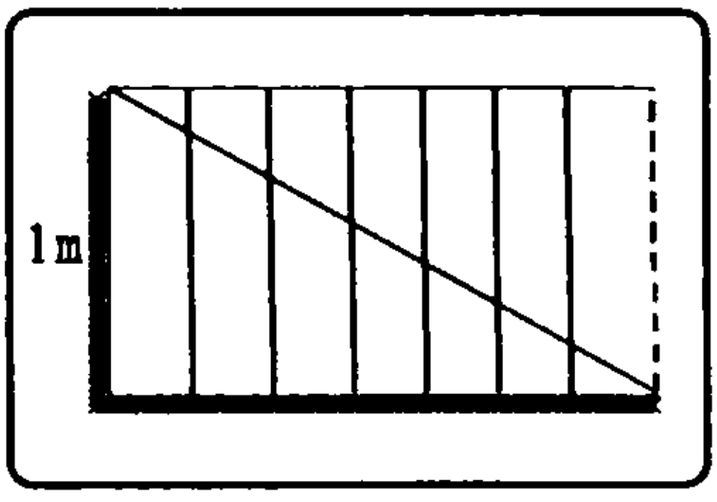
Rpta.: 360°

Problema 6

Para enrejar el pasamanos de una escalera, como muestra la figura, se requieren 6 varillas de fierro de 1/2". ¿Cuántos metros de fierro de 1/2" es necesario comprar?



Resolución

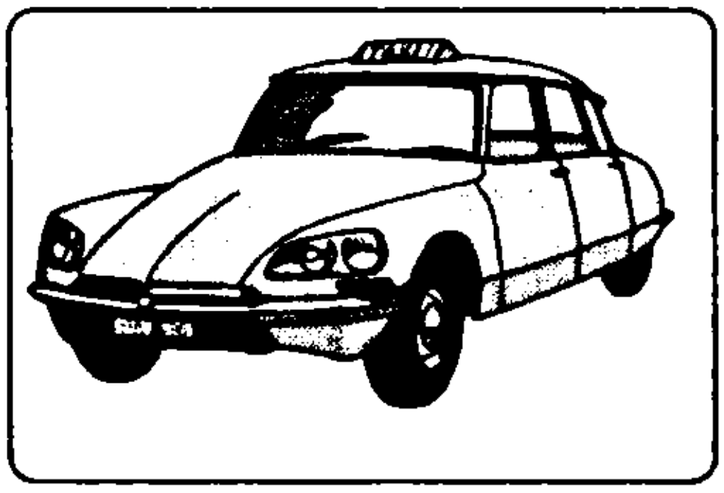


Si tuviéramos que enrejar como se muestra en la figura adyacente, serían necesarias 6 varillas de 1 m cada uno, o sea, 6 m. Pero, para el caso se requiere sólo la mitad, o sea 3 m.

Rpta.: 3 m

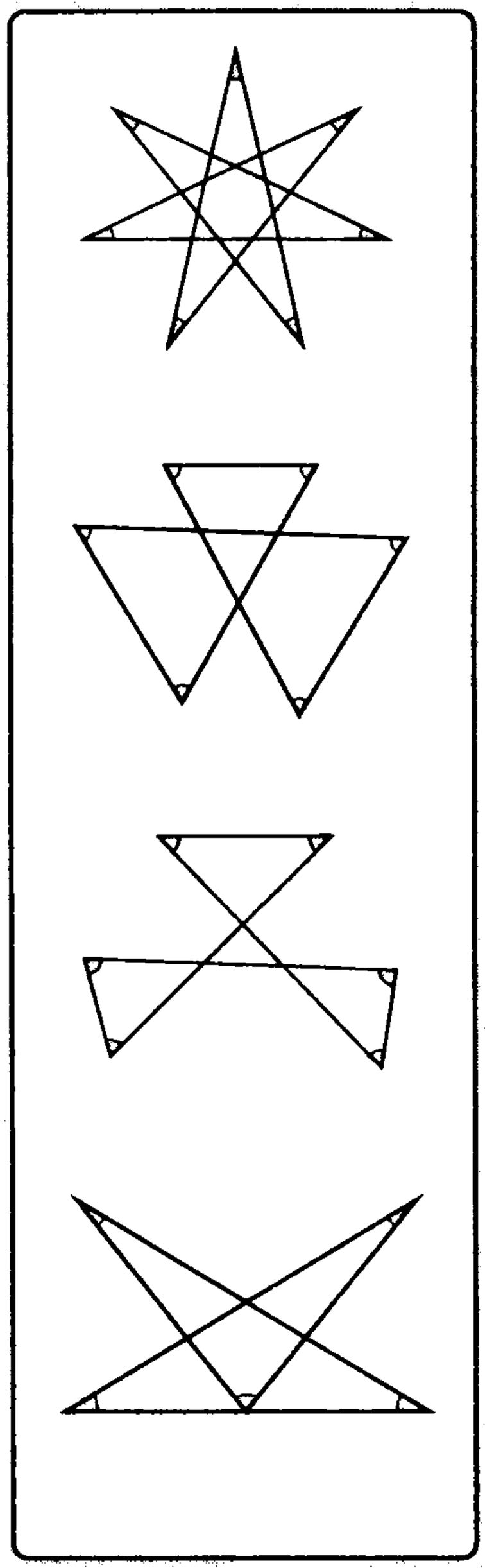
Problema 7

Una empresa fabricante de carros, ha diseñado un modelo de carro, con las llantas delanteros más grandes que las posteriores. ¿Cuáles de las llantas se



Ejercicio

En cada una de las siguientes figuras, hallar la suma de los ángulos que se indican



gastarán más rápidamente, las delanteras o las posteriores?

Resolución

Para una misma distancia, la más pequeña da más vueltas que la grande y cualquier punto de la llanta más pequeña estará en contacto con la carretera más veces que cualquier punto de la grande. Por lo tanto, las posteriores se gastarán más rápidamente.

Rpta.: Las posteriores

Problema 8

Un ángulo de 10° se mira con una lupa de 2 aumentos. ¿Qué medida aparente tendrá el ángulo?

Resolución

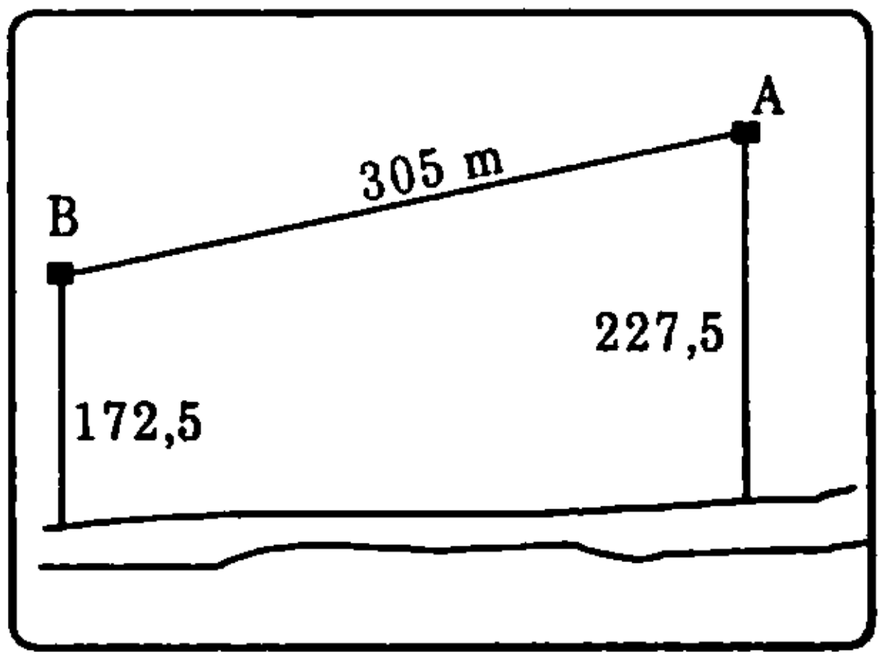
Cuando un ángulo se mira con una lupa, lo que aumenta son los lados que lo forman, sin embargo el ángulo formado se le ve con la misma abertura.

Rpta.: 10°

El camino más corto

Problema 9

Antonio vive en el punto A (según el plano adjunto). Su novia Bertha vive en el punto B. En la margen del río crecen unas flores que le encantan a Bertha. Antonio, un joven muy atento, siempre le gusta complacer a su novia, por eso, cuando va visitarla siempre pasa por el río, recogiendo las flores para ella. Pero Antonio no es de los que pierden tiempo en vano, por eso, la visita lo realiza siguiente la trayectoria más corta. ¿Cuál es la longitud de la trayectoria de ida de Antonio? Las distancias necesarias para encontrar la solución se dan en el plano.



Resolución

- Reemplacemos la ruta AP'B por la ruta AP'B' porque son de la misma longitud. Igualmente la ruta APB

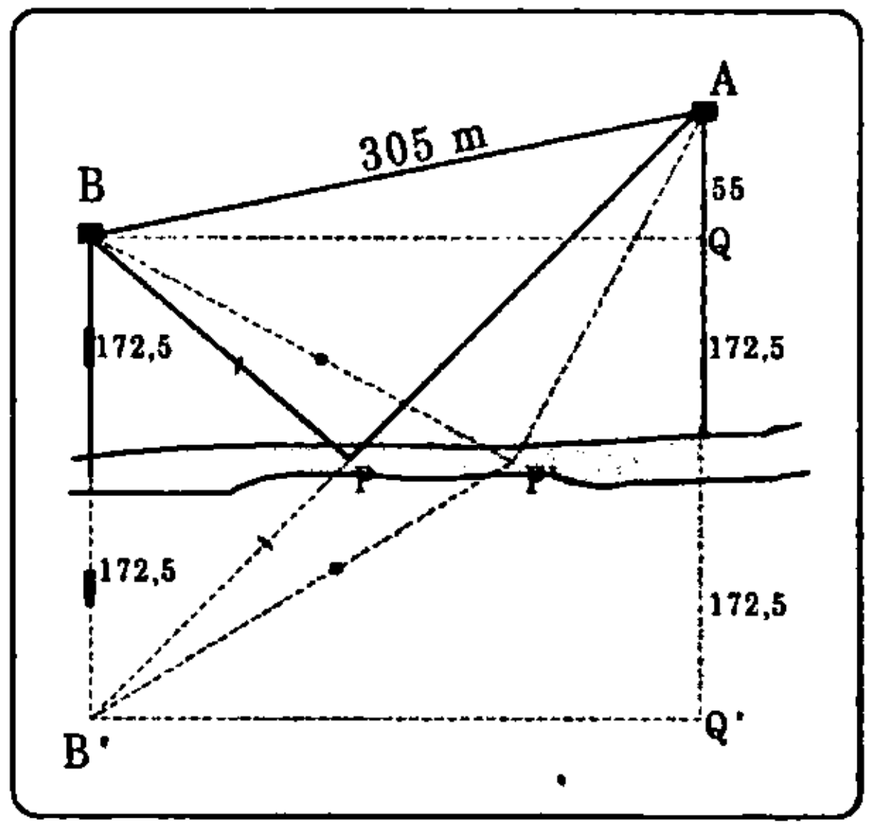
DIVERTIJO

A continuación se muestran tres tipos de orificios ¿Cuántos tapones de madera se necesitan como mínimo para obturar perfectamente los tres orificios?

por la APB'

- ¿Cuál de las rutas es más corta, la ruta APB' o la ruta AP'B'?

Pues la más corta es aquella que va sin curvas, esta es la ruta APB'. Hallemos la longitud:



- En el triángulo rectángulo AQB:

$$BQ^2 = 305^2 - 55^2 \Rightarrow BQ = 300 = B'Q'$$

- En el triángulo rectángulo $B'Q'A$:

$$B'Q' = 300;\ AQ' = 400 \Rightarrow AB' = 500$$

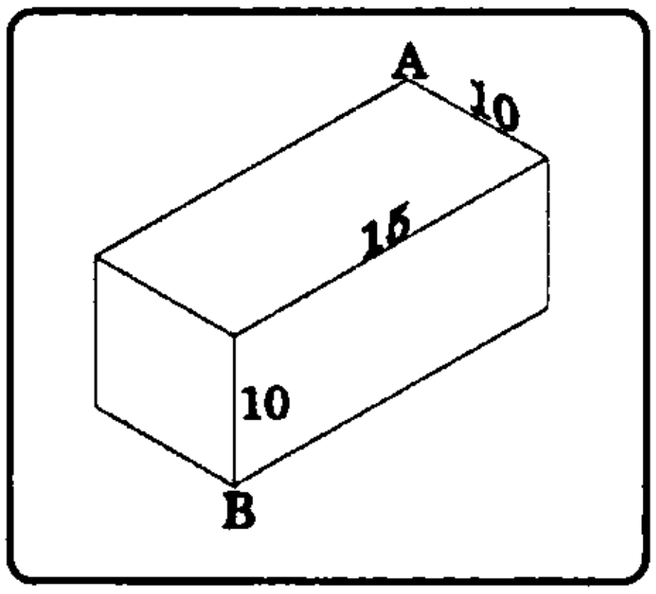
- Pero: $AB' = AB \Rightarrow AB = 500$; es la longitud de la ruta más corta.

Rpta.: 500 m

10.5.3 Triángulos notables

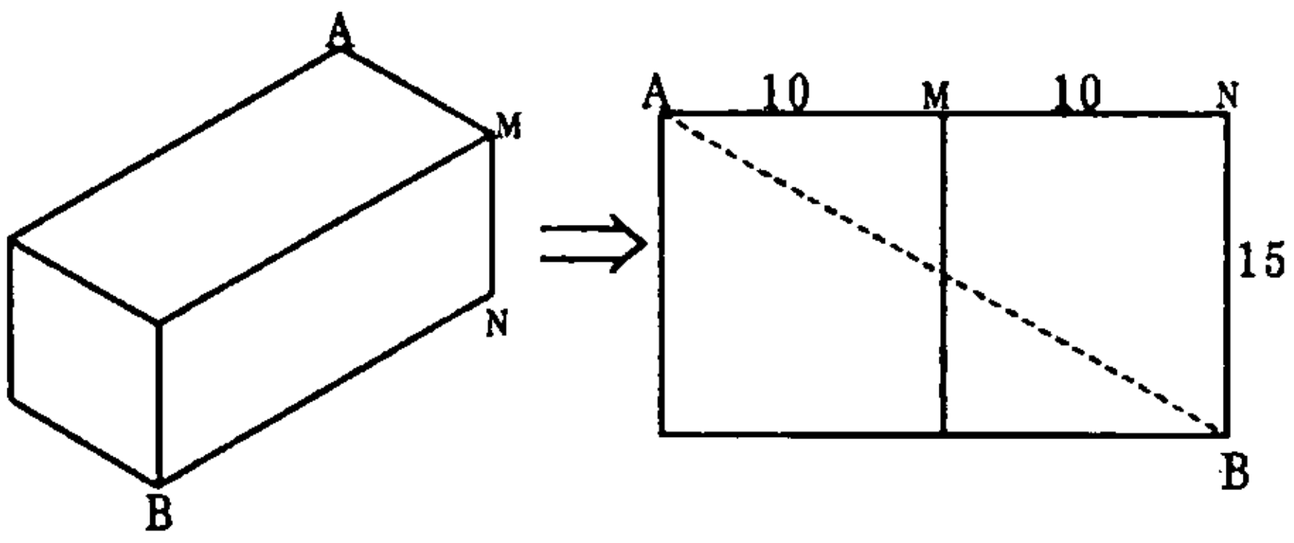
Problema 10

En el jardín de una casa, hay una bloqueta de cemento de 15 cm de longitud, 10 cm de ancho y 10 cm de alto (ver fig.). En el vértice A de la bloqueta hay una araña y en el vértice diametralmente opuesto B, hay una mosca. De saber geometría, la araña iría donde la mosca siguiendo la trayectoria más corta. ¿Cuál sería la longitud de esta trayectoria?

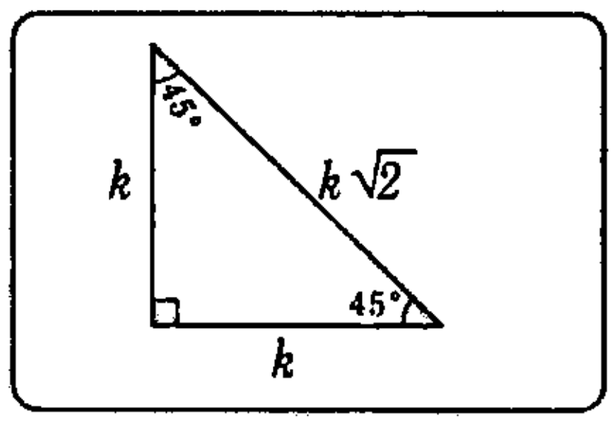


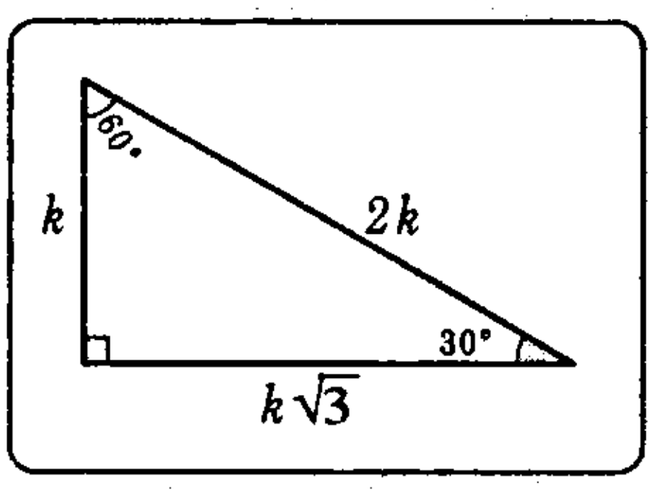
Resolución

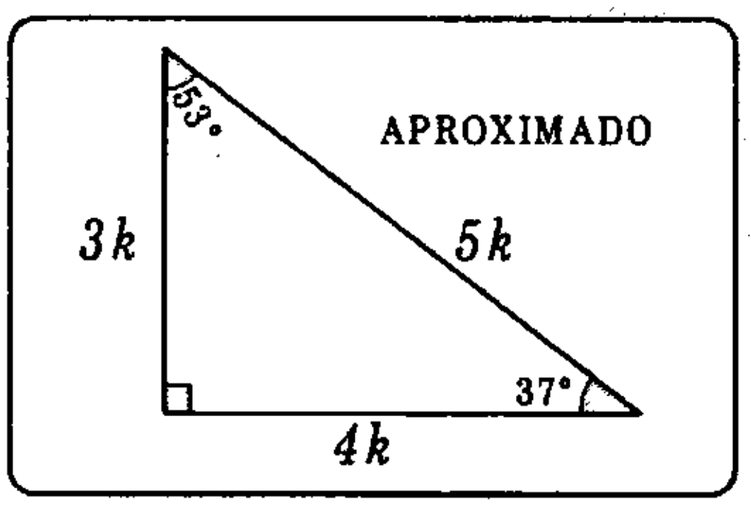
Desarrollando la superficie de la bloqueta.

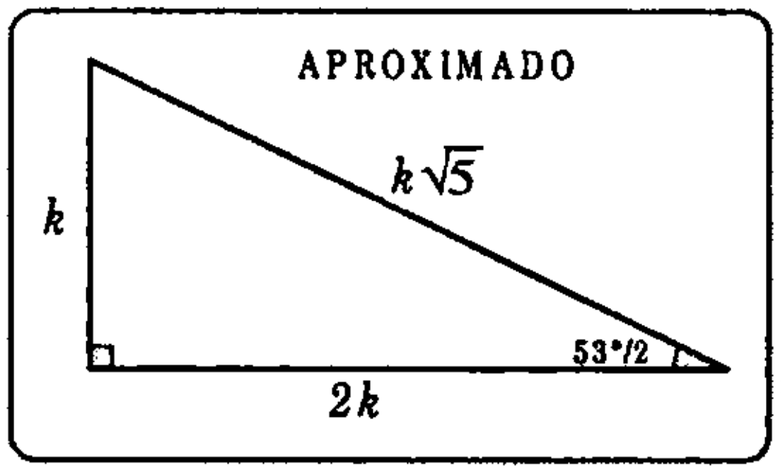


TRIANGULOS NOTABLES









En el triángulo ectángulo ANB: (37° y 53°)

$$AN = 20 = 4(5);\ BN = 15 = 3(5)$$

$$\Rightarrow \quad AB = 5(5) = 25$$

Rpta.: 25 cm

Problema 11

Un Topógrafo situado a 600 m.s.n.m. observa un "jalón" puesto en la cúspide de un cerro con un ángulo de elevación de 30°. Acto seguido se acerca 300 metros hacia el cerro por un terreno plano y vuelve a observar el jalón y en la "vertical" del teodolito se lee 60°. ¿Qué altura sobre el nivel del mar, alcanza la cúspide del cerro?

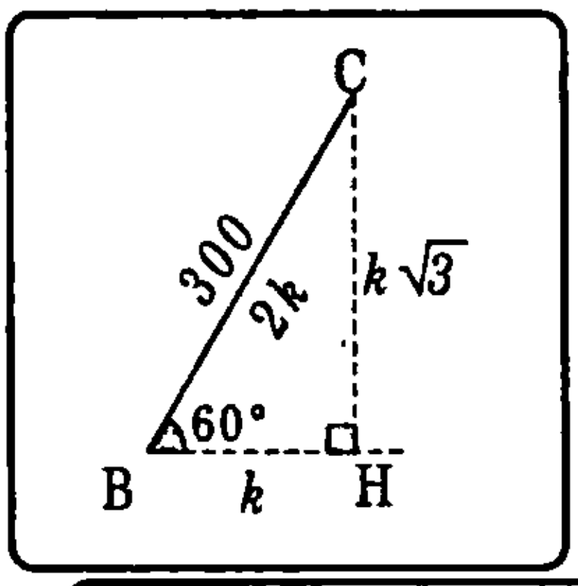
Resolución

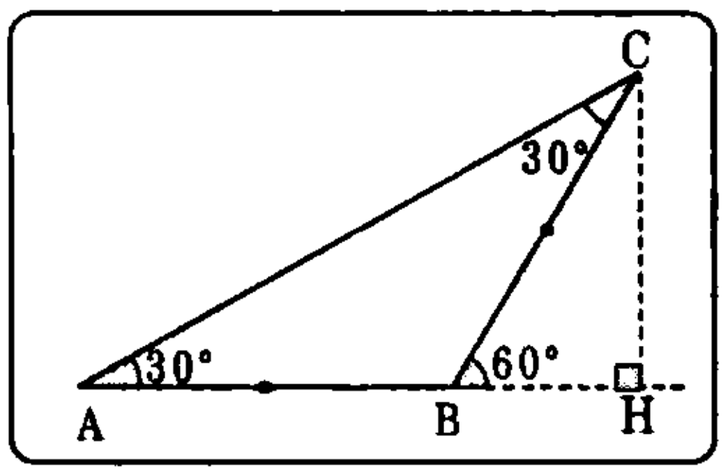
Esquematizando:
En el triángulo ABC, el ángulo CBH es exterior:

$$\Rightarrow \quad \measuredangle ACB = 30°$$

Por lo tanto:

$$AB = BC = 300$$





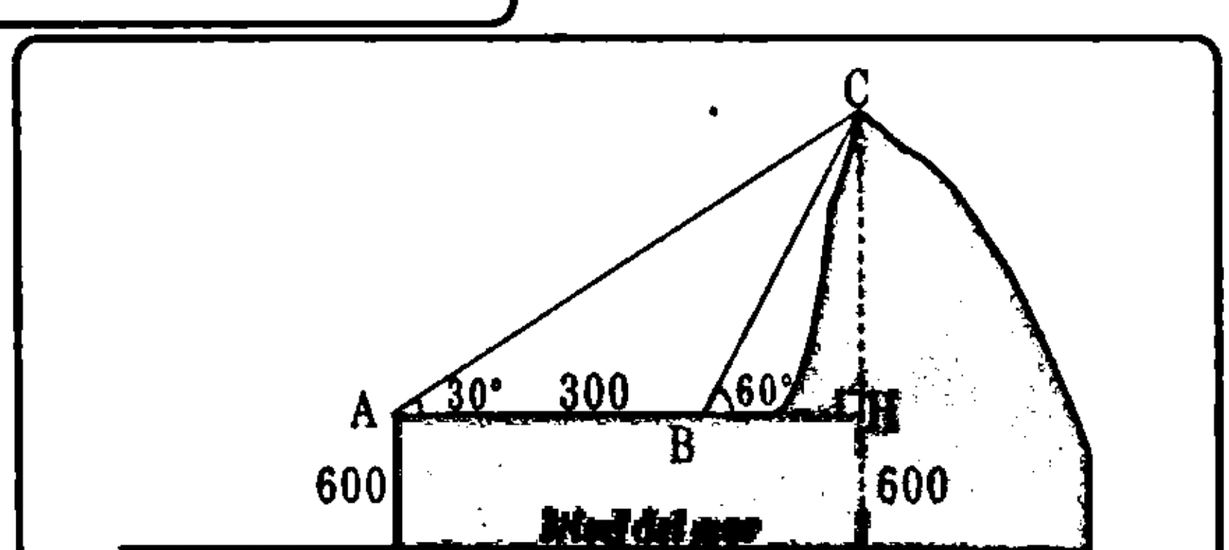
Luego:

$$2k = 300$$

$$k = 150$$

$$\therefore \quad k\sqrt{5} = 150\sqrt{3}$$

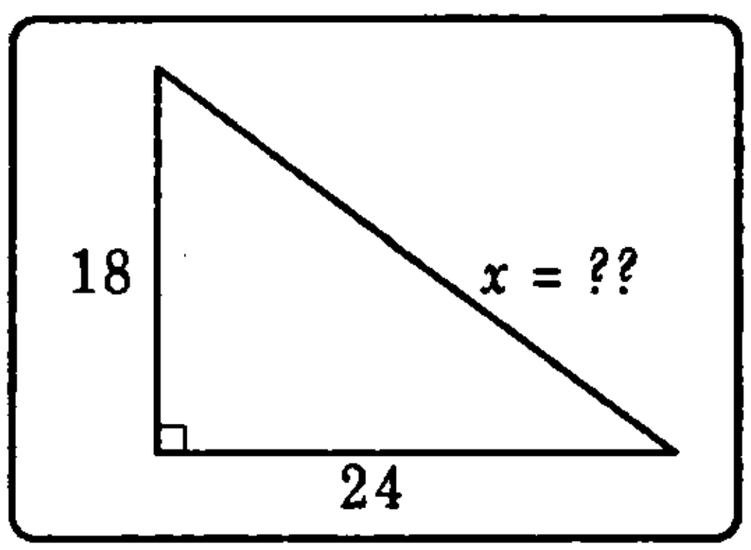
$$CH \approx 260$$



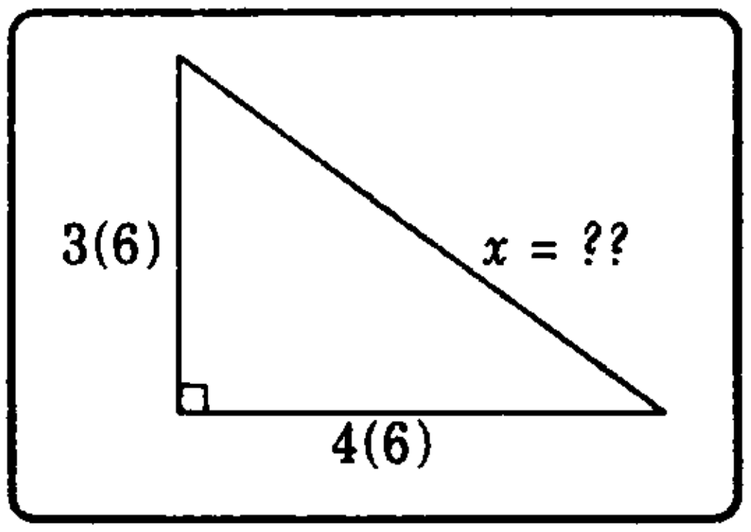
Luego: C está a 260 + 600 = 860 m s. n. m.

Rpta.: 860

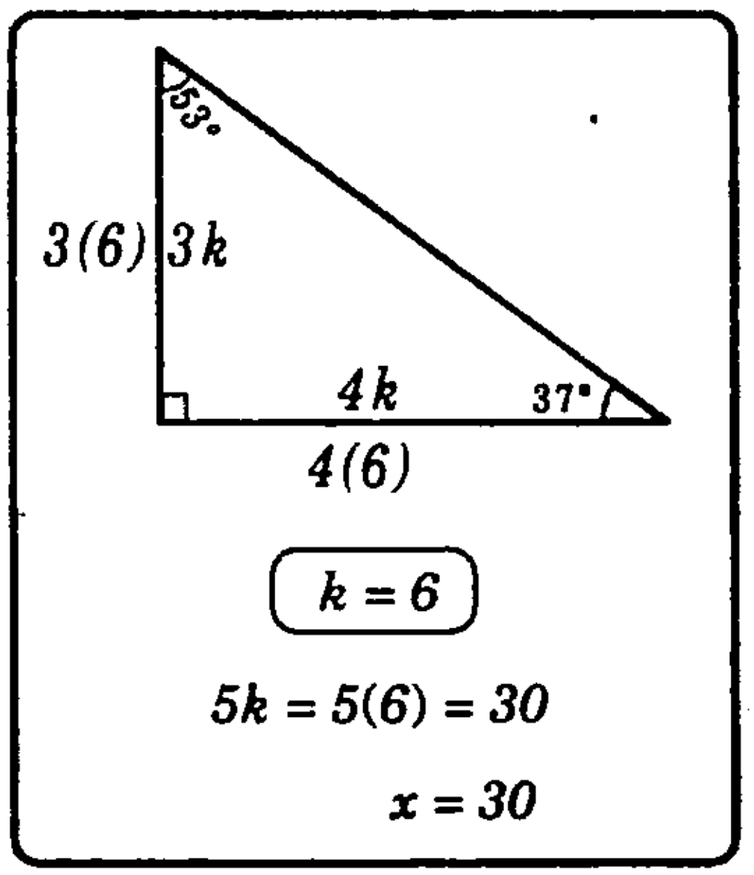
Ejemplos



Se observa que:



Se deduce entonces



$$k = 6$$

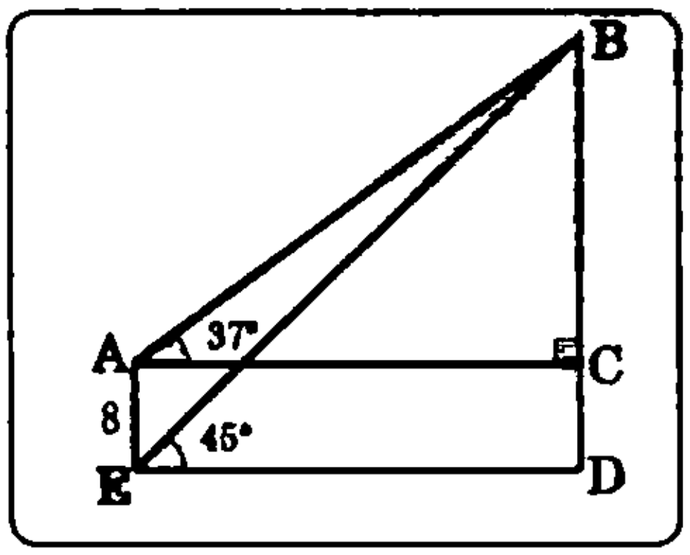
$$5k = 5(6) = 30$$

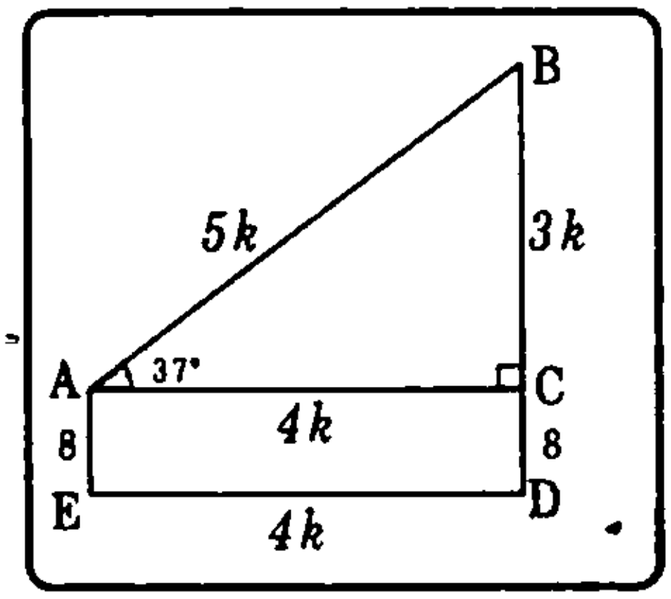
$$x = 30$$

Problema 12

En la figura adyacente se pide determinar la medida del segmento AB, si AE = 8

Resolución





$ED = BD$ (ver fiugra del enunciado), entonces:

$4k = 3k + 8 \quad \Rightarrow \quad k = 8$

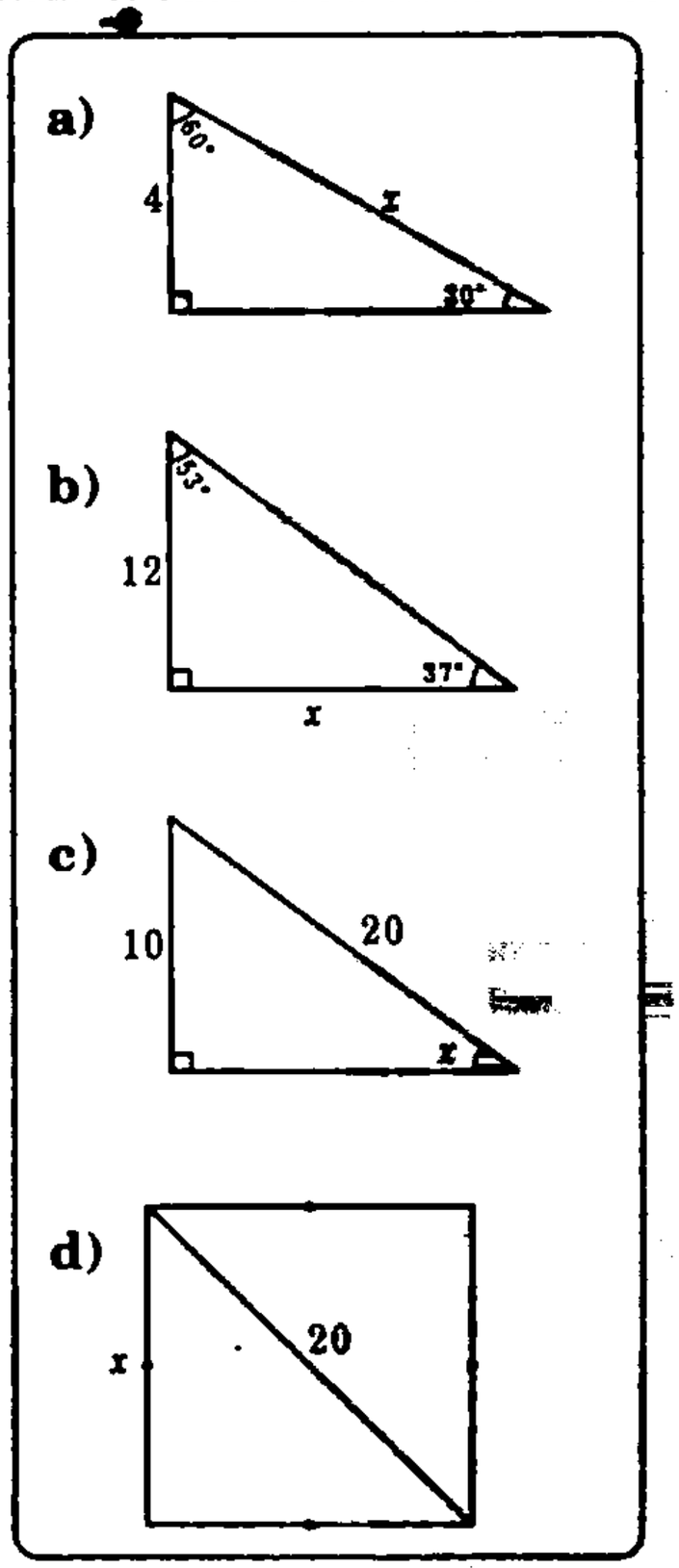
$AB = 5k$

$AB = 5 \times 8 = 40$

Rpta.: 40

EJERCICIO

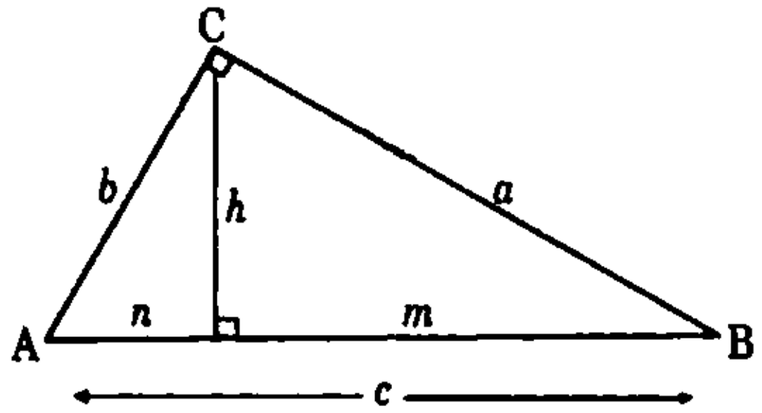
Hallar el valor de x en cada caso



10.5.4. Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

Elementos del triángulo rectángulo

En la siguiente figura se muestra las longitudes de los diferentes elementos mediante letras minúsculas.



En todo triángulo rectángulo se cumplen las siguientes relaciones:

$b^2 = nc$ | $a^2 = mmc$ | $ab = hc$ | $h^2 = mn$

$a^2 + b^2 = c^2$ | $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{h^2}$

a y b: Medida de los catetos

c: Medida de la hipotenusa

h: altura relativa a la hipotenusa

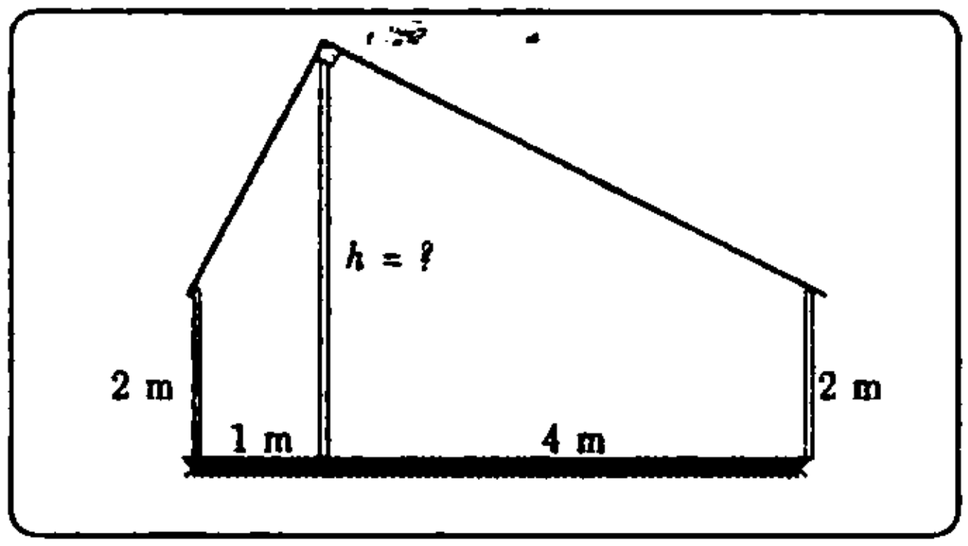
n: proyeción del cateto AC sobre la hipotenusa

m: proyeción del cateto CB sobre la hipotenusa

Problema 1

Los aleros del techo del galpón de una fábrica forman en la cumbre un ángulo de 90°. Las paredes tienen una altura de 2 cm. En la cumbre del techo

hay un pequeño orificio por el cual, al medio día, penetra un rayo de luz al piso del galpón, punto desde el cual se mide perpendicularmente hacia ambas paredes laterales. Si las distancias medidas son 1 m y 4 m, ¿a qué altura está la cumbre?



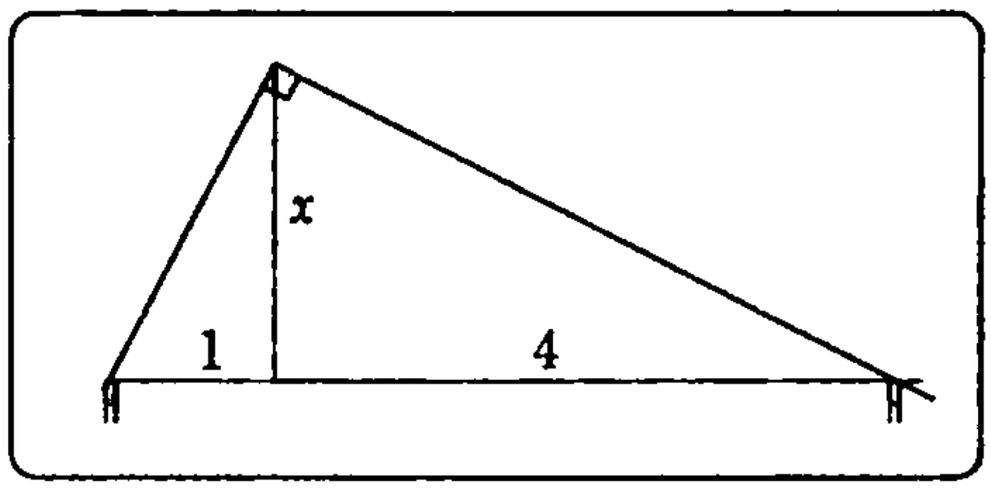
Resolución

Esquematizando el sector del techo: (figura de la derecha)

$$x^2 = 1 \times 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2}$$

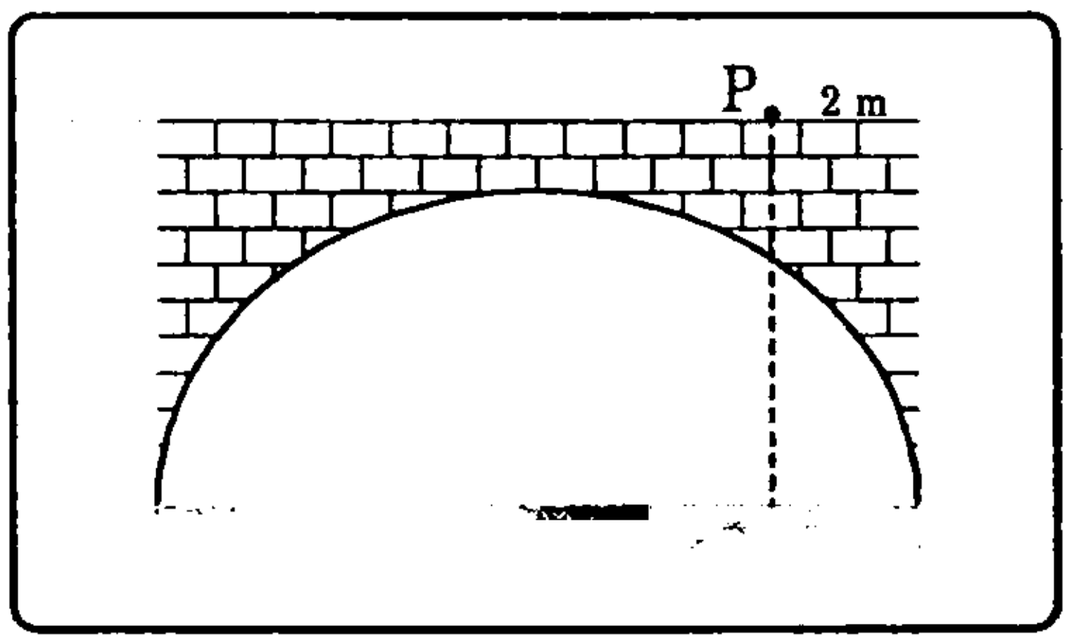
Altura de la cumbre: $2 + 2 = 4\ m$

Rpta.: 4 m



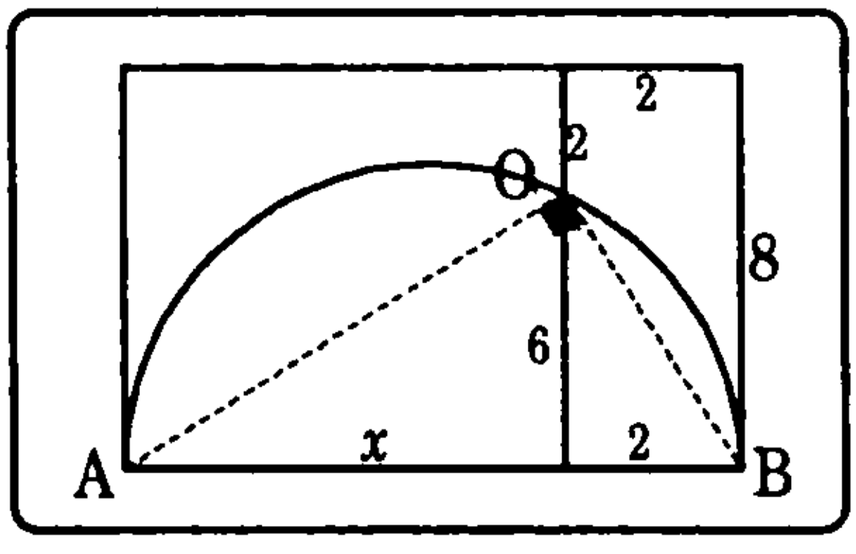
Problema 2

La figura adyacente muestra un puente de luz semicircular. Desde el punto P situado a 2 m de uno de los extremos del puente, manteniendo un extremo en P se resuelta una cuerda de 8 m de tal suerte que el otro extremo apenas toca el agua y 2 m de cuerda está en contacto con la pared del puente. ¿Con qué anchura, cruza el puente el río?



Resolución

Esquematizando



$$6^2 = 2(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 18}$$

Ancho del río

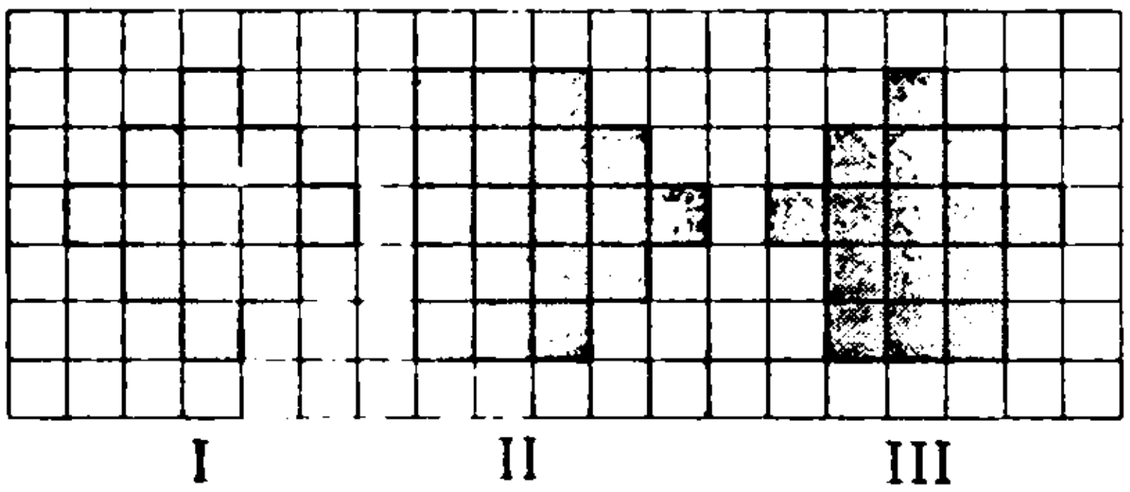
$$18 + 2 = 20$$

Rpta.: 20 m

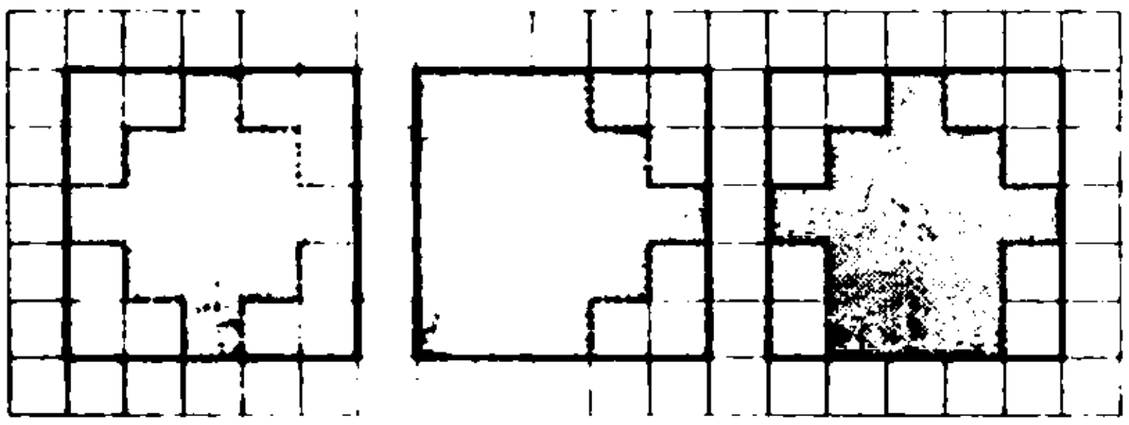
10.6. Perimetros

Problema 3

¿Cuál de las figuras tiene mayor perímetro?



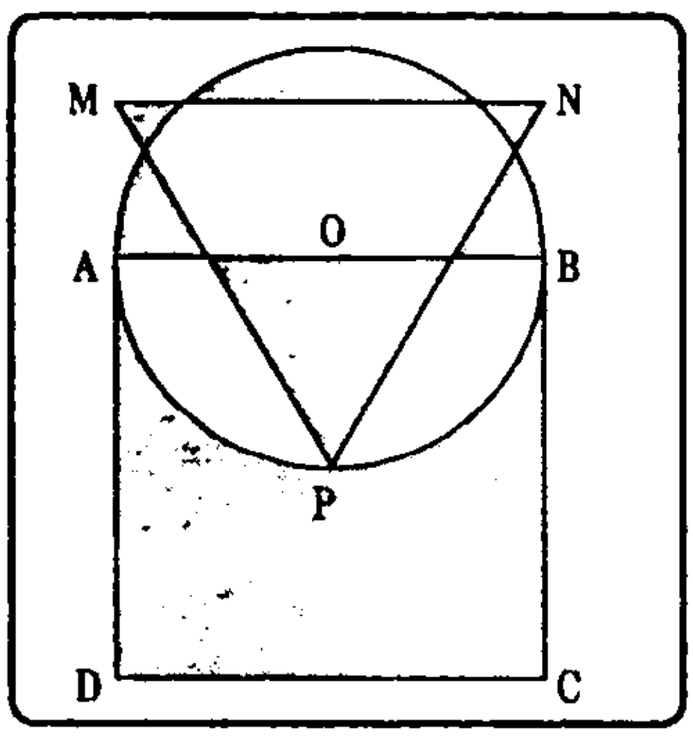
Resolución



Las tres figuras tienen igual perímetro, el mismo del cuadrado que los circunscribe

Problema 4

El diámetro del círculo de centro O, los lados del cuadrado ABCD y los del triángulo equilátero MNP son iguales y miden 4 cm. ¿Puedes hallar el perímetro de las regiones sombreadas?



Resolución

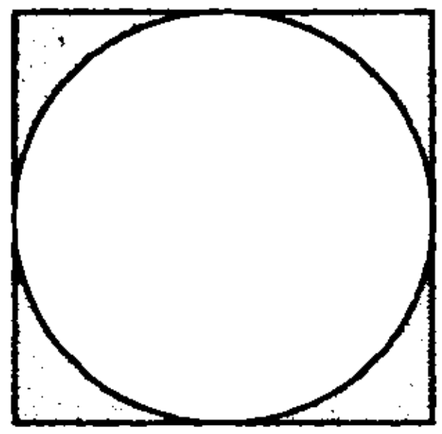
Dibuja con lápiz en un papel la figura y con un lapicero repasa el perímetro (borde) de todas las regiones sombradas una sola vez. ¿A qué conclusión has llegado? Bien. Para hallar el perímetro de las regiones sombreadas, basta hallar la suma de los perímetros de las tres figuras mencionadas en el enunciado del problema:

$$p_{\square} + p_{\triangle} + p_{\bigcirc} = 4\times4 + 3\times4 + 2\pi\times2 = 28 + 4\pi$$

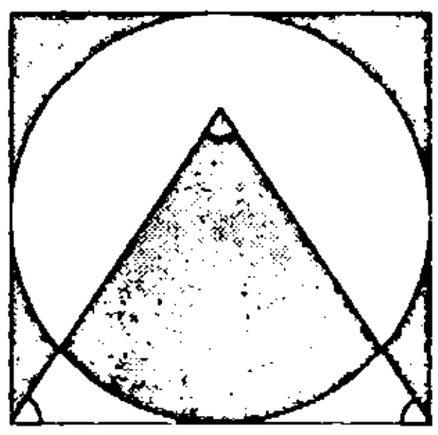
EJERCICIOS

Hallar el perímetro de las regiones sombreadas. En cada caso, el lado del cuadrado mide 6 cm.

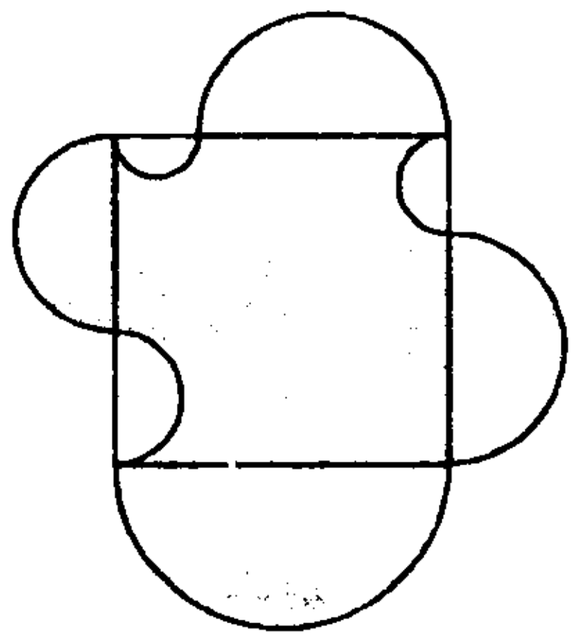
a)



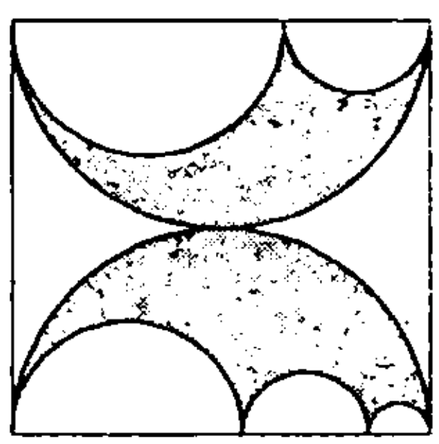
b)



c)



d)



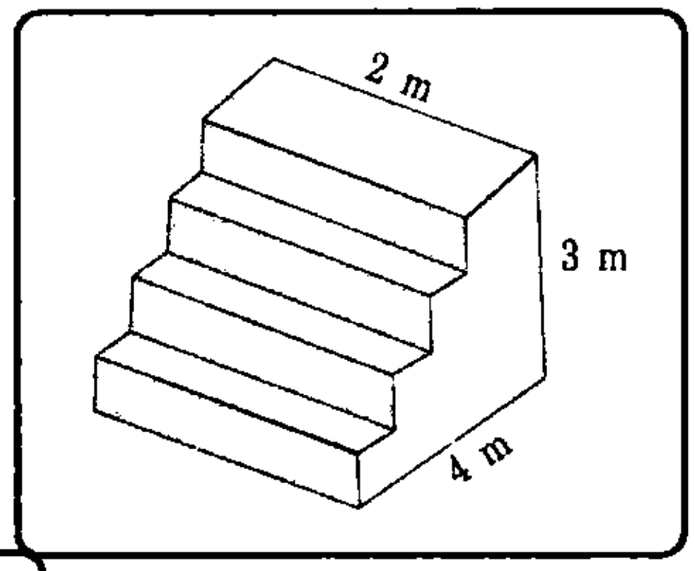
Rpta.:

a) $(24 + 6\pi)$ cm **b)** $(30 + 6\pi)$ cm
c) 24π cm **d)** 16π cm

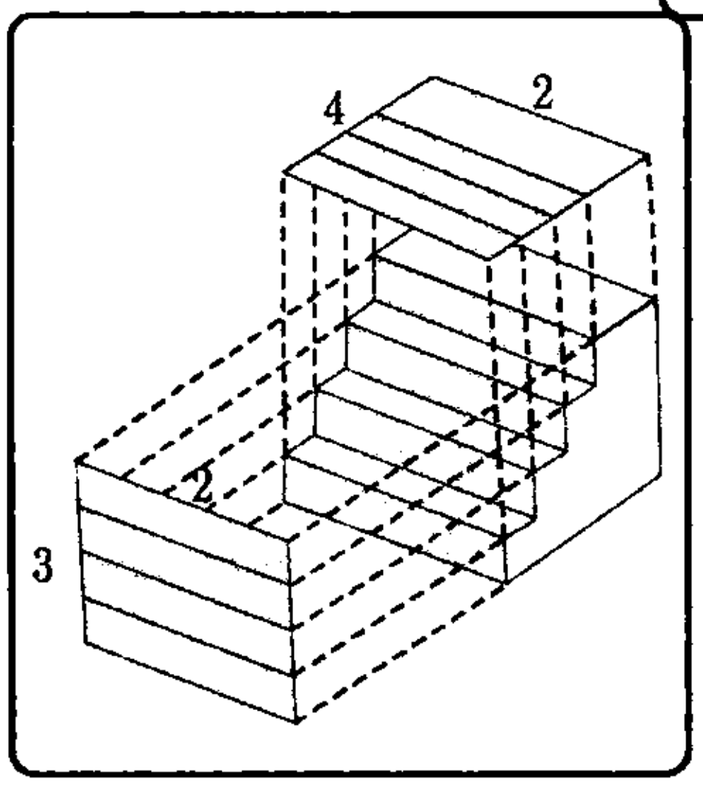
10. 7. Problemas de áreas

Problema 5

¿Cuál es el área de la superficie sombreada de la escalera?



Resolución



Proyectando, la suma de las áreas de las superficies horizontales resulta igual al de un rectángulo de $4 \times 2 = 8$ m² y la de las superficies verticales igual al de un rectángulo de $3 \times 2 = 6$ m².

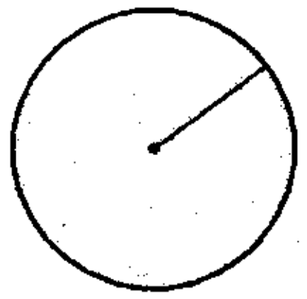
Por lo tanto, área total:

$8 + 6 = 14$ m²

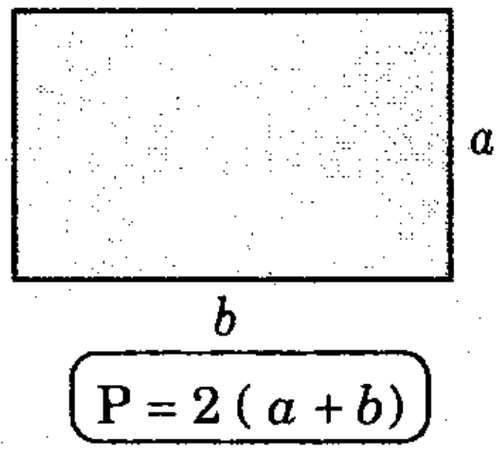
Rpta.: 14 m²

Recuerda

PERÍMETROS



$P = 2\pi r$



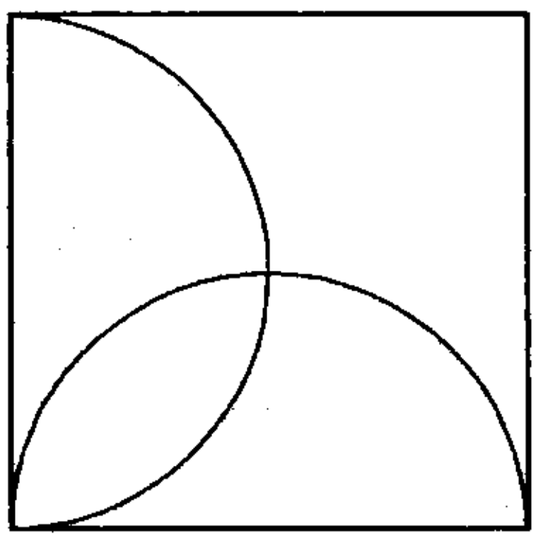
$P = 2(a + b)$

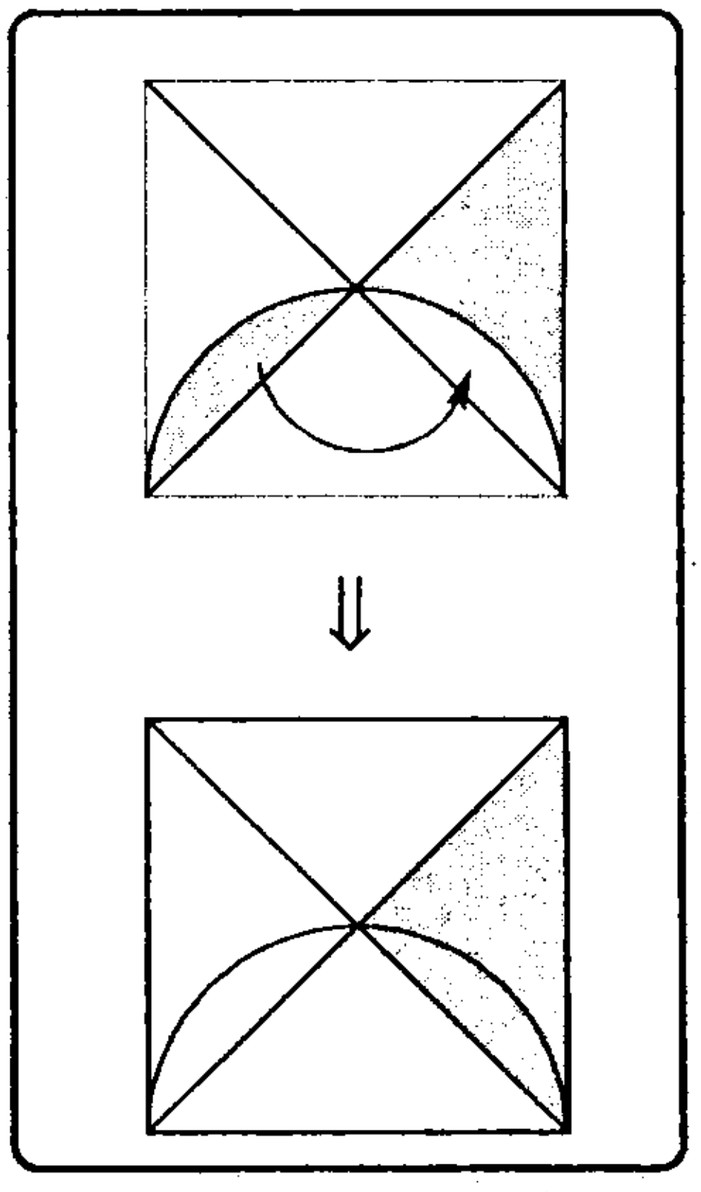
COMENTARIO

El método de "trasladar" regiones sombreadas para cubrir regiones en blanco de igual área, es muy recomendable para resolver problemas de áreas.

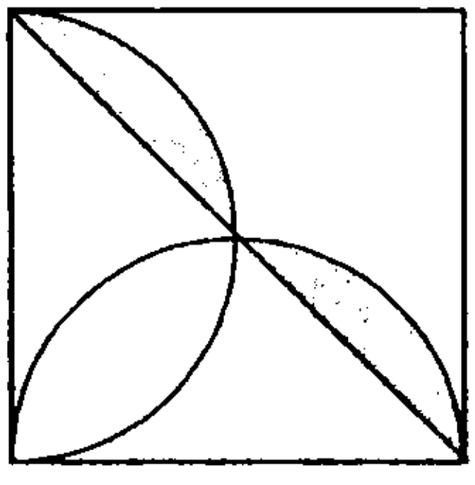
Problema 6

Hay quienes opinan, al ver la figura adjunta, que el área de la región sombreada y el de la región sin sombra son iguales. Hay otros que dicen que el área de la parte sombreada es mayor y un tercer grupo opina lo contrario. ¿Tú, qué opinas?



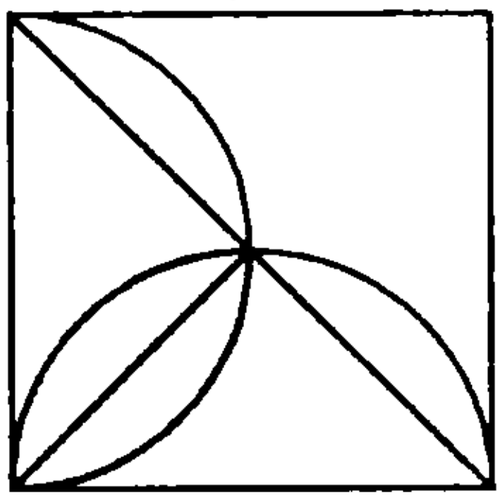


Resolución



"Juntemos" regiones sombreadas en un lado y las blancas en otro.

Los segmentos circulares signados con a son iguales. Con los 2 segmentos circulares sombreados cubrimos

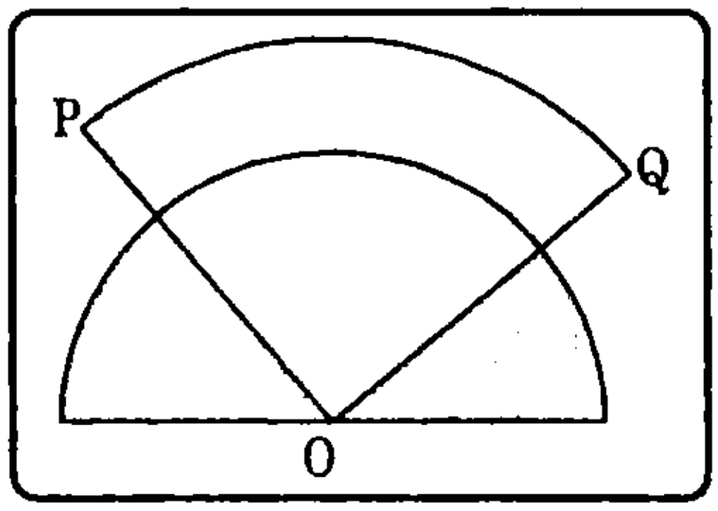


los dos que están en blanco y resulta que, tanto la región en blanco como la sombreada corresponden a la mitad del cuadrado, o sea son iguales.

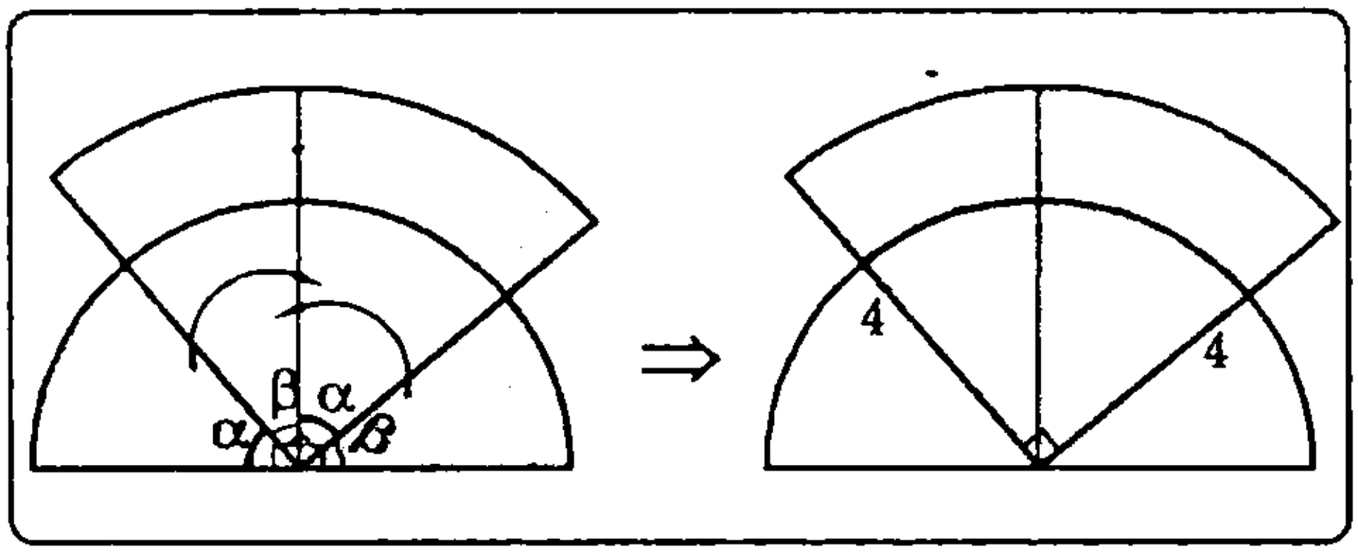
Rpta.: Son iguales

Problema 7

Hallar el área de la región sombreada, si OP = OQ = 4. El ángulo PQO mide 90° y O es centro del semicírculo.



Resolución



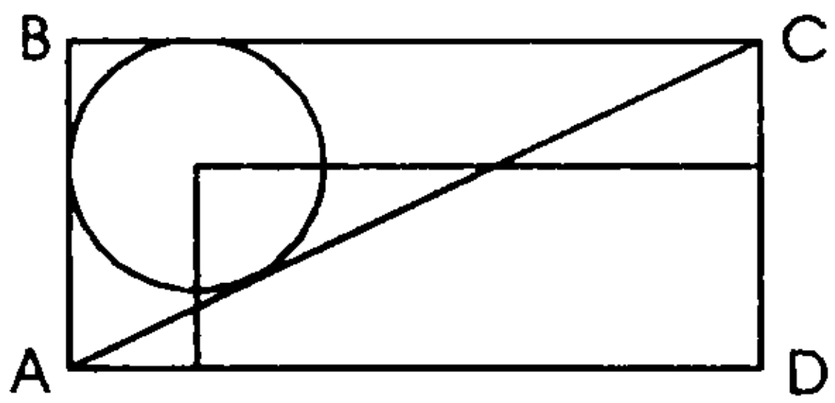
La región sombreada resultó un cuadrante, es decir, la cuarta parte del círculo de radio 4

$$\therefore \quad Area = \frac{1}{4}\left[\pi(4)^2\right] = 4\pi$$

Rpta.: 4π

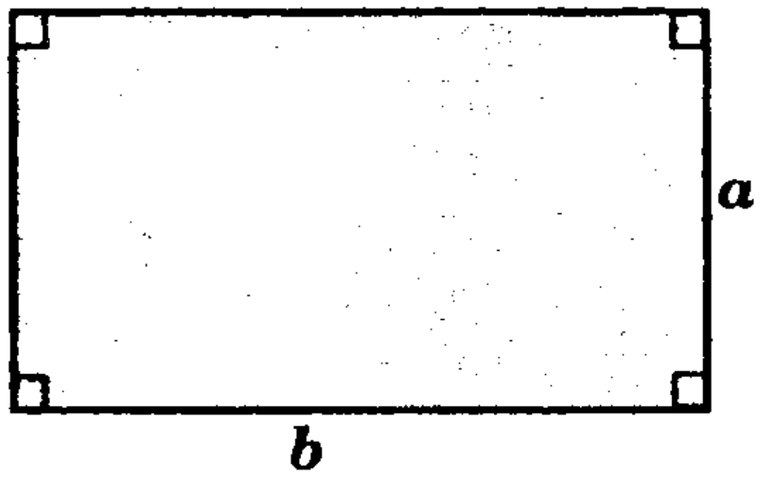
Problema 8

Si el área del rectángulo ABCD es 16 cm², ¿Cuál es el área de la región sombreada de la figura adjunta?

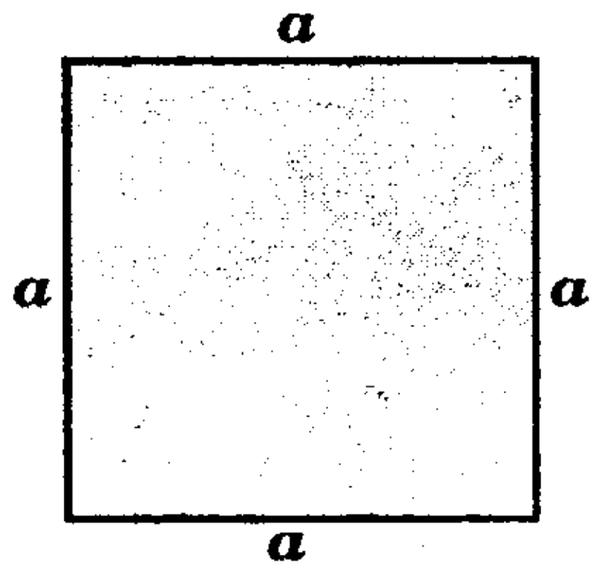


Recuerda

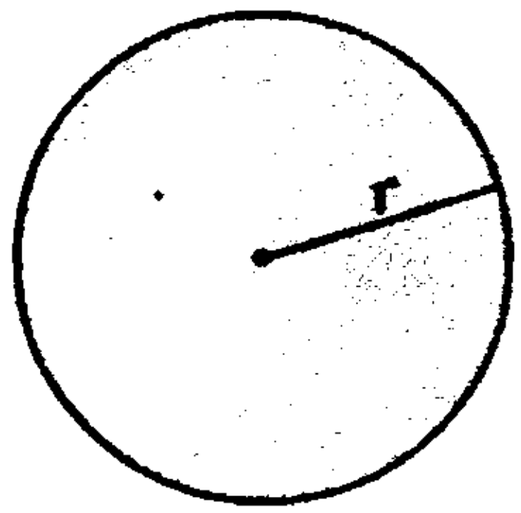
AREAS DE ALGUNAS FIGURAS



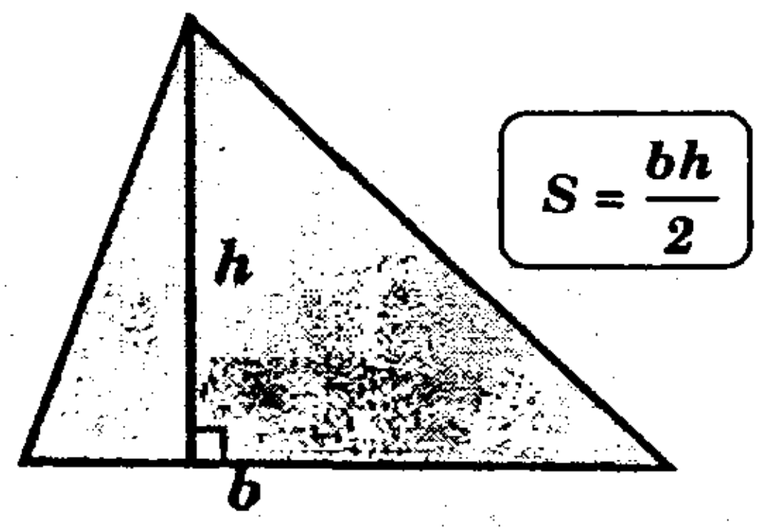
S = ab



S = a²

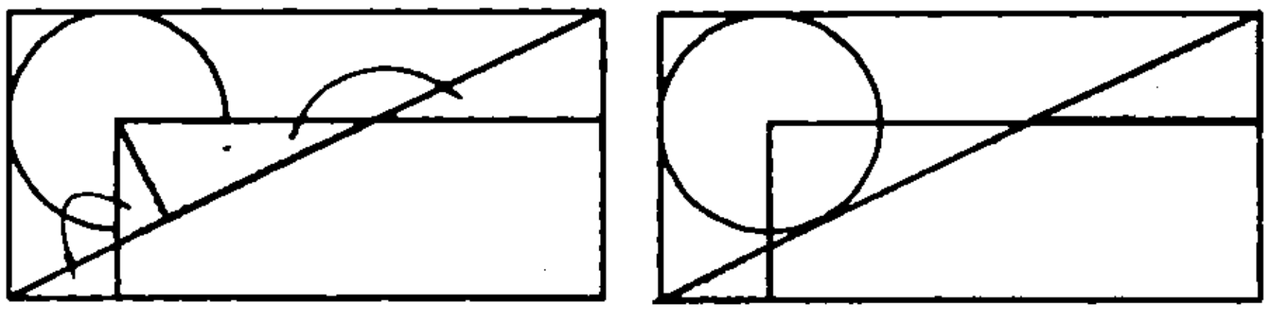


S = πr²



$$S = \frac{bh}{2}$$

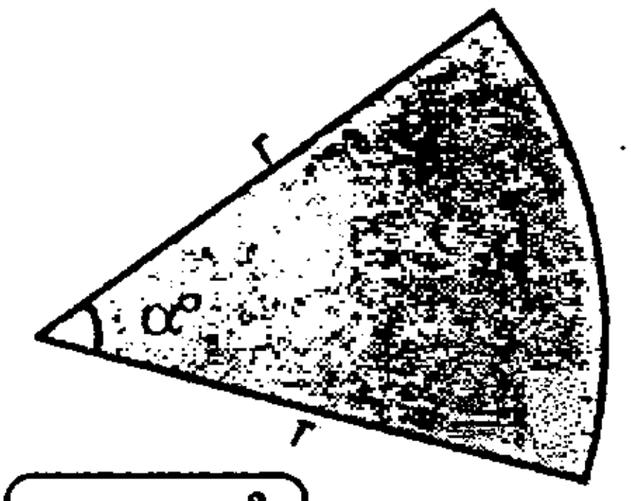
Resolución



La región sombreada resulta la mitad del rectángulo.

Luego: $Area = 16 \div 2 = 8\ cm^2$

Rpta.: $8\ cm^2$

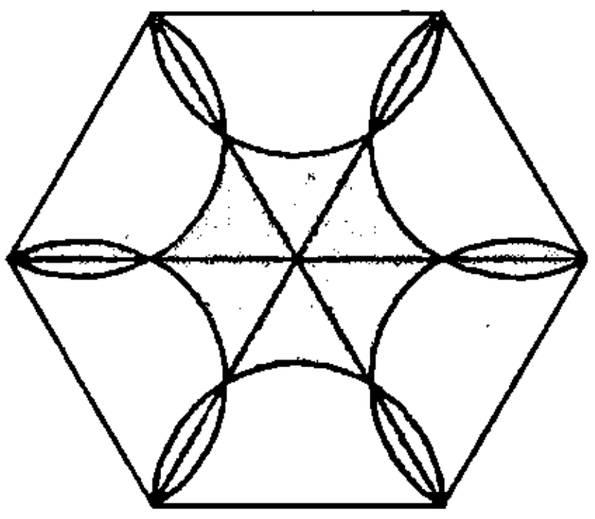


$$S = \frac{\alpha^\circ \pi r^2}{360^\circ}$$

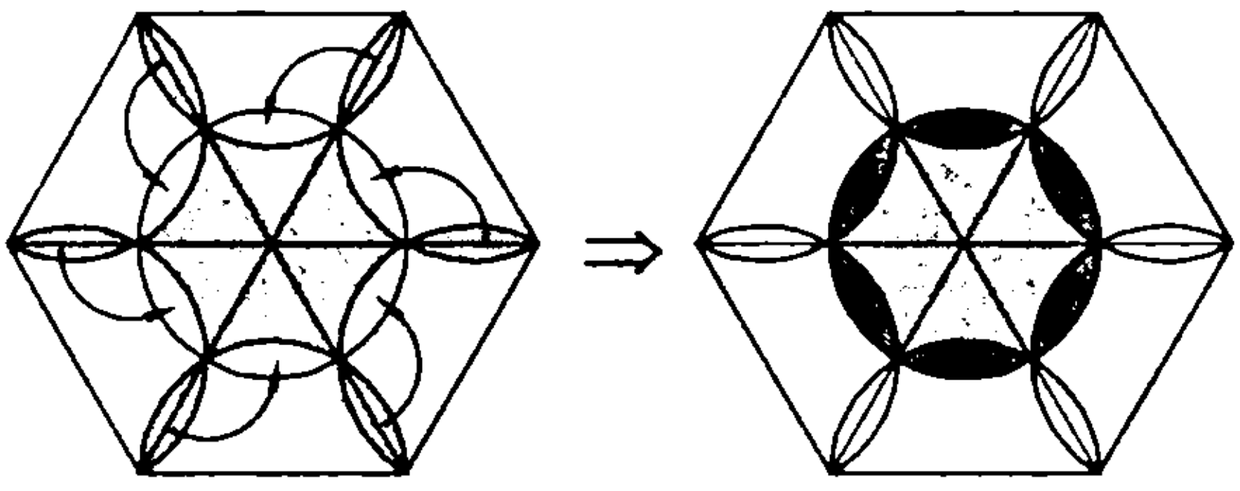
Problema 9

En la figura mostrada, tomando como diámetros los lados de un hexágono regular, se construyen semicircunferencias. Hallar el área de la región sombreada.

corregir según original

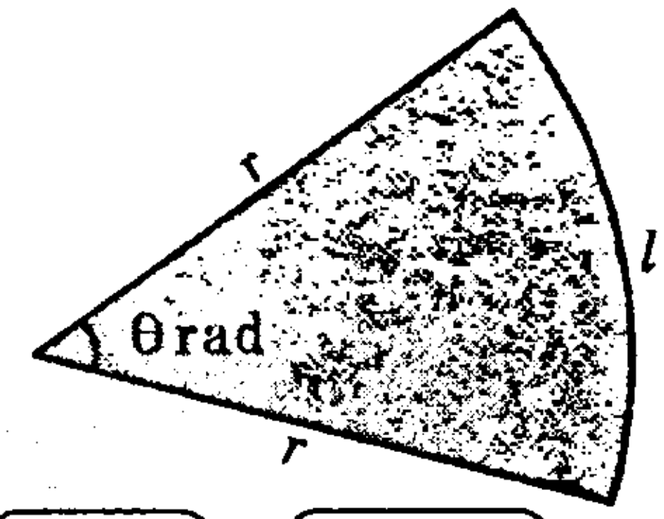


Resolución

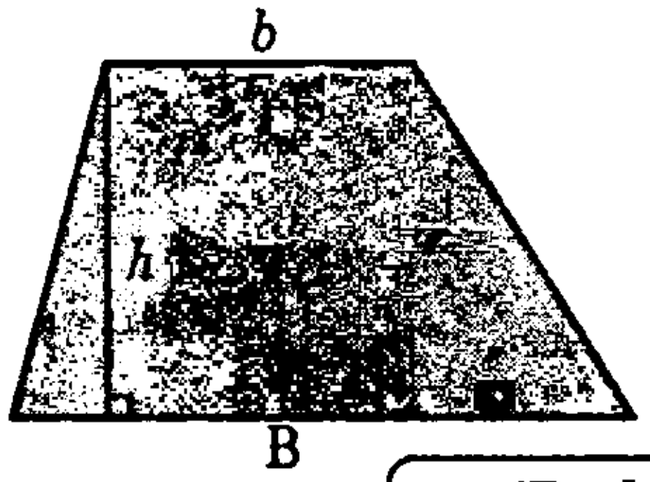


La región sombreada resulta un círculo de radio igual a a. Por tanto el área pedido es πa^2

Rpta.: πa^2



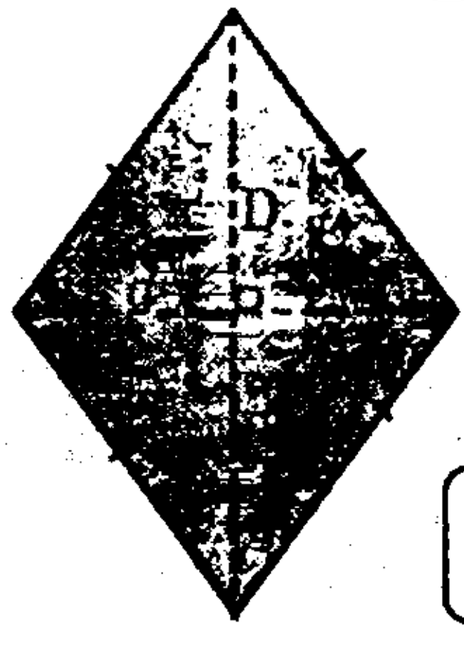
$$S = \frac{lr}{2} \qquad S = \frac{\theta r^2}{2}$$



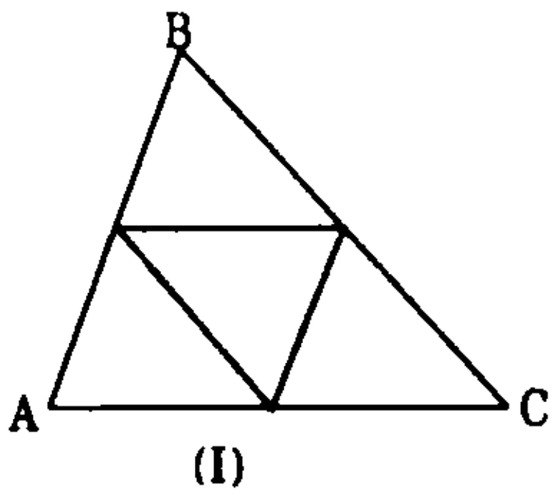
$$S = \frac{(B+b)h}{2}$$

Problema 10

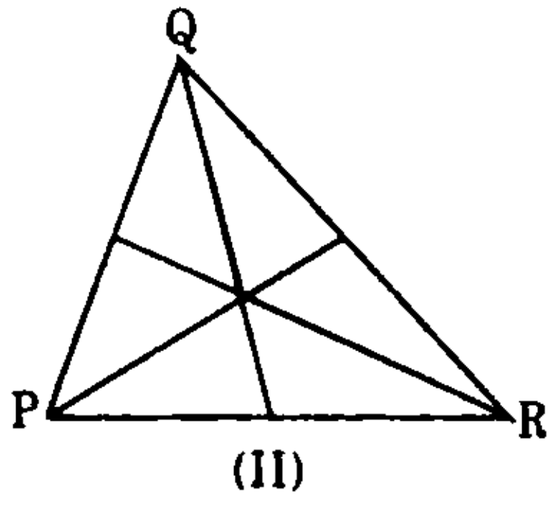
Los triángulos ABC y PQR tienen igual área. Si el área de la región sombreada de la figura (I) es 6 cm^2, ¿Cuál es el área de la parte sombreada de la figura (II)? (Los puntos tomados en cada lado de los triángulos, son puntos medios).



$$S = \frac{Dd}{2}$$



(I)



(II)

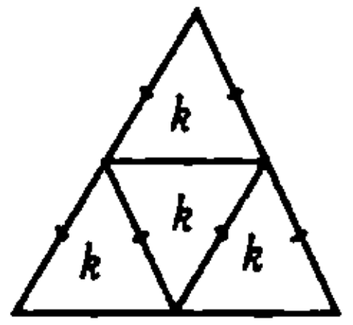
Resolución

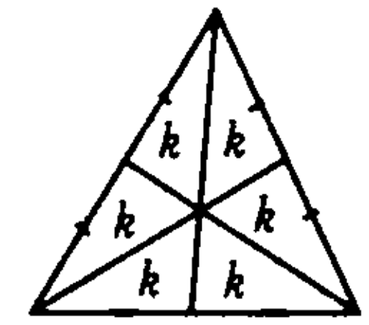
- En la fig. (I) la región sombreada de área 6 cm² es la cuarta parte del triángulo ABC, entonces el área de éste es **4×6 = 24 cm²**.
- En la fig. (II) el área del triángulo PQR es 24 cm². (por ser igual al de ABC) y la región sombreada es la tercera parte, por tanto su área es **24÷3 = 8 cm²**?

Rpta.: 8 cm²

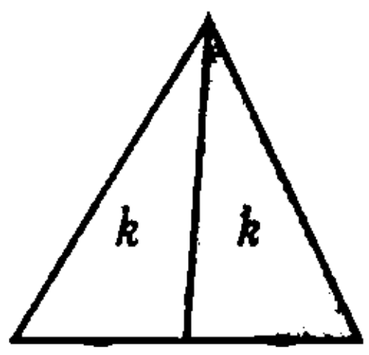
TEN PRESENTE

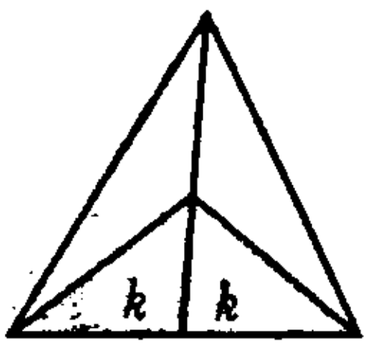
Propiedades de las áreas del triángulo





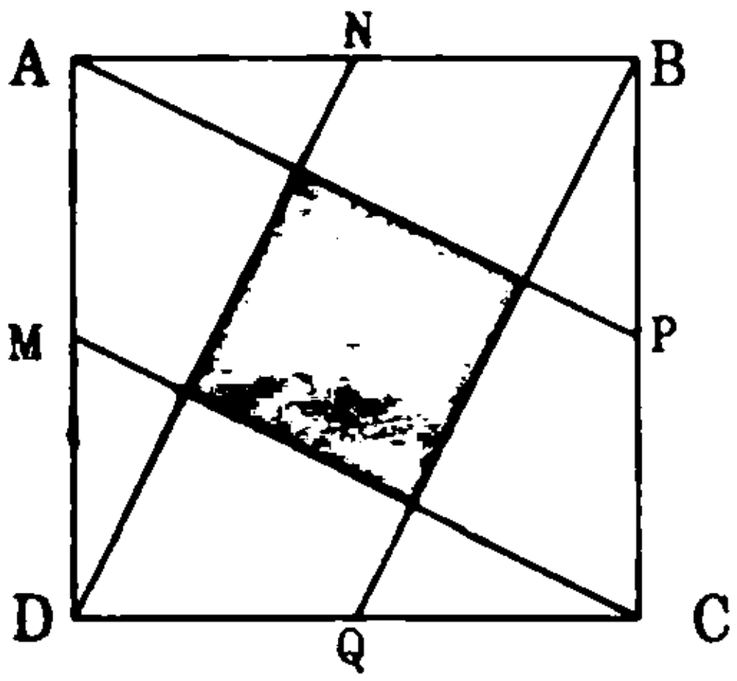
$$k = \frac{S\Delta ABC}{4} \qquad k = \frac{S\Delta ABC}{6}$$

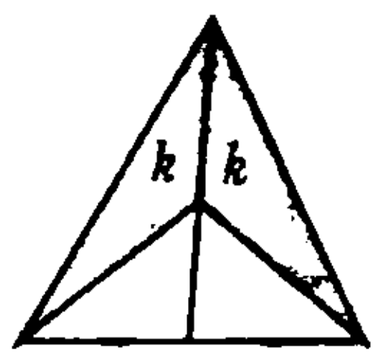


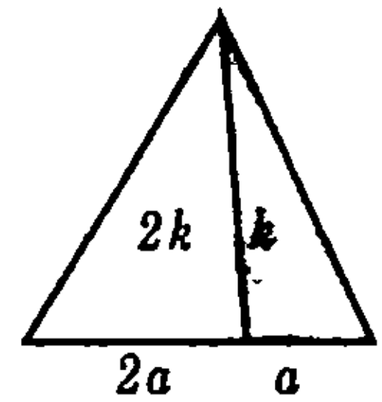


Problema 10

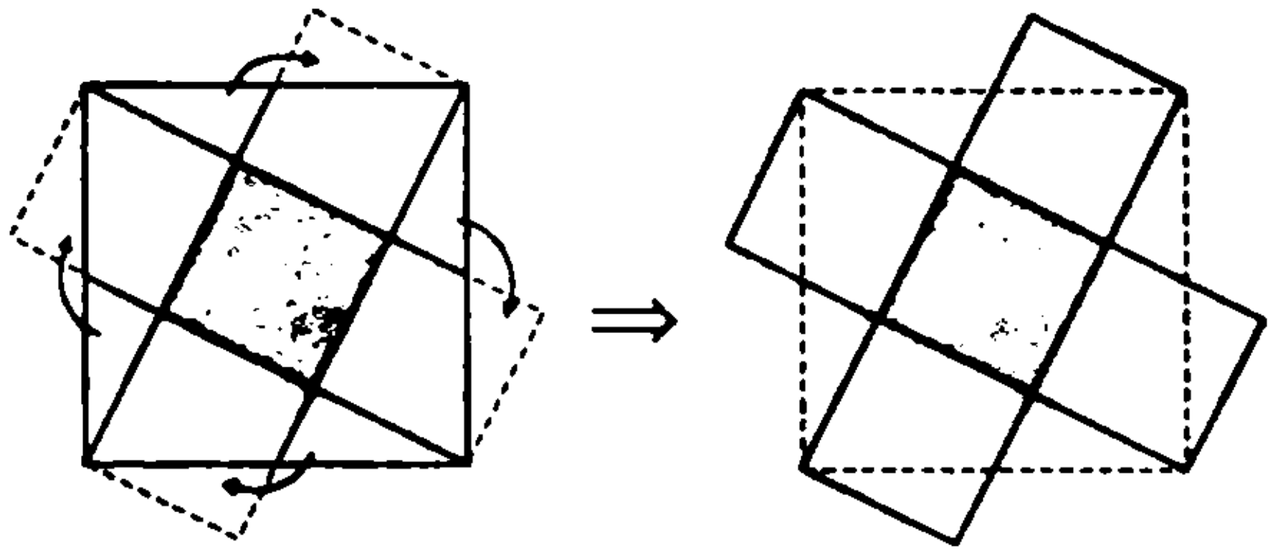
El área del cuadrado ABCD mide 20 cm². ¿Cuál es el área del cuadrado sombreado? MNPQ son puntos medios de los lados del cuadrado.

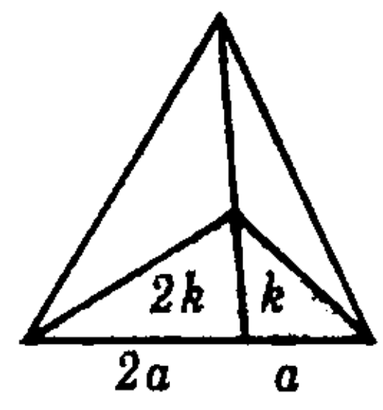


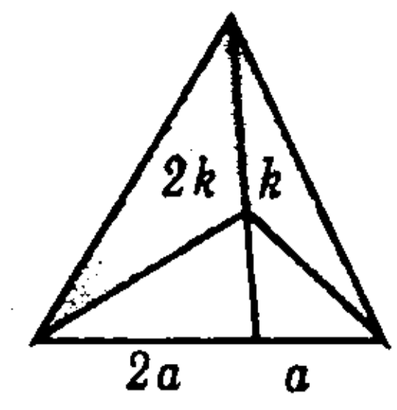




Resolución



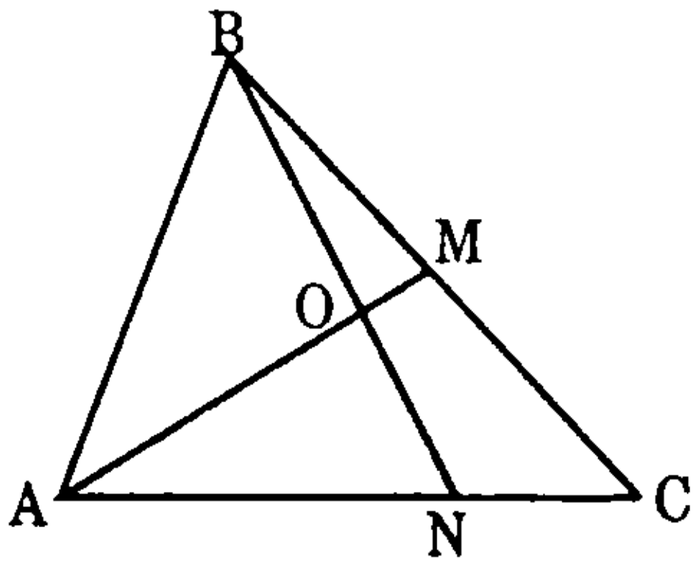




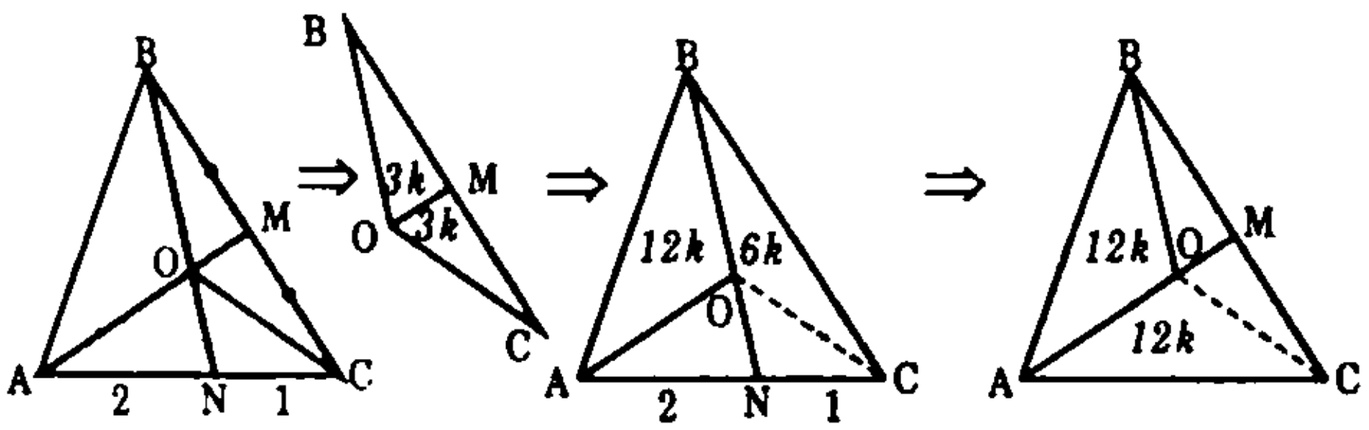
El cuadrado original se transforma en 5 cuadraditos iguales, el área de cada uno de ellos es la quinta parte del área del cuadrado: **20÷5 = 4 cm²**

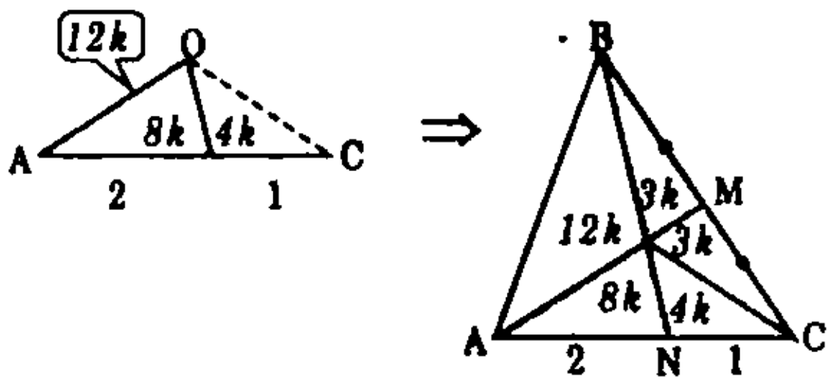
Problema 11

El área del triángulo ABC es 60 cm². BM = MC y AN = 2NC ¿Puedes calcular el área de la parte sombreada?



Resolución





$30k = 60 \Rightarrow \boxed{k = 2}$

Por lo tanto:

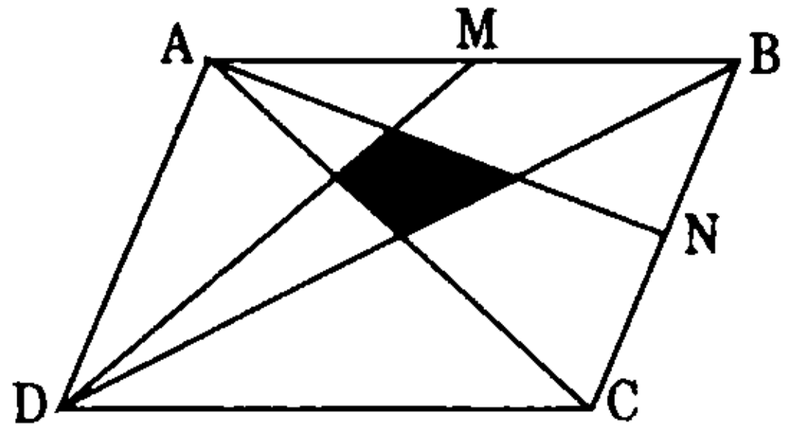
$3k + 8k = 11k$

$11k = 11(2) = 22$

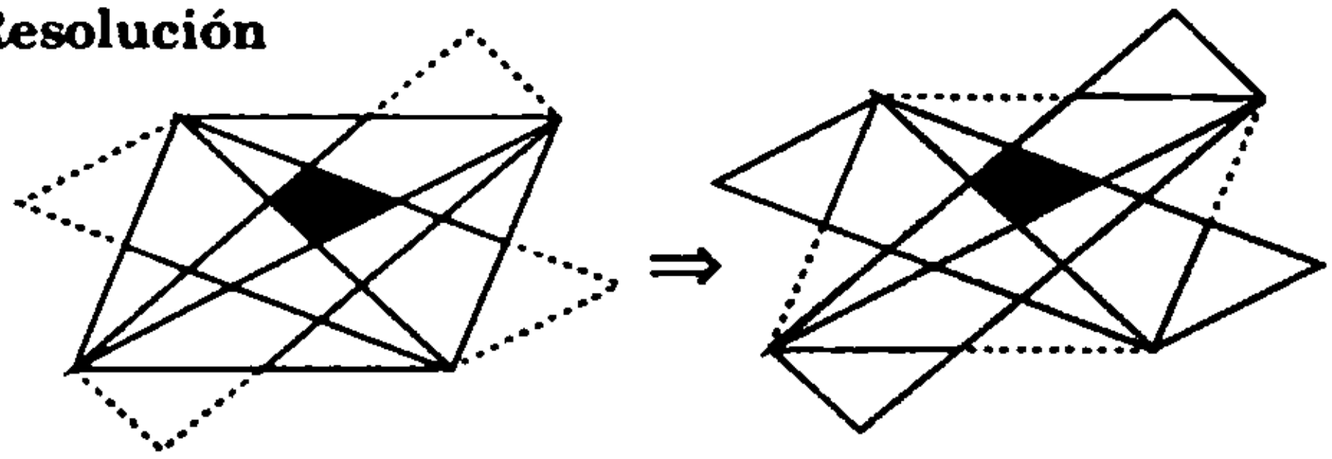
Rpta.: 22 cm²

Problema 12

El área del paralelogramo ABCD es 40 cm². ¿Cuál es el área de la parte sombreada?. M y N son medios de los lados del paralelogramo.



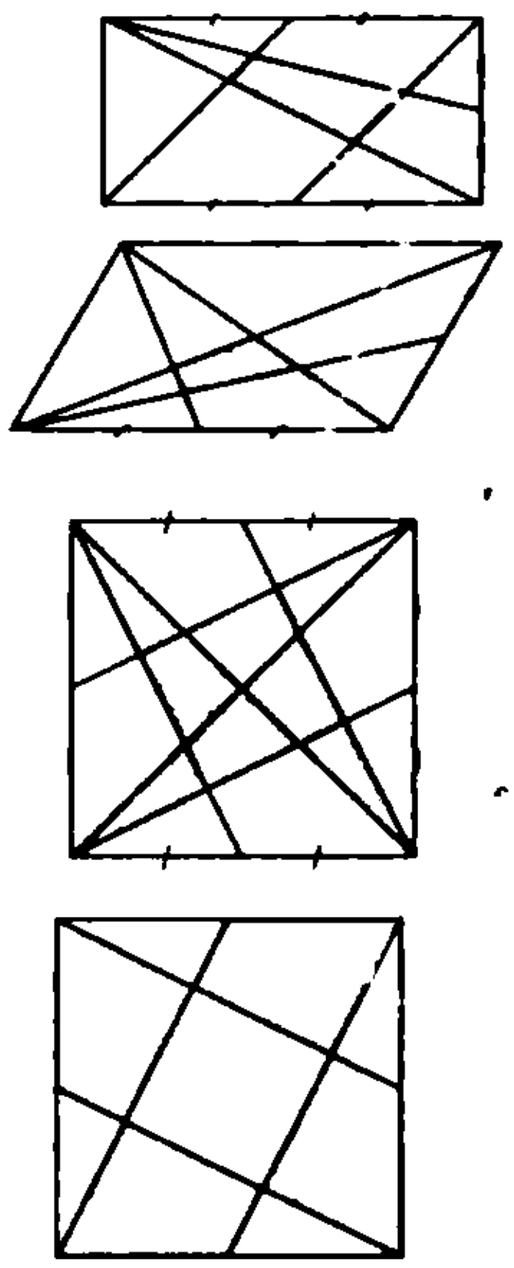
Resolución



$$S = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}(40)\right] = 2\ cm^2$$

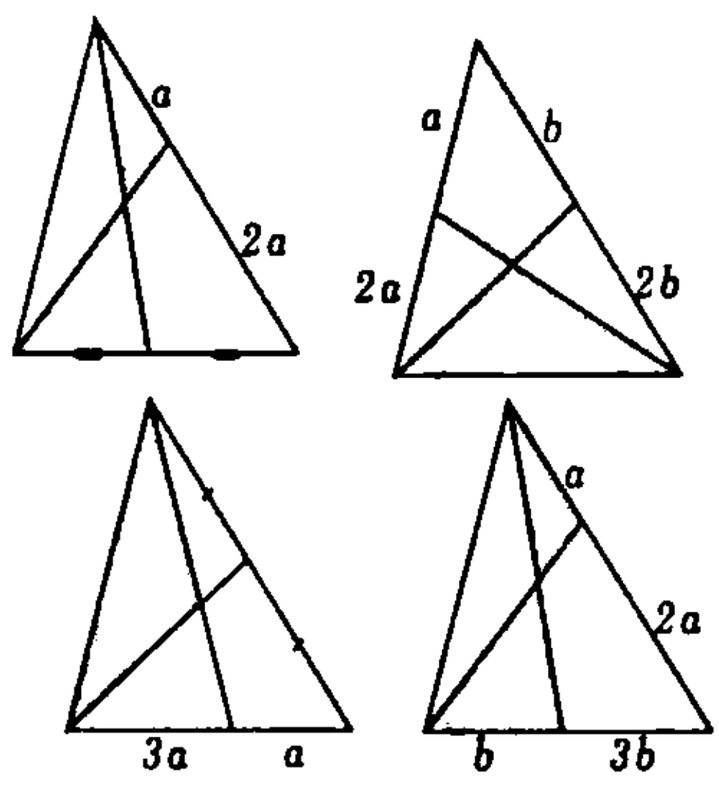
EJERCICIO 2

Utilizando la propiedad mostrada en la resolución del problema 10; Calcula el área de las regiones sombreadas en cada figura. En todos los casos, el área del cuadrilátero mayor es 120 cm².



EJERCICIO 3

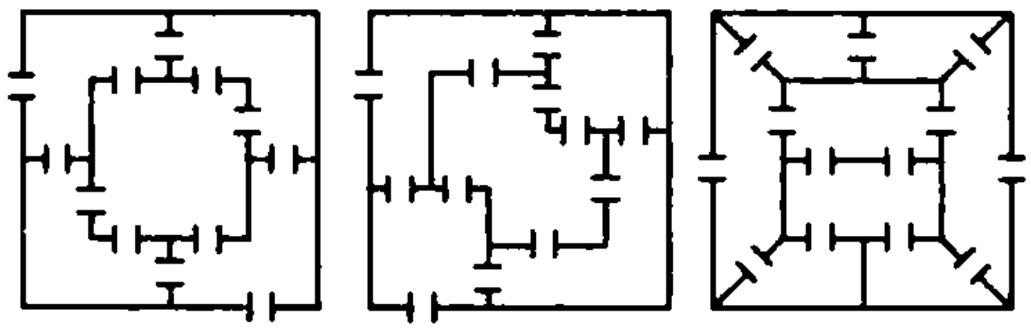
Hallar el área de las regiones sombreadas. En cada caso el área del triángulo mayor es 84 cm².



Problemas Resueltos

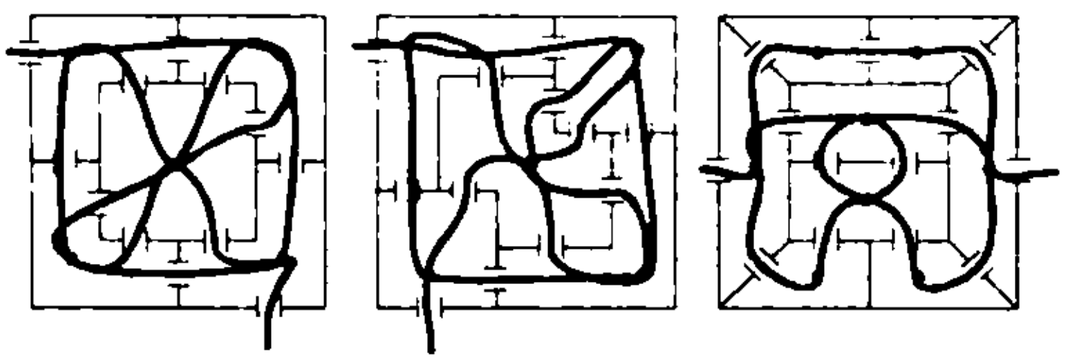
Problema 1

Aquí mostramos los planos de ciertos departamentos. ¿Cuál o cuáles de ellos se prestan para pasar por todas las puertas de una sola vez, empezando y terminando afuera?



(1) (2) (3)

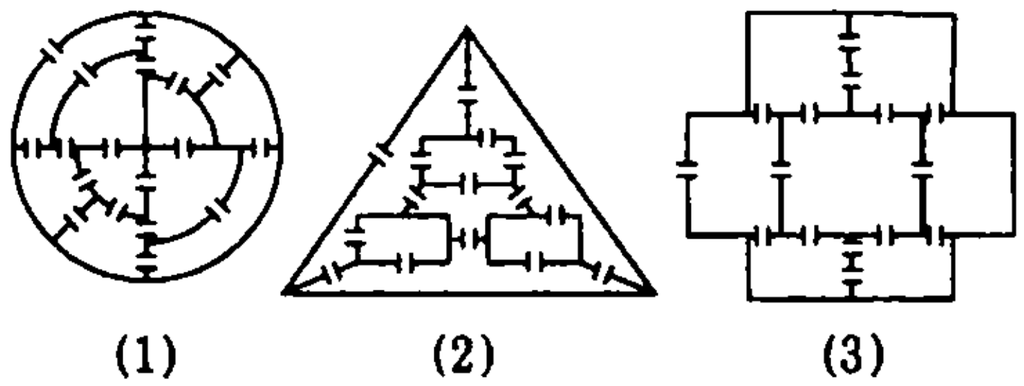
Resolución



Las curvas en líneas continuas, las tres, son recorribles, es decir, se pueden dibujar de un solo trazo y sin levantar el lápiz del papel.

Problema 2

A continuación se muestra los planos de tres museos muy peculiares por su diseño. ¿Será posible pasar por todas las puertas de cada museo exactamente una vez? No interesa donde se empieza.



(1) (2) (3)

Resolución

Para entrar por una puerta y salir por otra, la habitación debe tener un número par de puertas. En cada plano, todas las habitaciones tienen un número par de puertas excepto una, se debe empezar de ésta o empezar de afuera y terminar en ella.

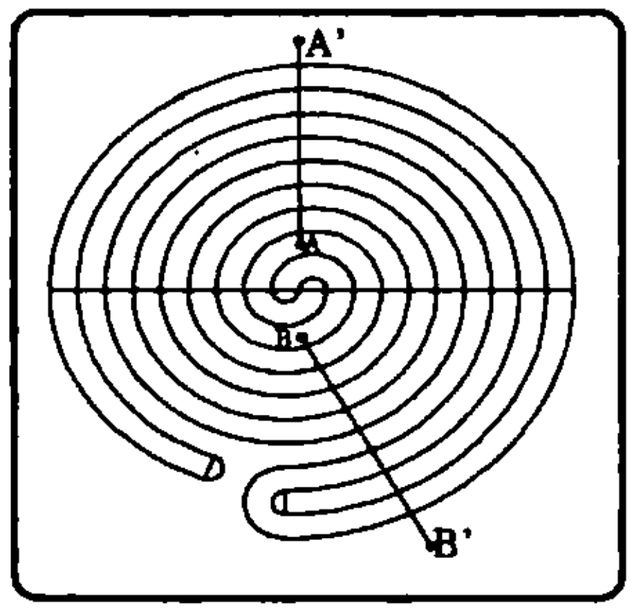
Problema 3

La figura muestra una curva simple cerrada y dos puntos A y B. ¿Están fuera o dentro de la curva?

Resolución

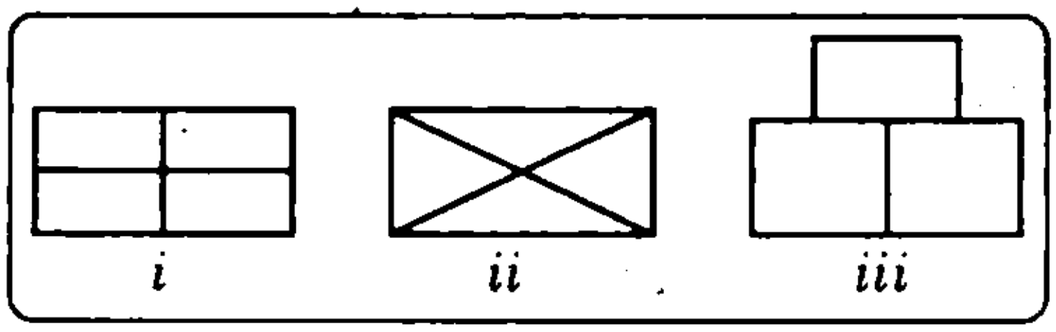
• La línea A A' corta un número par de curvas (8); entonces, tanto A' como A están fuera.

• La línea B B' corta un número impar de curvas (9); en consecuencia, como B' está fuera, B está dentro.

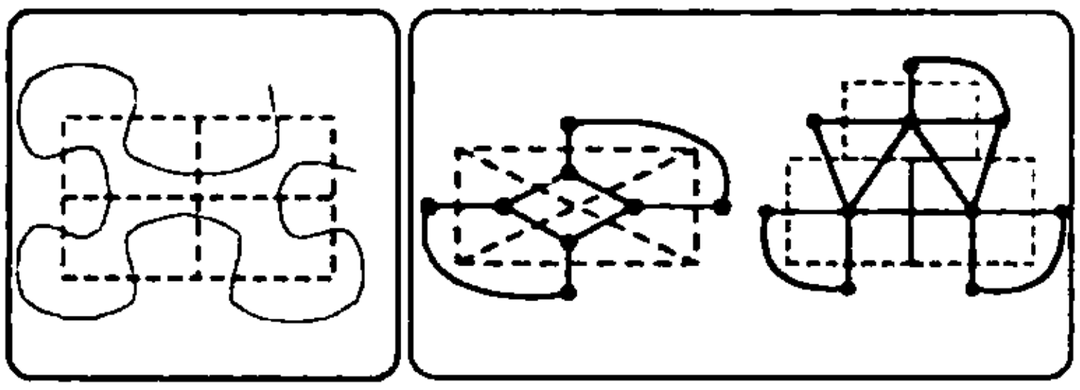


Problema 4

¿En cuáles de las siguientes figuras, se puede dibujar una curva simple y abierta que pase exactamente una vez por cada uno de los segmentos de recta de la figura? (Una curva es simple si no se cruza a sí misma y los segmentos de recta son los que unen dos puntos sucesivos)



Resolución



Es posible

En estos dos casos no es posible, porque las figuras en líneas continuas no son recorribles.

Una figura es **recorrible** cuando se puede dibujar de un solo trazo y sin levantar el lápiz del papel.

Problema 5

En una fiesta participaron 4 varones y 5 mujeres, todos ellos bailaron en parejas (hombre - mujer) al menos una pieza, pero una sola vez con cada persona que tomaron de pareja para bailar. Terminada la fiesta, se supo por los comentarios que: Ana bailó 2 veces; Carlos, 3; Carina 3 veces; Zoila un número par de veces, Luisa un número impar de veces, Darío un número par de veces, Beto 2 veces y Nora 1 vez. Entonces Ernesto bailó:

A) 1 vez **B)** 3 veces **C)** 4 veces
D) 5 veces **E)** 3 ó 5 veces

Resolución:

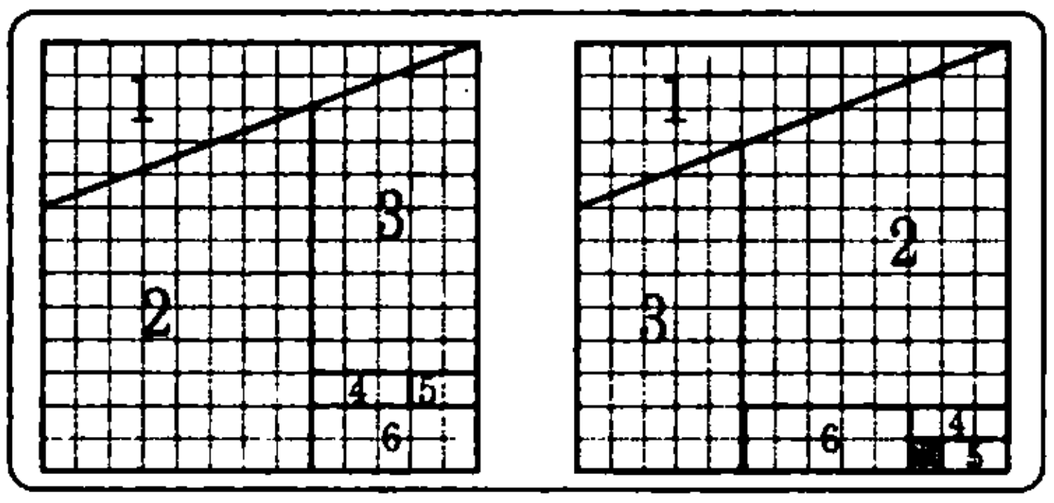
En una fiesta en la que se baila en parejas, el número de personas que bailan con un número impar de personas siempre es par. Puesto que ya son 4 los asistentes que han bailado con un número impar de personas, entonces Ernesto tuvo que bailar con un número par de damas; y la única alternativa que se ajusta es la C.

Rpta.: 4 veces

Problema 6

Paradoja de Curry *

Con el cuadrado de 13 por 13 cuadraditos se forma un "rompecabezas" de 5 piezas tal como la ilustración de la izquierda; en seguida se arma tal como la ilustración de la derecha y verás que desparece un cuadrado.



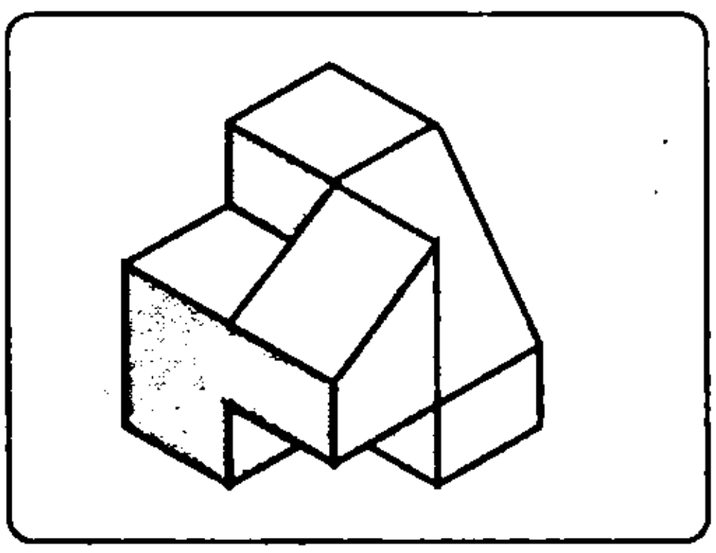
¿Cómo se explica la aparición del cuadrado?

Resolución

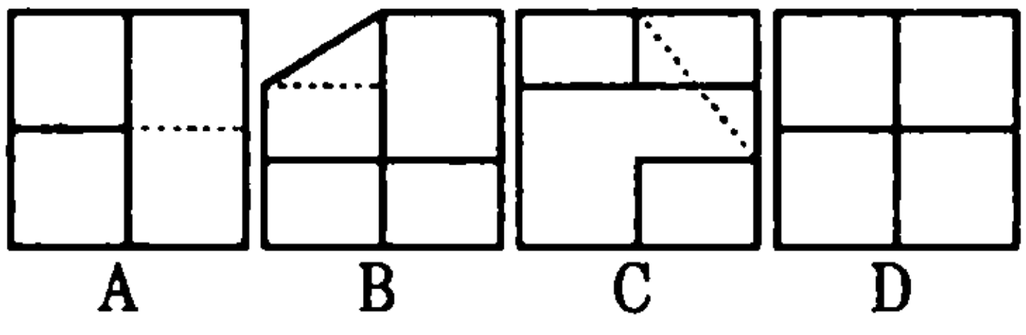
El lado izquierdo de la pieza 3, no es 8 sino 81/13, de modo que al colocar en la nueva ubicación, hace que el cuadrado crezca en 1/13 hacia abajo, de modo que el area del cuadrado crece en $13 \times 1/13 = 1$ cuadradito. El cuadradito parecido compensa el crecimiento del cuadrado.

Problema 7

Se muestra un sólido y cuatro vistas, tres de las cuales corresponden a las vistas frontal, horizontal y de perfil del sólido. Marca aquella que no corresponde a una de estas vistas.



**Inventado por el mago Paul Curry. Nueva York*



Resolución

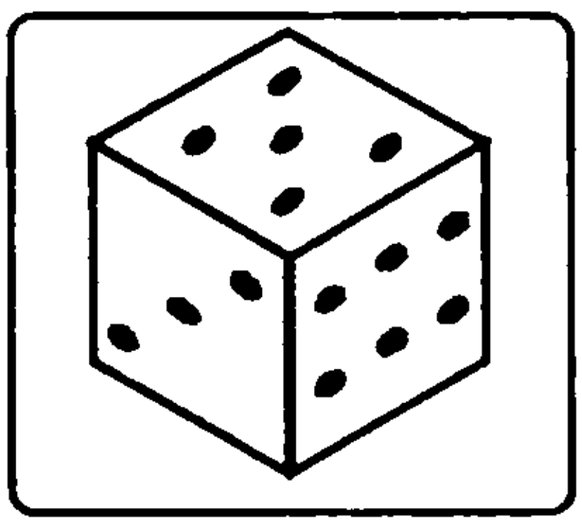
La técnica más recomendable para resolver este problema es dibujar las tres vistas del sólido y comparar con las alternativas e identificar aquella que no corresponde.

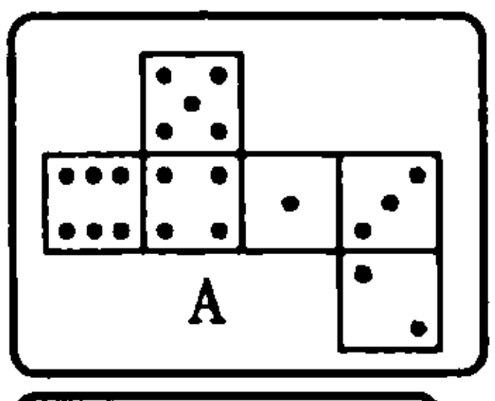
En este problema, la figura **C** es la vista frontal, la **D** es la vista horizontal y la **B** es la de perfil. Por lo tanto la figura A no corresponde a una de las mencionadas del sólido.

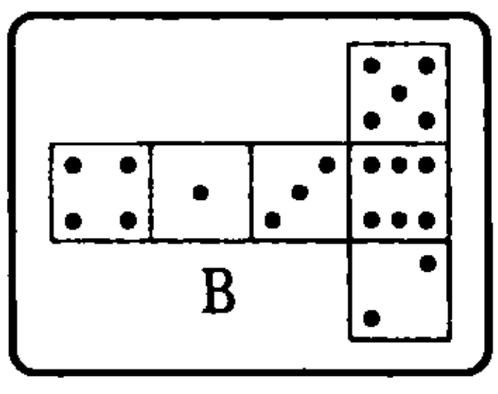
Rpta.: A

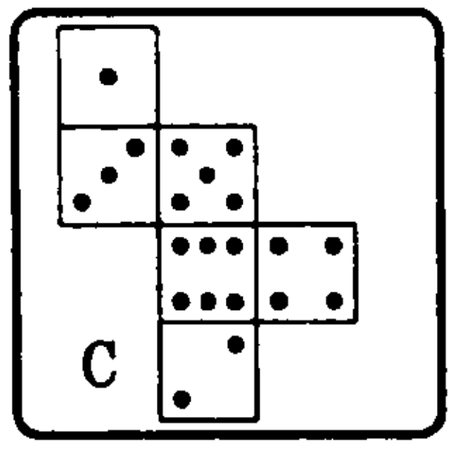
Problema 8

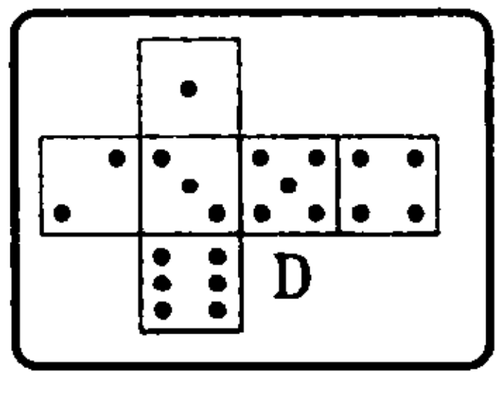
¿Cuál de las figuras signadas con letras no corresponde al desarrollo del dado mostrado.











Resolución

El modo más práctico de resolver este problema es elaborando un dado de cartón o papel, pintar en éste los puntos de acuerdo al dado mostrado y algunos de los desarrollos que ayudarán a ubicar las caras con los puntajes correctos.

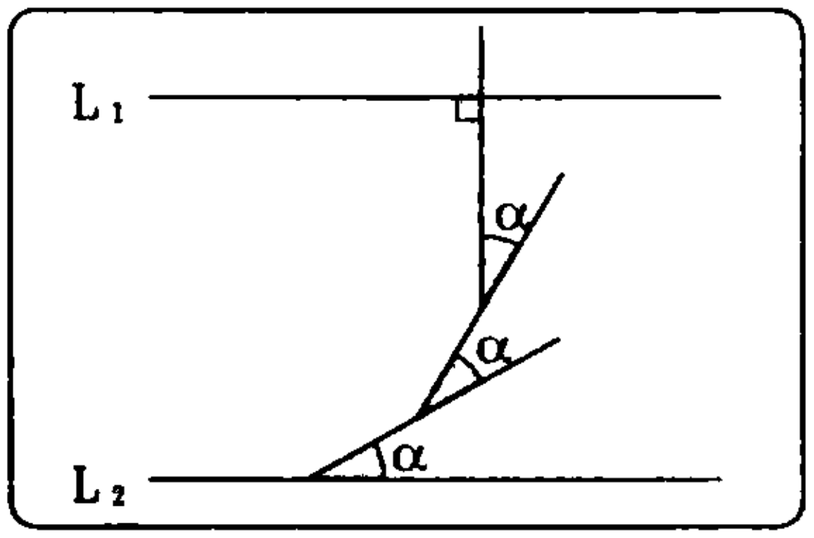
Una vez elaborado el dado, la identificación de los desarrollos es muy sencilla.

Si no deseas elaborar un dado, coge un borrador y pinta en sus caras los puntos como si fuera un cubo.

Rpta.: C

Problema 9

Si $L_1 // L_2$, hallar 2x



Resolución

Prolongando las líneas tenemos

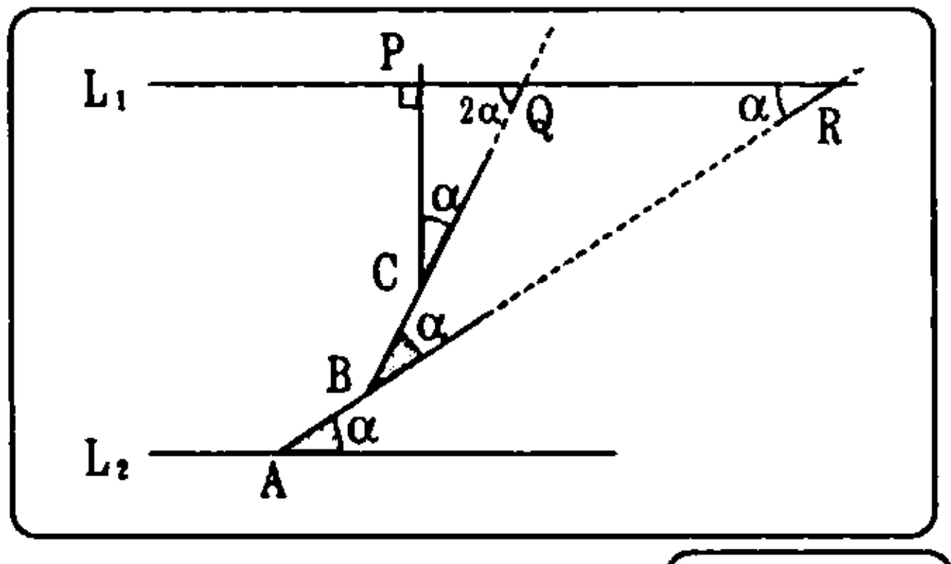
$$m\sphericalangle R = m\sphericalangle A = \alpha$$

$m\sphericalangle PQC = 2\,\alpha$ (ángulo exterior Δ BQR)

Δ QPC:

$$\alpha + 2\alpha = 90°$$

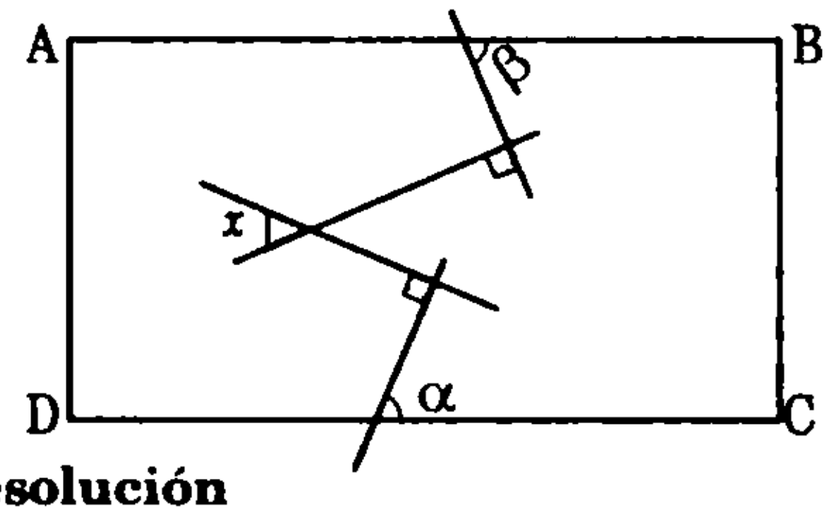
$$\alpha = 30° \Rightarrow \quad 2\alpha = 60°$$



Rpta: 60°

Problema 10

Si A B C D es un rectángulo y $(\alpha + \beta) = 140°$. Hallar "x"



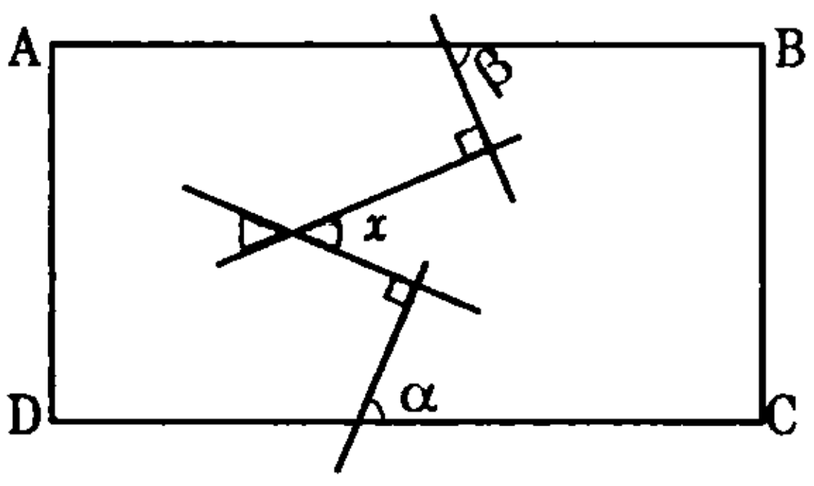
Resolución

$$\sum \sphericalangle_s \ izq. = \sum \sphericalangle_s \ der.$$

$$90° + 90° = \alpha + \beta + x$$

$$180° = 140° + x$$

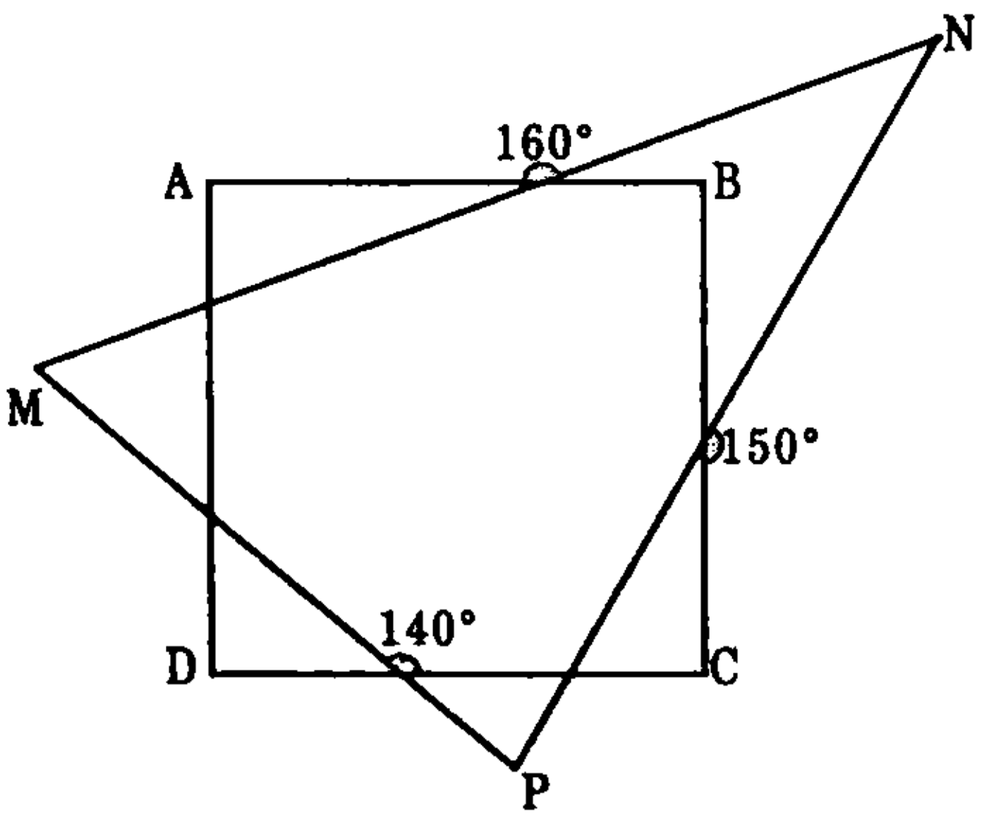
$$x = 40°$$



Rpta.: 40°

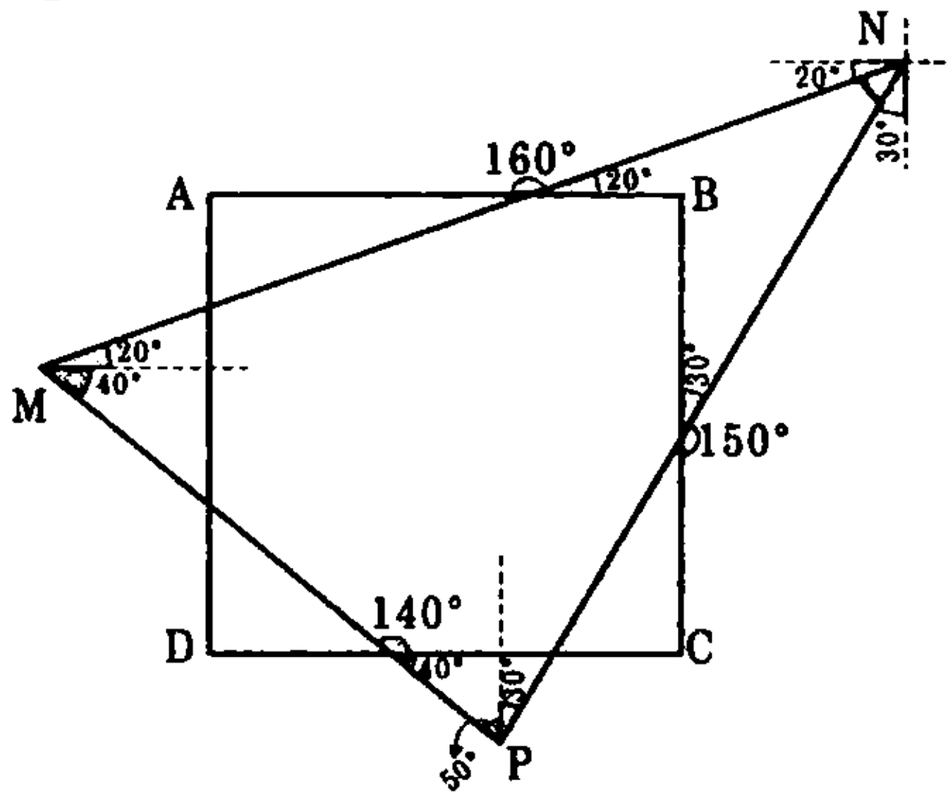
Problema 11

ABCD es un cuadrado. ¿Cuál de los lados del triángulo MNP es mayor?



Resolución

Realizando convenientemente trazos paralelas a los lados del cuadrado en los vértices del triángulo se obtiene lo que se muestra en la figura.



De donde:

$$m\sphericalangle M = 20° + 40° = 60°$$

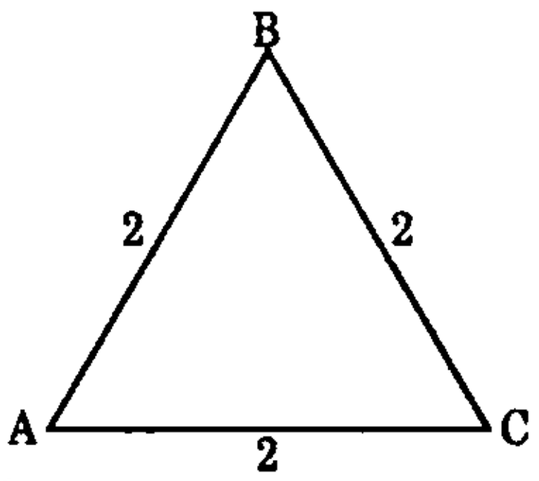
$$m\sphericalangle P = 50° + 30° = 80°$$

$$m\sphericalangle N = 90° - (20° + 30°) = 40°$$

Dado que en un triángulo el lado mayor se opone al ángulo mayor, entonces, el lado mayor es MN.

Problema 12

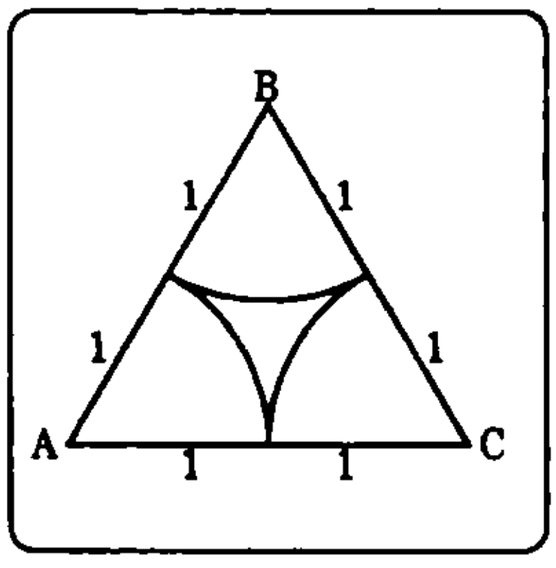
En el interior del triángulo equilátero ABC de lado 2 cm, se eligen 5 puntos. ¿Cuántos puntos como mínimo distarán menos de 1 cm?



Resolución

Dividiendo el triángulo como se muestra en la figura, disponemos sólo de 4 regiones, en el interior de cada una de los cuales podemos

elegir 1 punto, de tal suerte que disten entre ellos más de 1 cm. El quinto punto, necesariamente tenemos que elegir en el interior de una de las regiones, que con el punto ya elegido anteriormente va distar menos de 1 cm.



Rpta.: 2 puntos

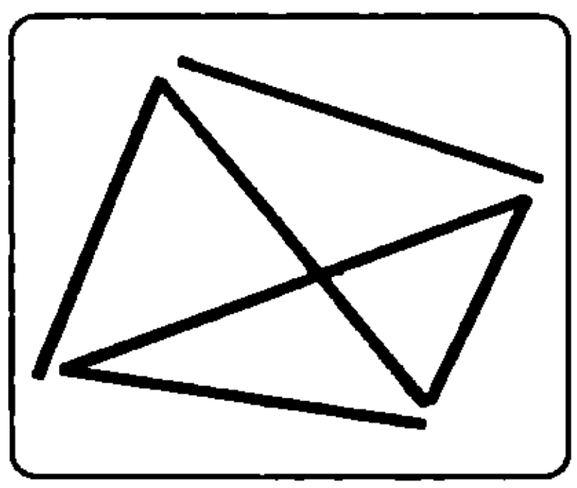
Problema 13

Corte mínimo

Con un alambre de 24 cm de longitud, deseo construir un sólido regular que tenga el menor número de caras posibles. ¿Cuántos cortes debo darle al alambre, de modo que cada arista del sólido sea de un solo alambre.

Resolución

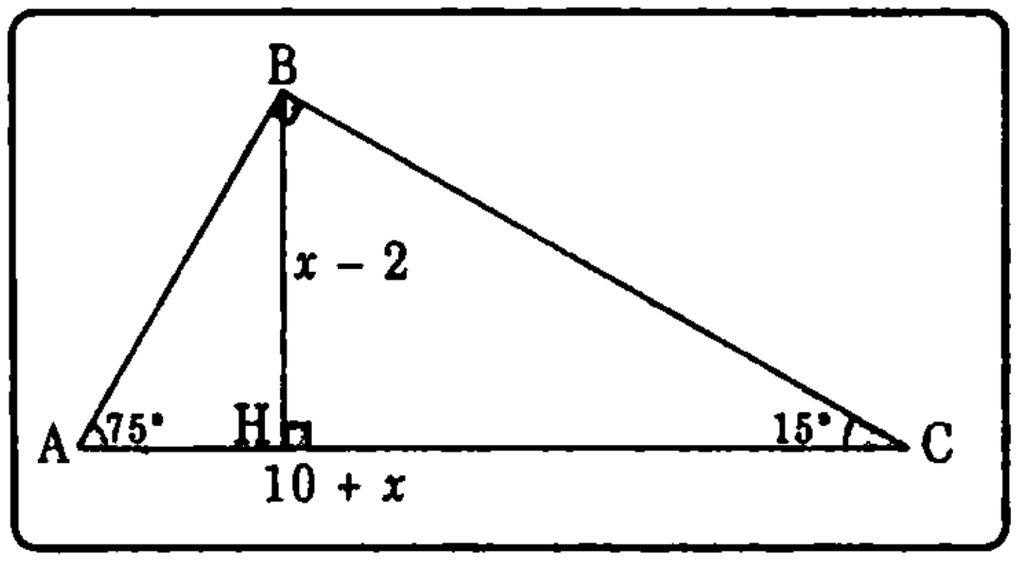
El sólido regular de menor número de caras es el tetraedro.



Basta un solo corte para construirlo

Problema 14

Calcular "x" en la figura.



Resolución

Propiedad: $AC = 4(BH)$

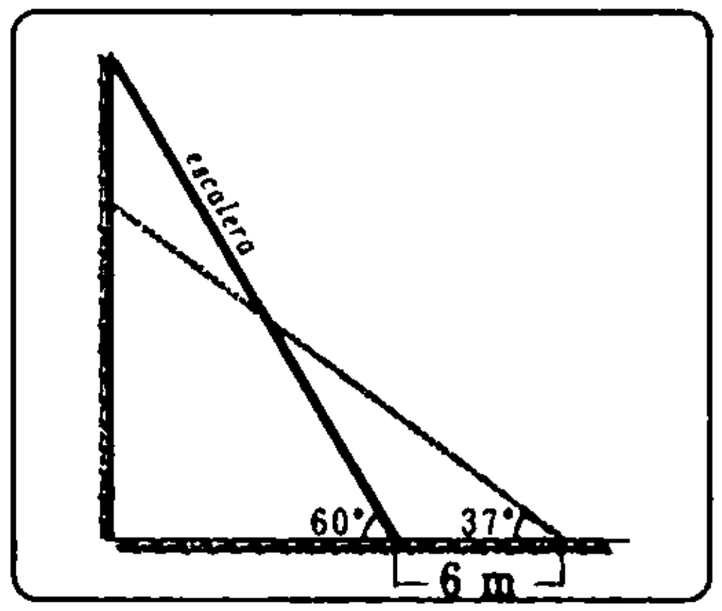
$10 + x = 4(x - 2)$

$10 + x = 4x - 8 \Rightarrow \quad x = 6$

Rpta.: 6

Problema 15

La figura muestra una escalera apoyada a una pared vertical formando 60° con el piso. Cuando el pie de esta escalera se aleja 6 metros de la pared, resulta que forma un ángulo de 37° con la horizontal. Determinar la longitud de la escalera.



Resolución

Sea:

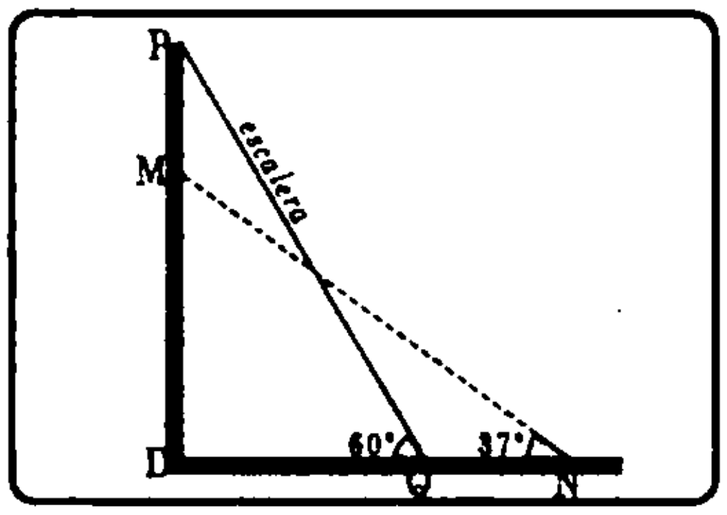
MN = $10k$ = PQ = Longitud de la escalera

DN = $8k$ (Δ DMN $\rightarrow$ Notable)

DQ = $5k$ (Δ DPQ $\rightarrow$ Notable)

QN = DN – DQ

$6 = 8k - 5k \Rightarrow \quad k = 2$

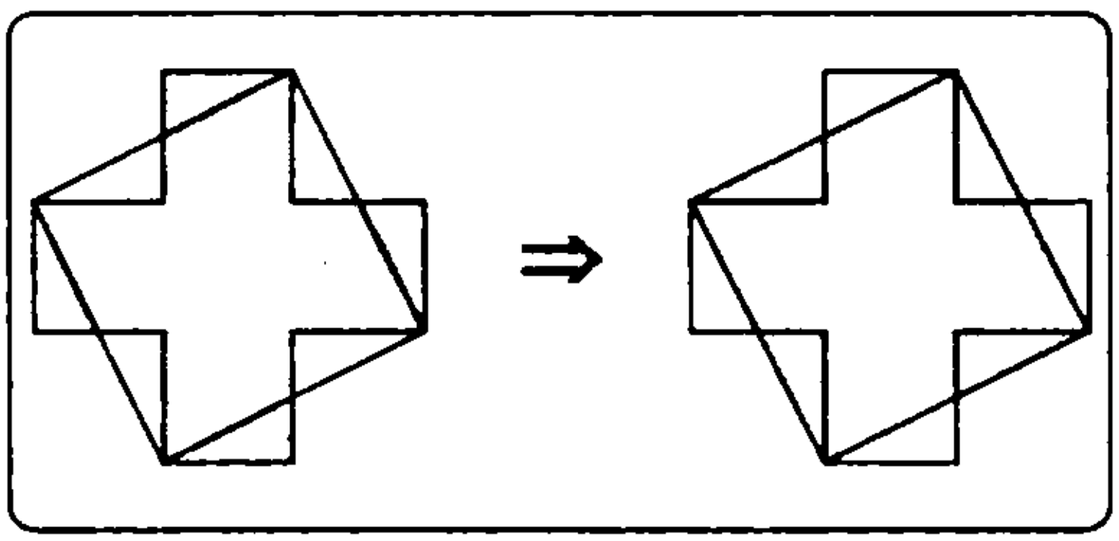


Luego: MN = 10(2) = 20 m

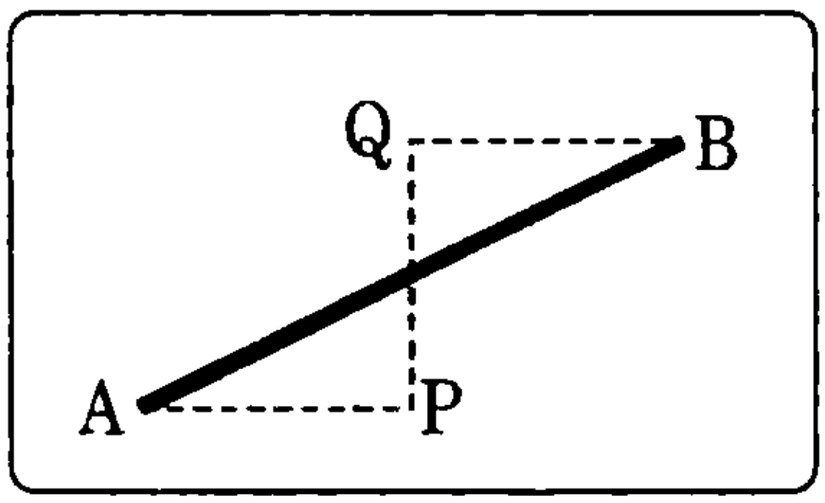
Rpta.: 20 metros

Problema 16

Esta cruz se ha transformado en un cuadrado manteniendo el área invariable. ¿Qué pasa con el perímetro: aumenta o disminuye?



Resolución



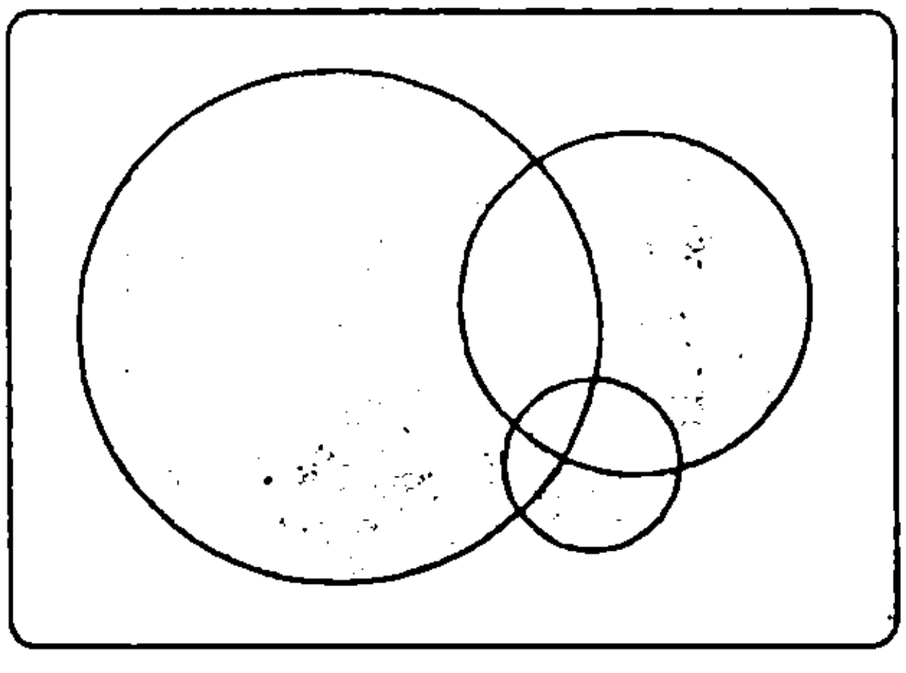
AB reemplaza a APQB

AB más corto que APQB

∴ El perímetro disminuye.

Problema 17

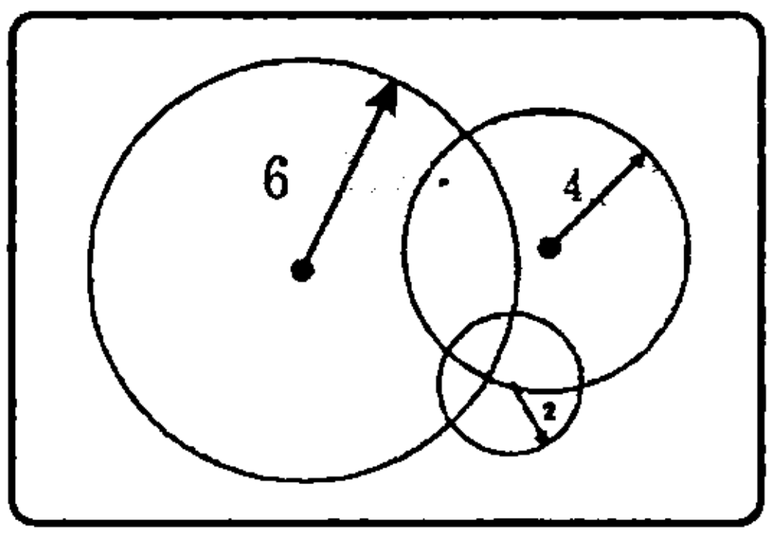
Los radios de los círculos son 6 cm, 4 cm y 2 cm respectivamente. ¿Cuál es el perímetro de los sectores sombreados?



Resolución

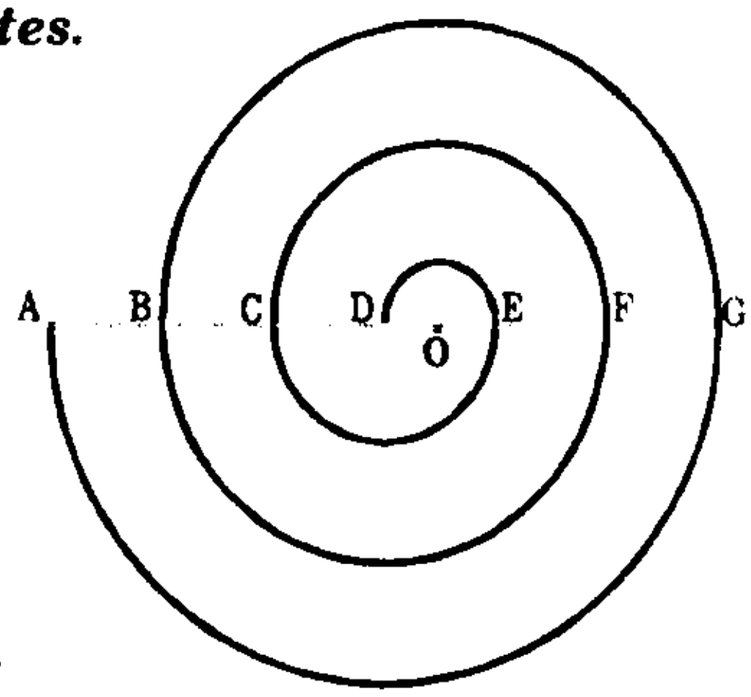
El perímetro de los sectores sombreados es el mismo que el de los tres círculos:

$2\pi(6) + 2\pi(4) + 2\pi(2) = 24\pi$ ***Rpta.: 24π***



Problema 18

Hallar la longitud de la espiral formada por semicircunferencias con diámetros en el segmento AG de longitud 12 cm. Los puntos ubicados en AG son equidistantes.



Resolución

Los radios de las semicircunferencias son respectivamente 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm y 6 cm; en consecuencia la longitud del espiral es:

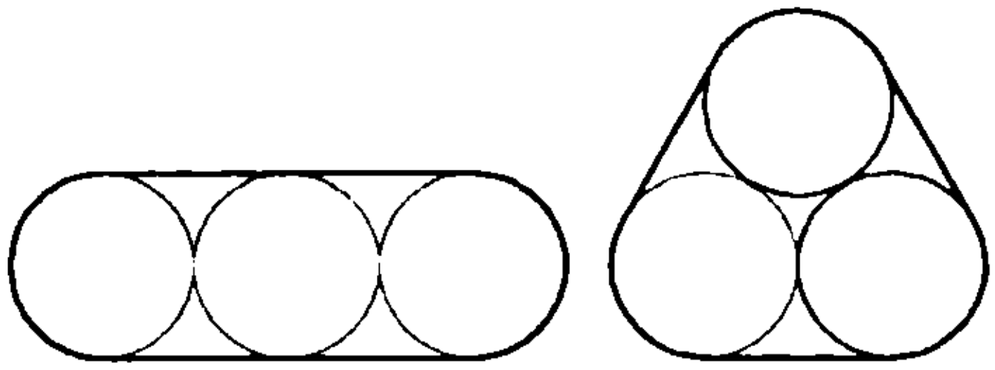
$$L = \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) + \pi(4) + \pi(5) + \pi(6)$$

$$L = 21\pi \text{ cm}$$

Rpta.: 21π

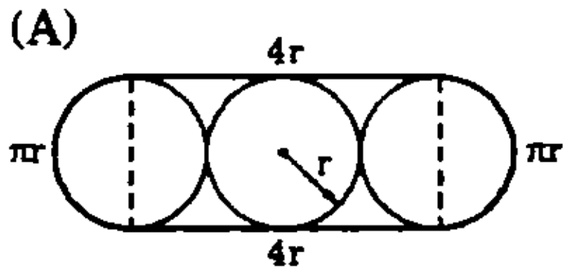
Problema 19

¿En cuál de las formas se necesita más cuerda para atar tres cilindros de igual diámetros?

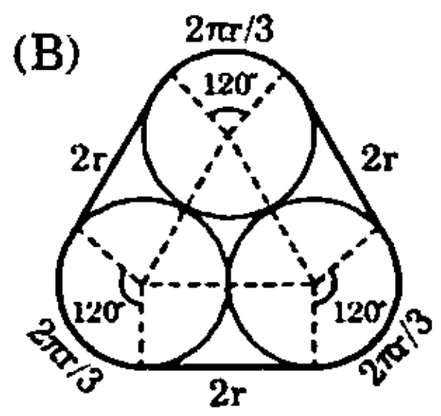


(A) (B)

Resolución



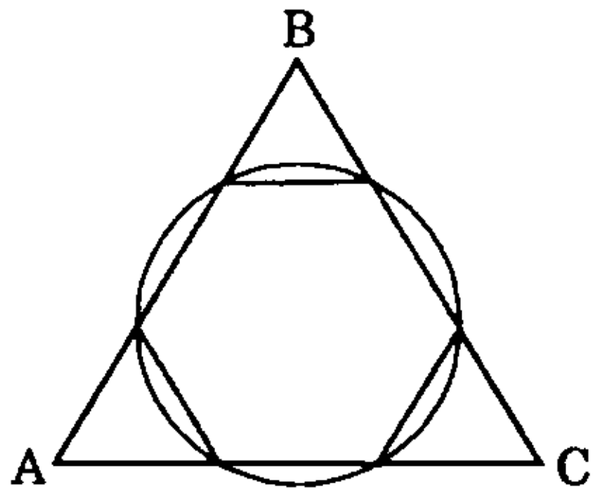
$P = 8r + 2\pi r$



$P = 6r + 2\pi r$

Problema 20

Los lados del triángulo equilatéro ABC se divide en 3 partes iguales; uniendo consecutivamente los puntos de división se forma un hexagono regular. El perímetro del hexágono y el triángulo suman 30 cm. ¿Cuál es la longitud de la circunscrita al hexágono?



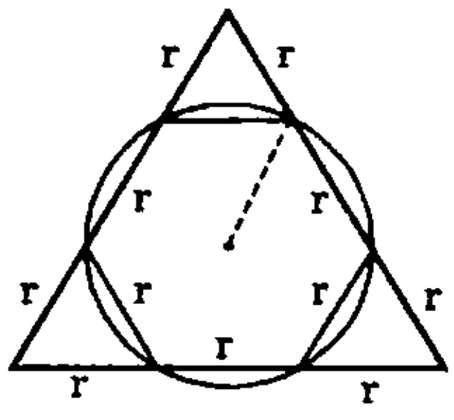
Resolución

Del dato:

$6r + 9r = 30 \Rightarrow r = 2$

- Longitud de la circuferencia de radio r:

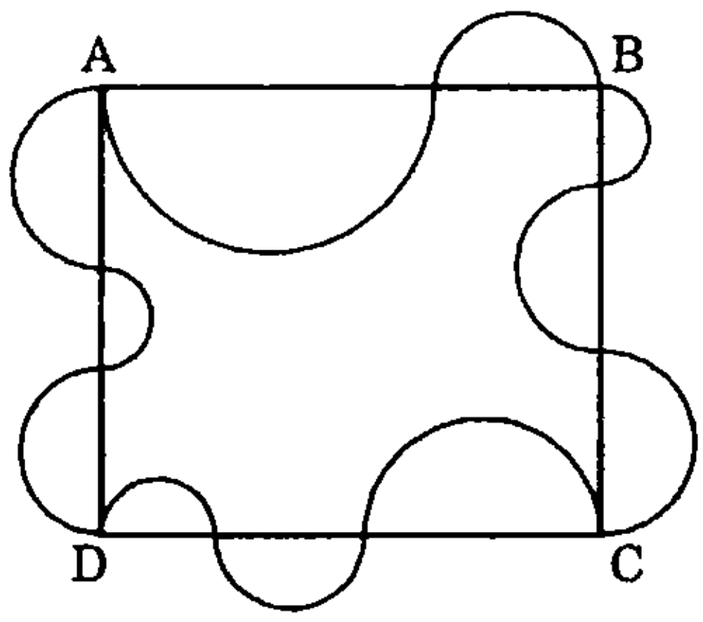
$2\pi r = 2\pi(2) = 4\pi$



Rpta: 4π

Problema 21

Cada lado del cuadrado ABCD mide 3 cm. ¿Cuál es el perímetro de la superficie sombrada? Las figuras formadas en el perímetro del cuadrado son semicírculos.



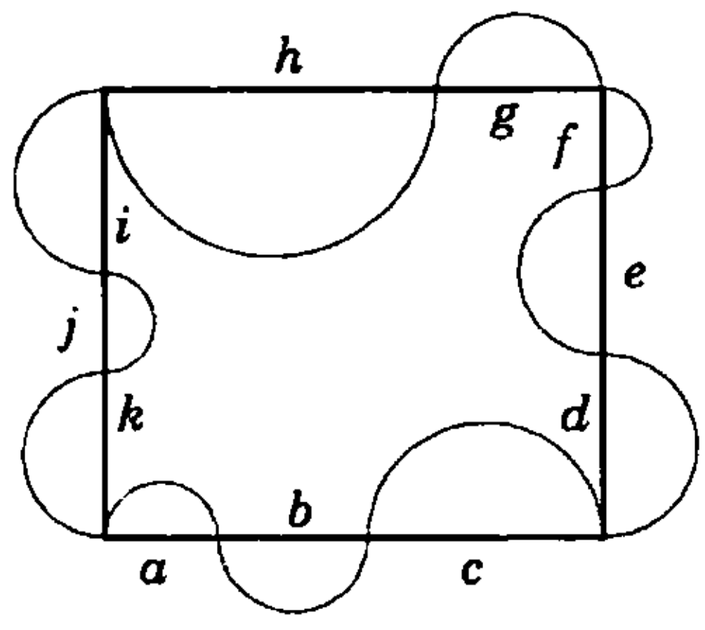
Resolución

- La longitud de una semicircunferencia es $\frac{D\pi}{2}$ donde D es el diámetro.
- Perímetro de la región sombreada:

$$P = \frac{\pi a}{2} + \frac{\pi b}{2} + \ldots + \frac{\pi k}{2}$$

$$P = \frac{\pi}{2}(\underbrace{a + b + \ldots + k}_{4(3)})$$

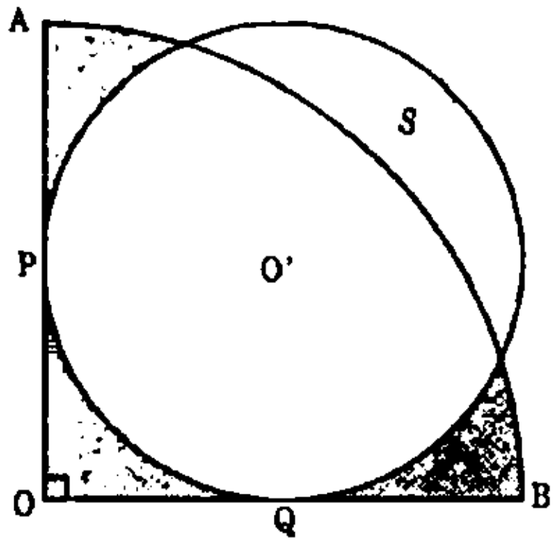
$P = 6\pi$ cm



Rpta.: 6π

Problema 22

P y Q son puntos medios de los lados del cuadrante AOB. El área de la región signado con S es 5 cm². El área de las regiones sombreadas en el interior del cuadrante es:



Resolución

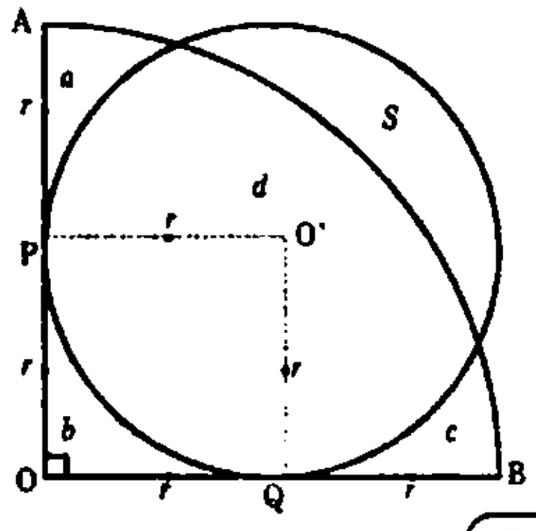
- $d + s = \pi r^2$ (1)

- $d + a + b + c = \dfrac{\pi(2r)^2}{4} = \pi r^2$ (2)

(1) = (2)

$$d + a + b + c = d + \underbrace{S}_{5}$$

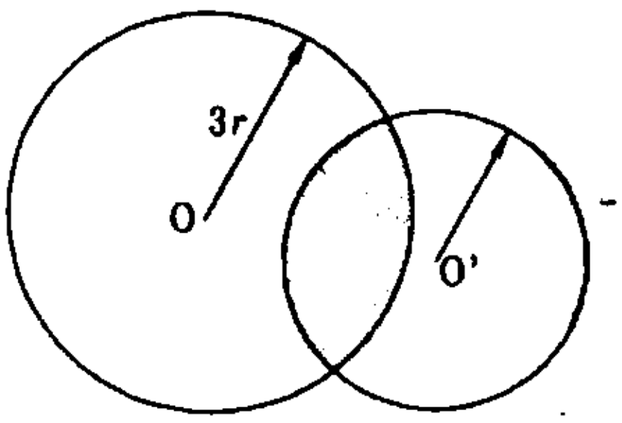
$$a + b + c = 5\ \text{cm}^2$$



Rpta.: 5 cm²

Problema 23

El área de la región cubierta por los dos círculos es $12\pi r^2$ ¿Cuál es el área de la región sombreada?

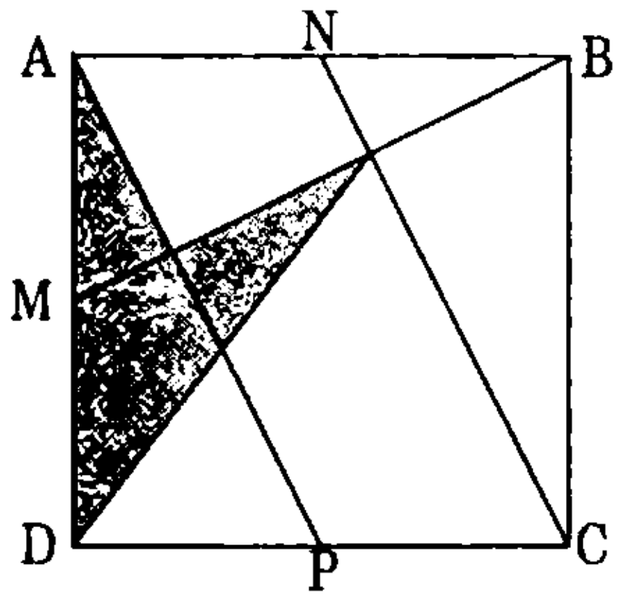


Al sumar las áreas de los dos círculos resulta $\pi(3r)^2 + \pi(3r)^2 = 13\pi r^2$ que resulta mayor que el área cubierta por ambos ($12\pi r^2$), porque se está "repitiendo" el área de la parte sombreada, que debe ser, entonces, de $13\pi r^2 - 12\pi r^2 = \pi r^2$.

Rpta.: πr^2

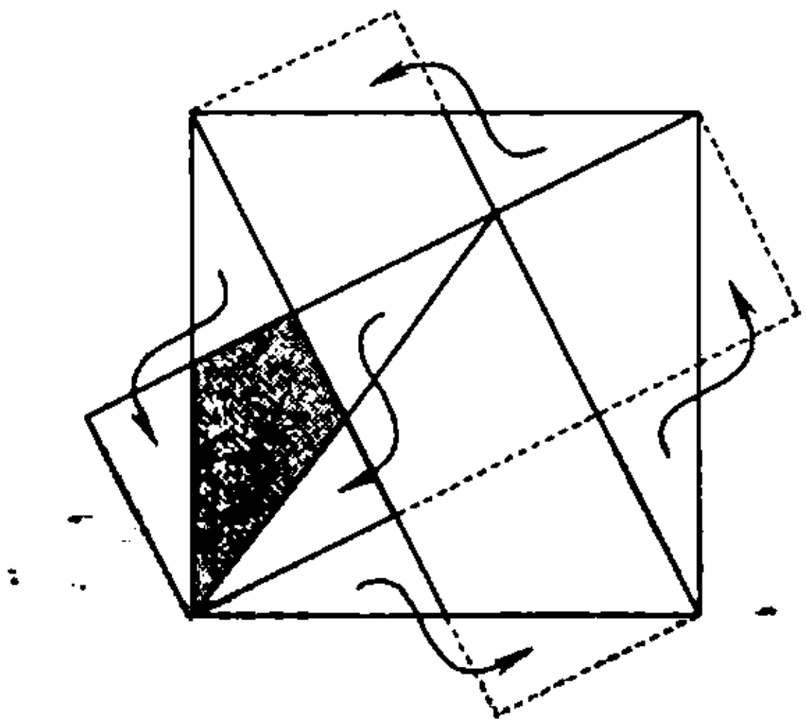
Problema 24

El área del cuadrado ABCD es 10 cm². Los puntos M, N y P bisecan a los lados del cuadrado. Calcular el área del cuadrilátero cóncavo sombreado.



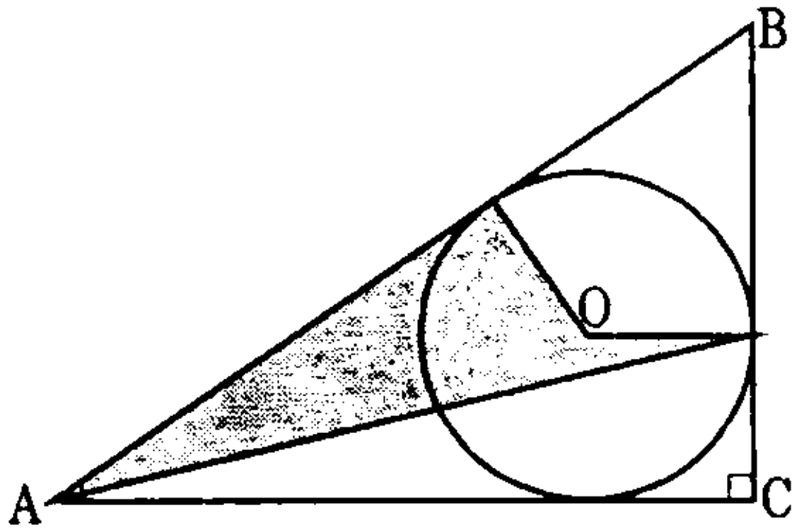
Resolución

El área del cuadrilátero cóncavo sombreado es igual a la quinta parte del área del cuadrado: **10÷5 = 2 cm²**.



Problema 25

Calcular el área del cuadrilátero sombreado. El triángulo ABC es rectángulo, BC = 6, AC = 8 y O es centro del círculo.



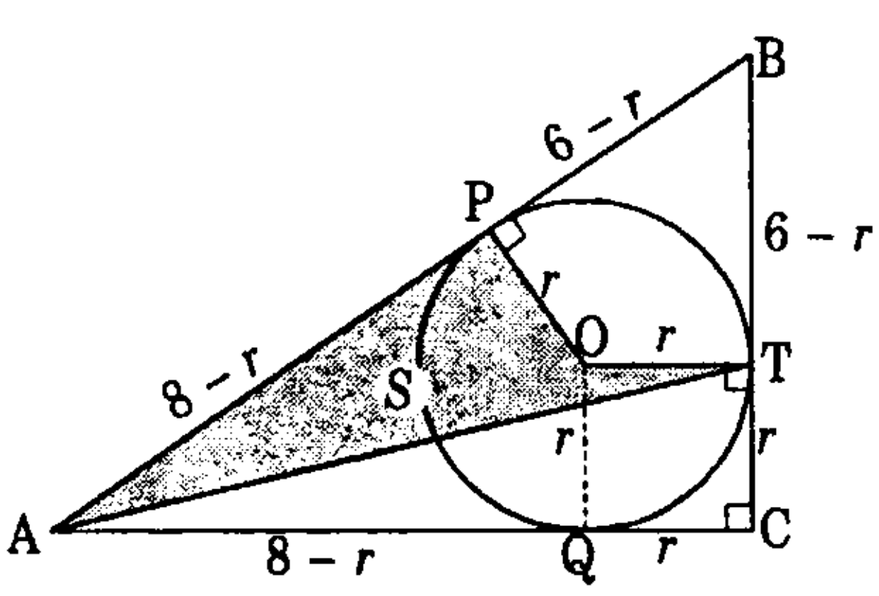
Resolución

- $S = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ACT} - S_{POTB}$ ... (1)
- ΔACB: $AC = 8, BC = 6 \Rightarrow AB = 10$

  $\Rightarrow S_{\Delta ACB} = 6\times 8/2 = 24$
- $AP = AQ = 8 - r$
- $PB = BT = 6 - r$

  $\Rightarrow AB = 8 - r + 6 - r = 10$

  $\therefore \boxed{r = 2}$



- $S_{\Delta ACT} = \dfrac{AC \cdot CT}{2}$

$$S_{\Delta ACT} = \frac{8\times 2}{2} = 8$$

- $S_{POTB} = 2S_{\Delta BTO}$

$$= 2\left(\frac{TO\times TB}{2}\right) \quad (r)$$

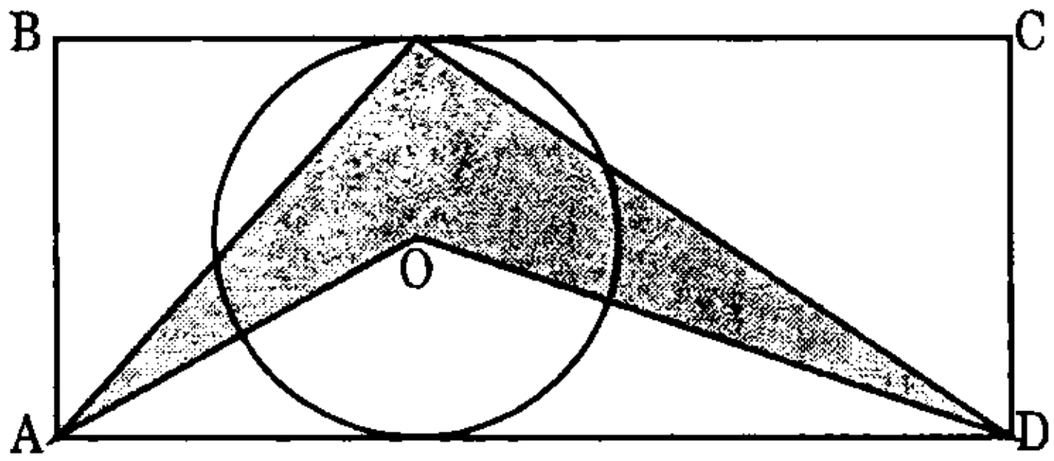
$$= 2\cdot\frac{2\times 4}{2} = 8$$

En (1): $S = 24 - 8 - 8 = 8$

Rpta.: 8

Problema 26

El área del rectángulo ABCD es 24 cm² y 0 es centro del círculo. Hallar el área del cuadrilátero sombreado.



Resolución

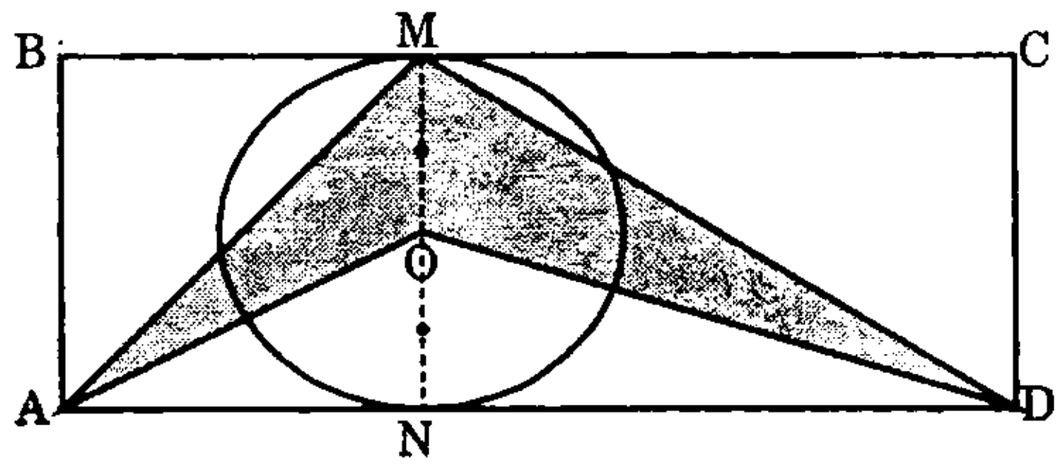
$$S_{\Delta AMO} = \frac{S_{ABMN}}{4} \qquad (1)$$

$$S_{\Delta DMO} = \frac{S_{MCDN}}{4} \qquad (2)$$

(1) + (2)

$$S_{AMDO} = \frac{S_{ABMN} + S_{MCDN}}{4}$$

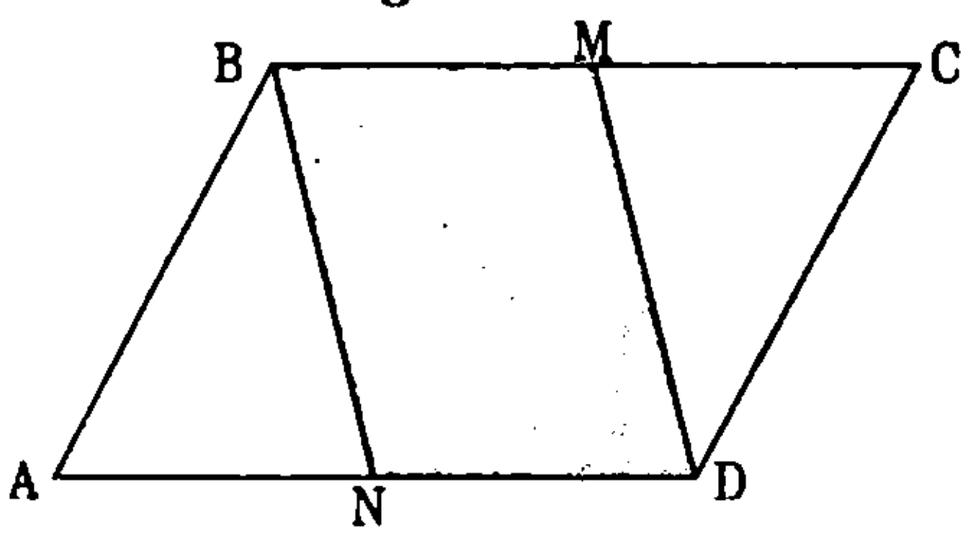
$$S_{AMDO} = \frac{24}{4} = 6\ cm^2$$



Rpta.: 6 cm²

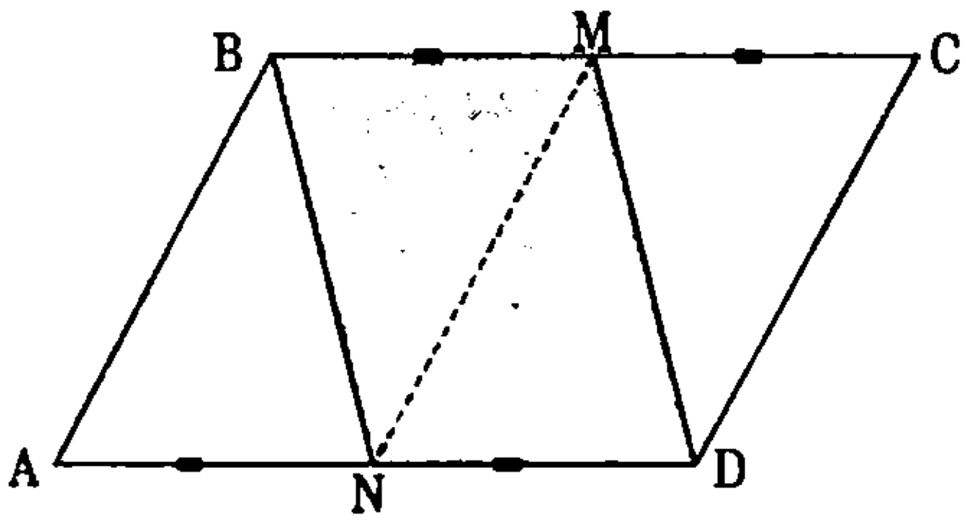
Problema 27

En el paralelogramo ABCD, M es punto medio de BC y N, punto medio de AD. Calcular el área del cuadrilátero BMDN, si el área del triángulo ABN es 12 cm²



Resolución

• La diagonal de un paralelogramo divide a éste en dos triángulos de igual área



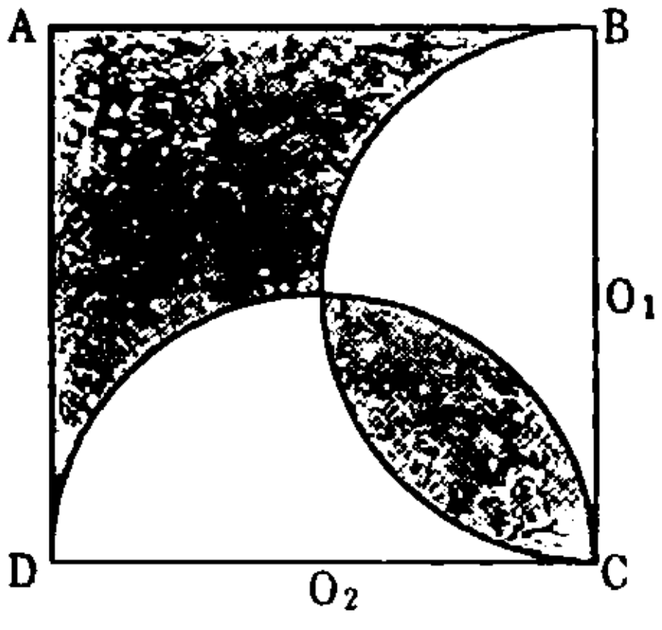
• $S_{\Delta ABN} = S_{\Delta BNM} = S_{\Delta NMD}$

• $S_{BMDN} = 2 \times 12 = 24\ cm^2$.

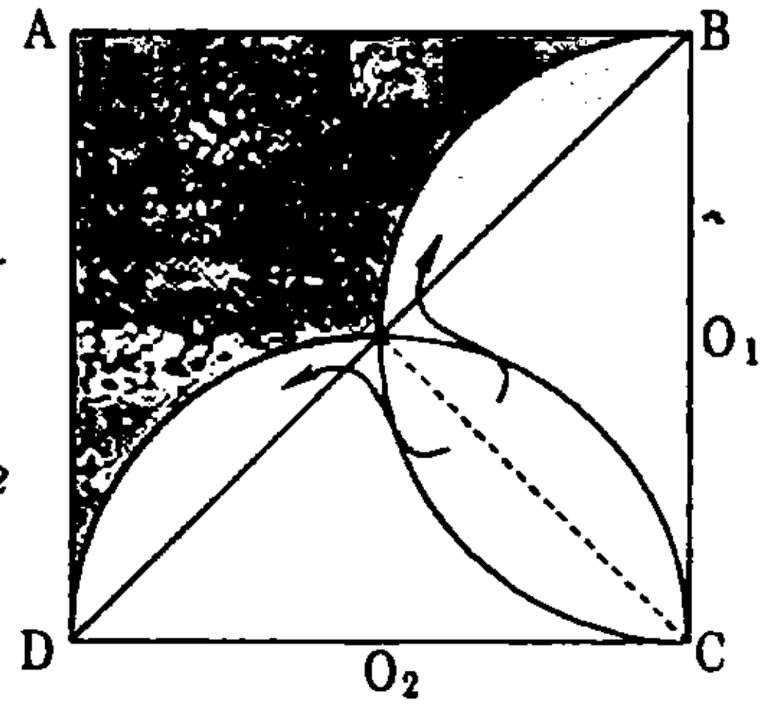
Rpta.: 24 cm²

Problema 28

Hallar el área de la región sombreada, si el área del cuadrado ABCD es 8 cm² y tanto 0_1 como 0_2 son centros de los semicírculos.



Resolución



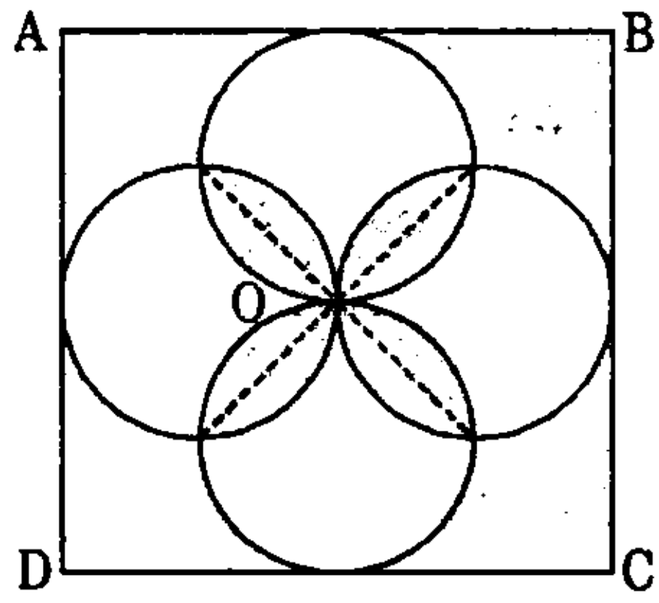
$$S = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

$$S = \frac{8}{2} = 4\ cm^2$$

Rpta.: 4 cm²

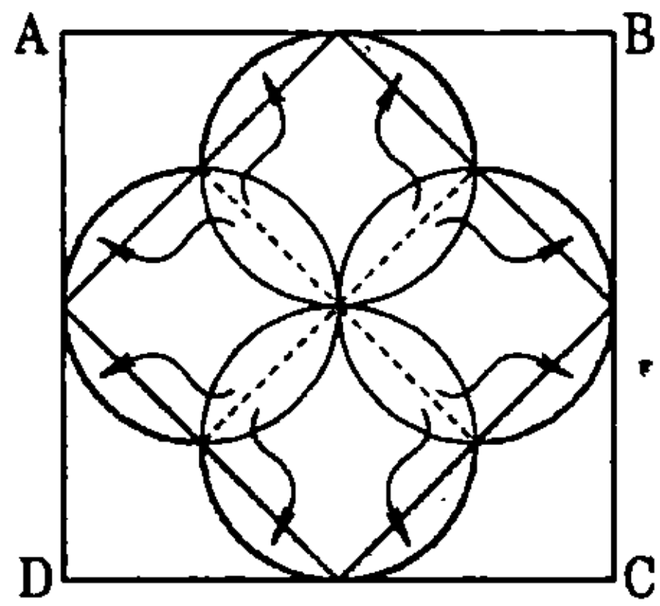
Problema 29

ABCD es un cuadrado de lado "a" y "O" es centro del cuadrado. ¿Cuál es el área de la parte sombreada?



Resolución

• Trasladando las regiones sombreadas convenientemente, se observa que la superficie sombreada es la mitad del cuadrado.

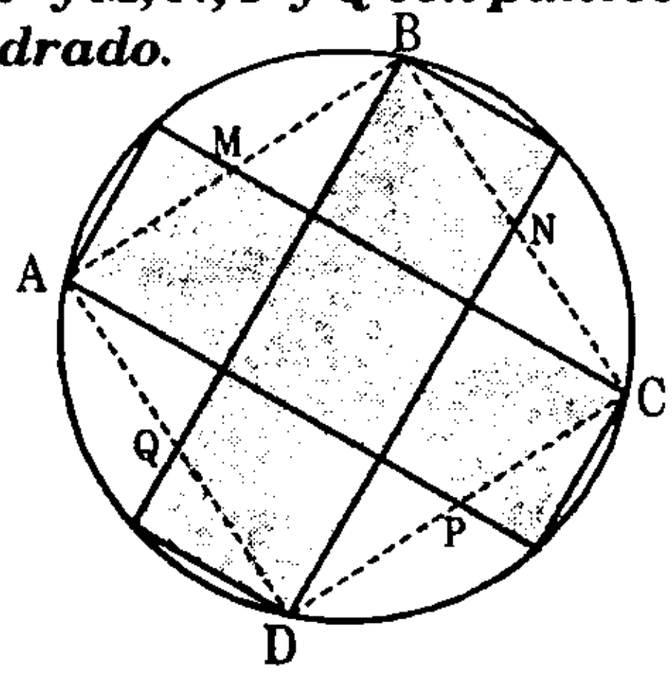


• $$S = \frac{S_{cuadrado}}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Rpta.: $\frac{a^2}{2}$

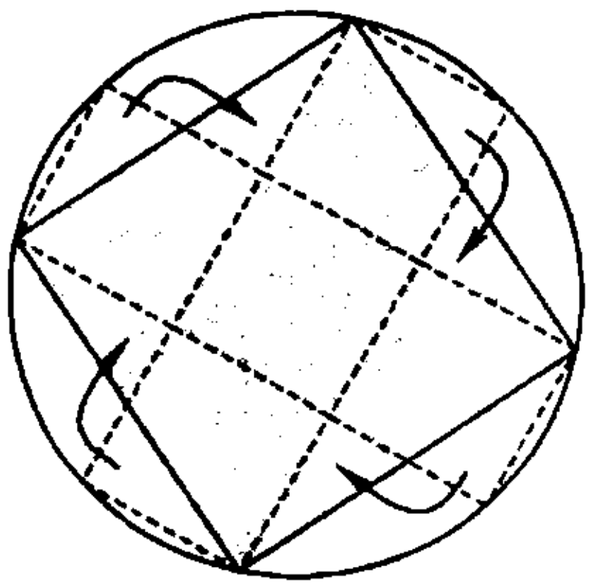
Problema 30

Hallar el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado y el radio del círculo mide "R" y M, N, P y Q son puntos medios del cuadrado.



Resolución

• Trasladando apropiadamente las regiones sombreadas, como indican las flechas, la región sombreada resulta un cuadrado, cuya diagonal mide 2R.



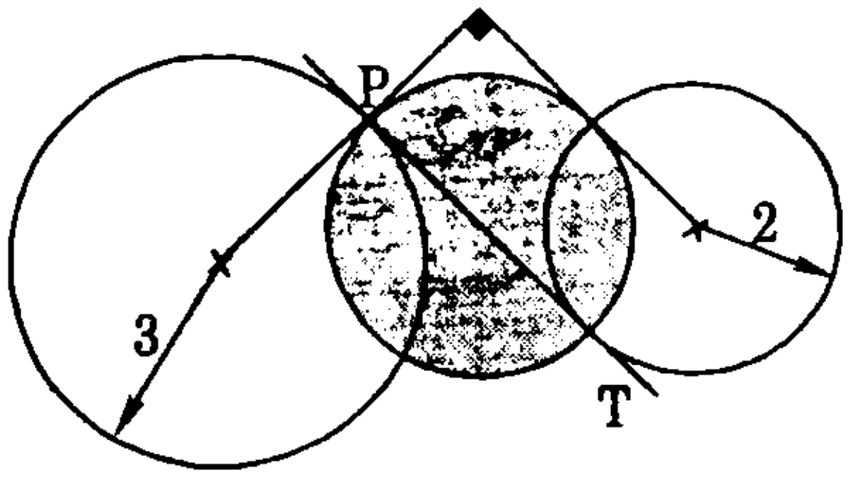
Luego el área es:

$$S = \frac{(2R)^2}{2} = 2R^2$$

Rpta.: $2R^2$

Problema 31

Los radios de los círculos miden 3 y 2 cm respectivamente. Si la distancia entre sus centros es 13 cm. Hallar el área del círculo cuyo diámetro es PT.



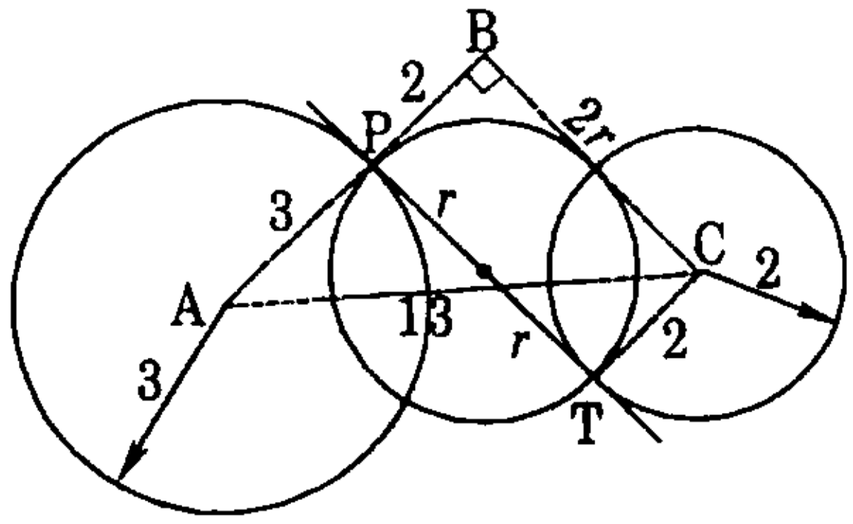
Resolución

• Δ ACB: (T. de Pitágoras)

$$(2r)^2 + 5^2 = 13^2$$

$$r^2 = 36$$

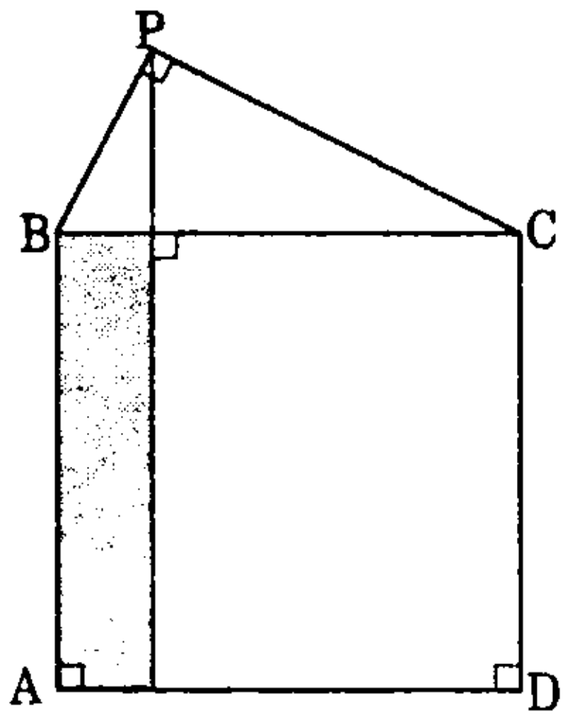
• $S = \pi r^2 = 36\pi \text{ cm}^2$



Rpta.: $36\pi\, cm^2$

Problema 32

En la siguiente figura, ABCD es un cuadrado y BPC es un triángulo rectángulo. Si: BP = 5 cm. Hallar el área del rectángulo sombreado.



Resolución

• $S = b \times m$ (1)

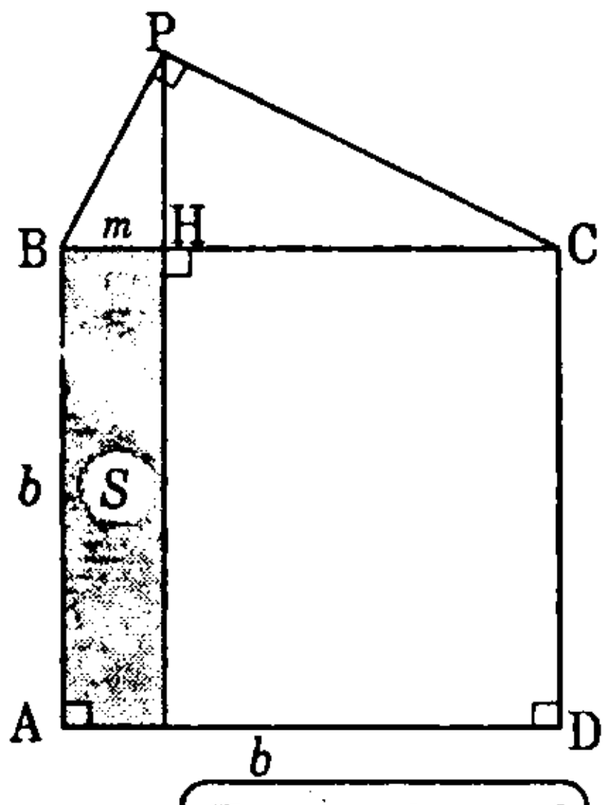
Δ BPC: (Relaciones métricas)

$$BP^2 = BC \times BH$$

$$5^2 = bm$$

• En (1):

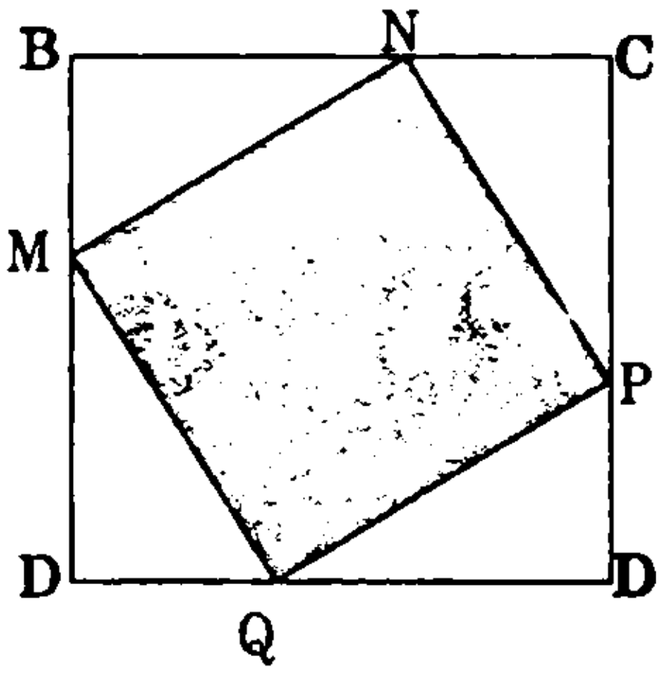
$$S = 5^2 = 25$$



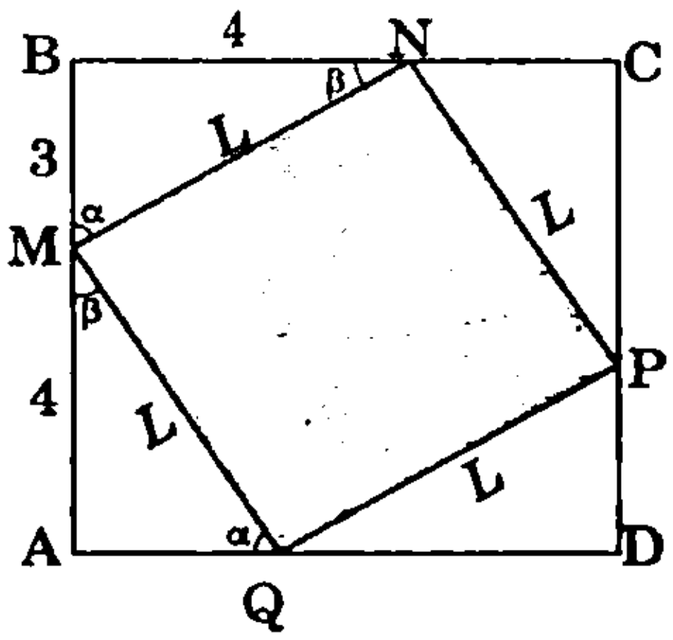
Rpta.: 25 cm^2

Problema 33

En el cuadrado ABCD se inscribe otro cuadrado MNPQ como se muestra en la figura. Se pide calcular el área del cuadrado MNPQ, si AM = 4 y MB = 3cm.



Resolución



• Δ MBN $\cong$ Δ MAQ

BN = 4

• En el Δ NBM

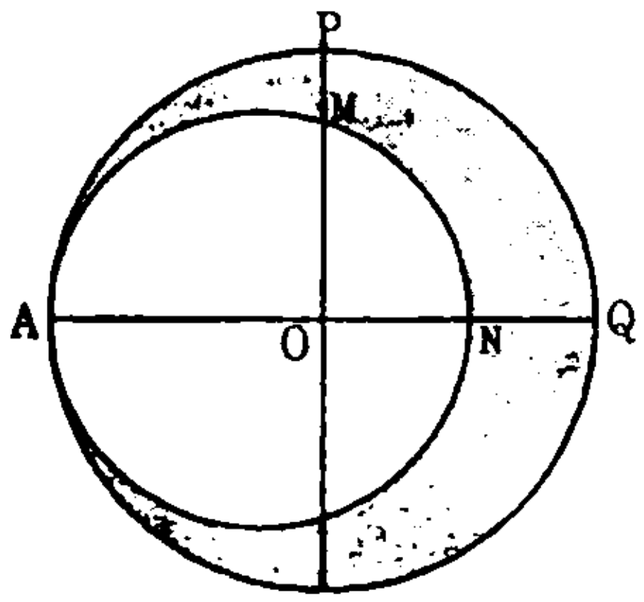
$L^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

$\therefore S_{MNPQ} = L^2 = 25$

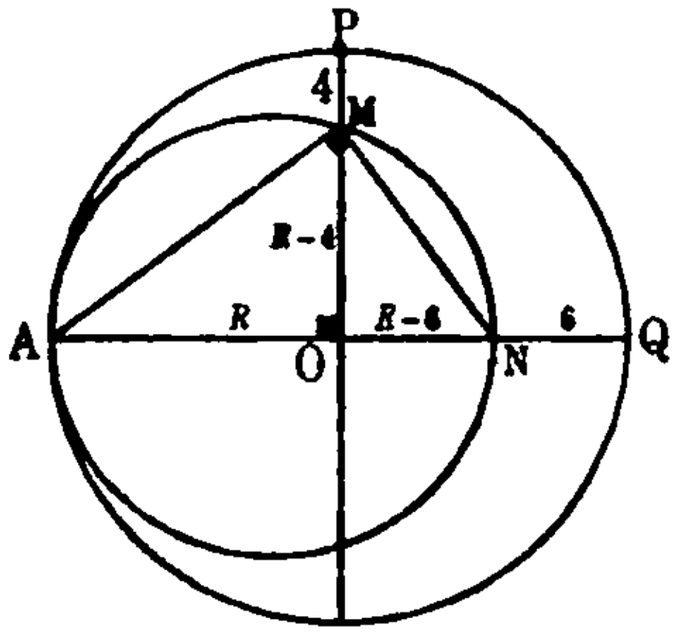
Rpta.: 25

Problema 34

Hallar el área de la región sombreada sabiendo que "O" es centro del círculo mayor, además: MP = 4 y NQ = 6.



Resolución



• OM = R – 4 y ON = R – 6

• Δ AMN: $OM^2 = AO \times ON$

$(R-4)^2 = R(R-6), \Rightarrow R = 8$

$2r + 6 = 2(8) \Rightarrow r = 5$

$\therefore S = \pi(8)^2 - \pi(5)^2 = 39\pi$

Rpta.: 39π

Problema 35

Hallar el área de un cuadrado inscrito en un cuadrante de radio R. (El lado del cuadrado no es coincidente con el radio del cuadrante).

Resolución

En ΔMOQ:

$OM = OQ = k$ (por simetría de la figura)

$MQ = k\sqrt{2}$

En ΔMNQ (Isósceles):

$NQ = \left(k\sqrt{2}\right)\sqrt{2} = 2k$

En ΔOQN (T. Pitágoras):

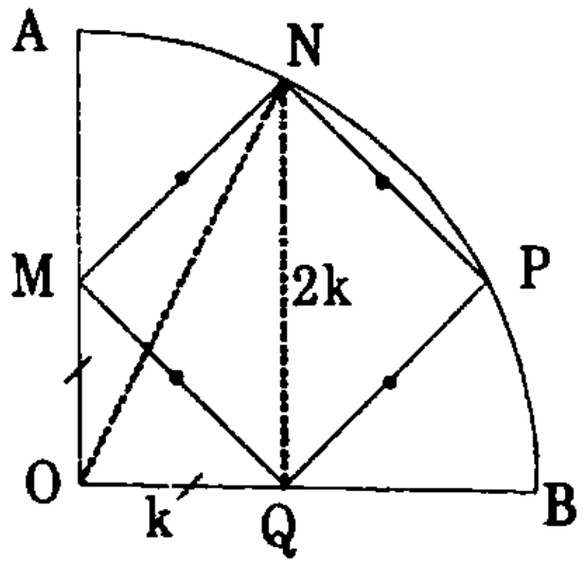
$k^2 + 2(k)^2 = R^2$

$$\Rightarrow \quad k^2 = \frac{R^2}{5}$$

$$S_{MNPQ} = \left(k\sqrt{2}\right)^2$$

$$= 2k^2$$

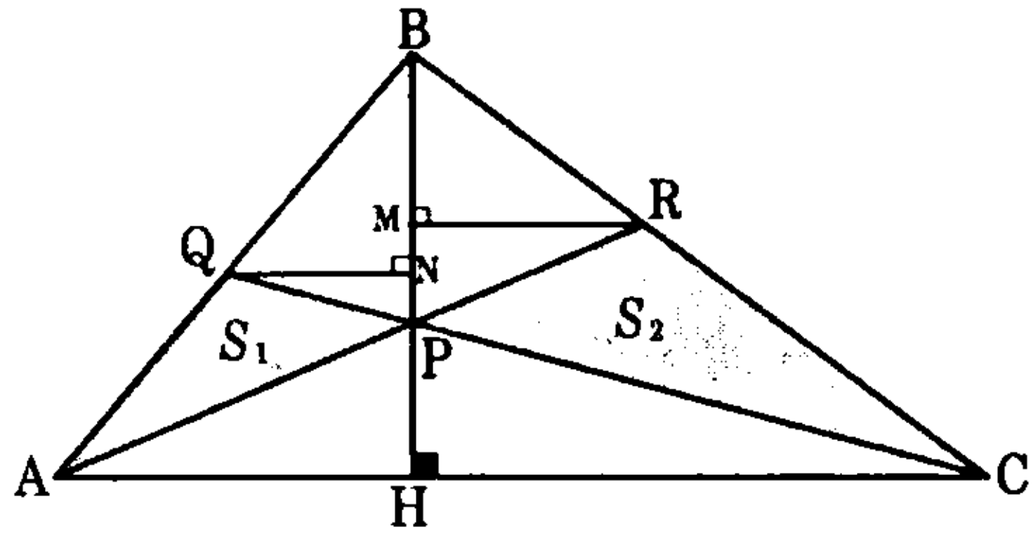
$$= \frac{2R^2}{5}$$



Rpta.: $\frac{2R^2}{5}$

Problema 36

En la figura mostrada: $BH \perp AC$; $QN \perp BH$; $RM \perp BH$ y $MN \times AC = 24\,cm^2$. ***Hallar la diferencia de las áreas de los triángulos RPC y QPA.***



Resolución

$$S_{\Delta RPC} + S_{\Delta APC} = \frac{AC \times MH}{2} \qquad \ldots (1)$$

$$S_{\Delta QPA} + S_{\Delta APC} = \frac{AC \times NH}{2} \qquad \ldots (2)$$

Restando (1) – (2) :

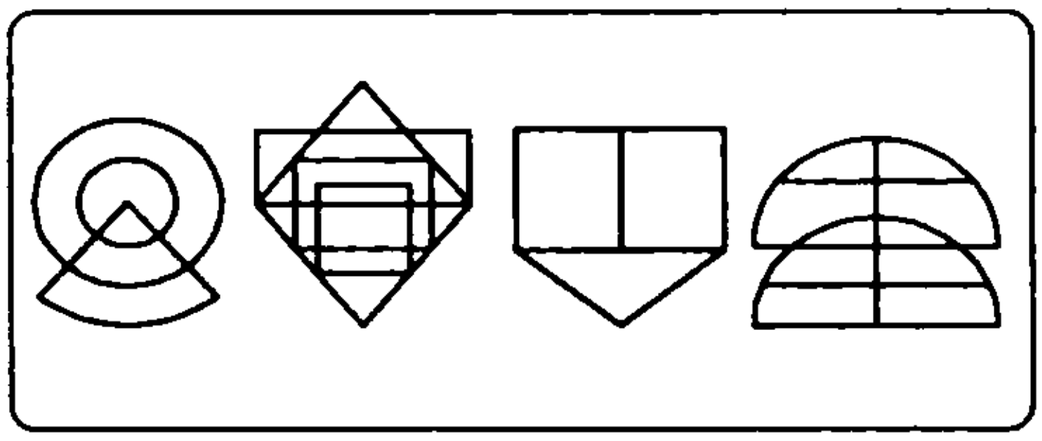
$$S_{\Delta RPC} - S_{\Delta QPA} = \frac{AC(MH - NH)}{2} = \frac{AC \times MN}{2}$$

$$S_{\Delta RPC} - S_{\Delta QPA} = \frac{24}{2} = 12\,cm^2$$

Rpta.: $12\,cm^2$

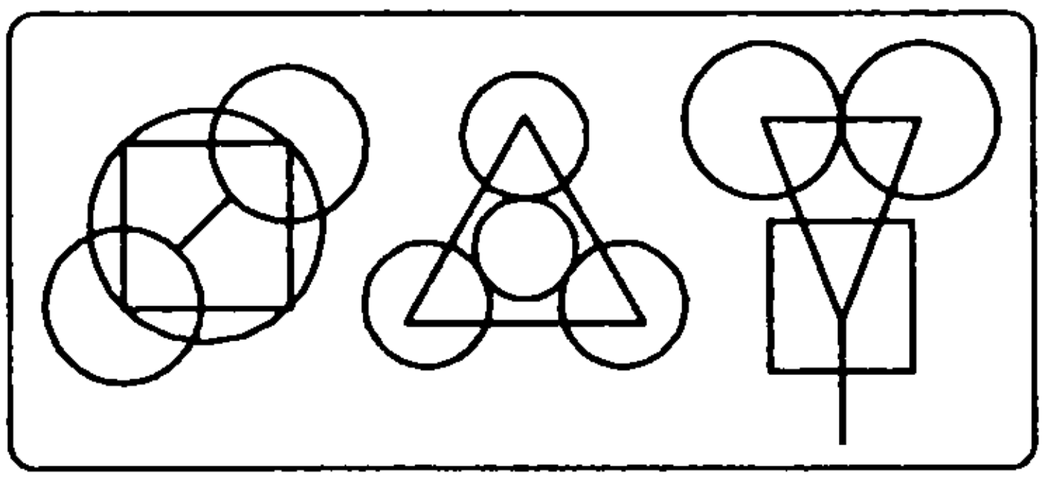
Problemas Propuestos

1. ¿Cuántas de las siguientes figuras requieren más de 2 colores para ser pintadas de modo que dos regiones con un lado común no sean del mismo color?



A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

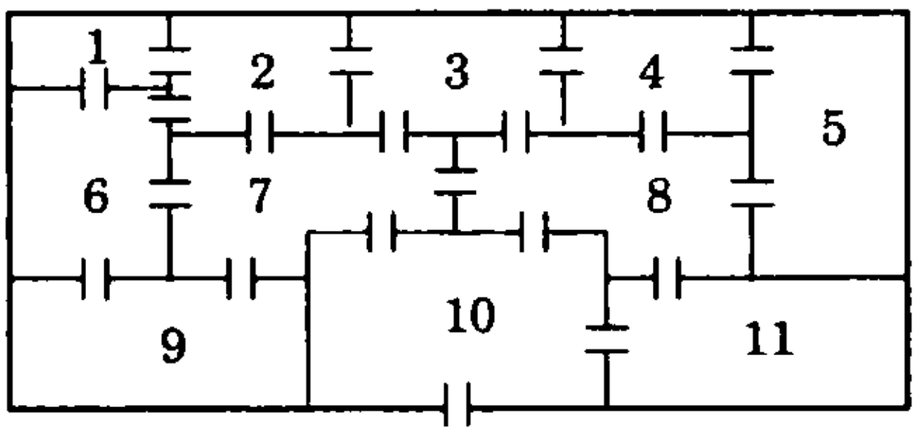
2. ¿Cuál de las siguientes figuras se puede dibujar de un solo trazo y sin levantar la punta del lápiz del papel?



A) Sólo (1) **B)** Sólo (2) **C)** Sólo (3)
D) (1) y (2) **E)** Todas

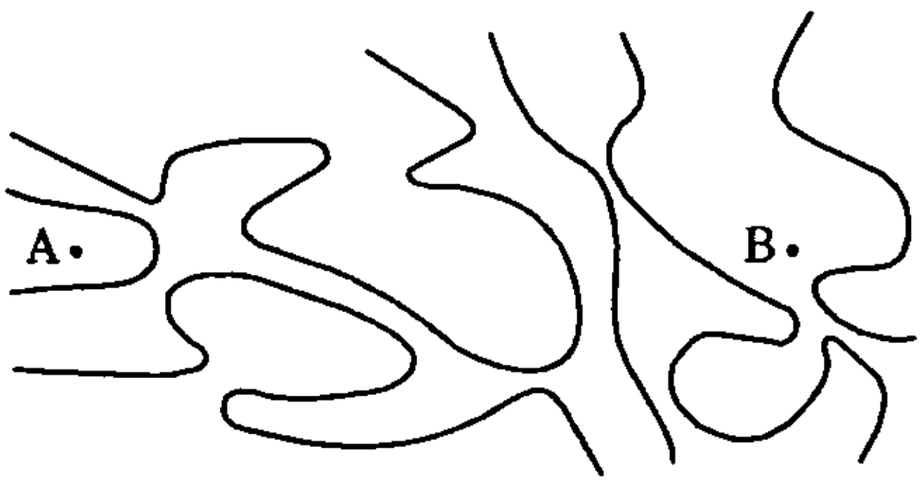
3. ***Los asistentes a una reunión se saludan con un apretón de manos y cada uno cuenta el número de personas con el que se ha saludado. Si N es el número de asistentes que se ha saludado con un número impar de personas, entonces N es:***
A) Siempre par
B) Siempre impar
C) Par o impar
D) Siempre primo
E) Siempre múltiplo de 3.

4. ***¿En cuál de las habitaciones debemos empezar a recorrer los ambientes de esta residencia de una planta para pasar por todas las puertas una sola vez y terminar afuera?***



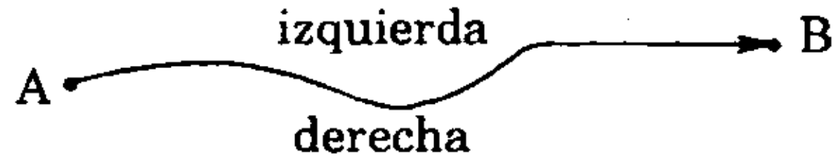
A) En 10 **B)** En 6 **C)** En 7
D) En 3 **E)** En 4

5. ***Coquito había dibujado en la pizarra una curva simple y cerrada, Iván borró una parte de la figura y sólo quedó la parte central. Si el punto A estaba dentro de la figura, entonces el punto B estaba:***

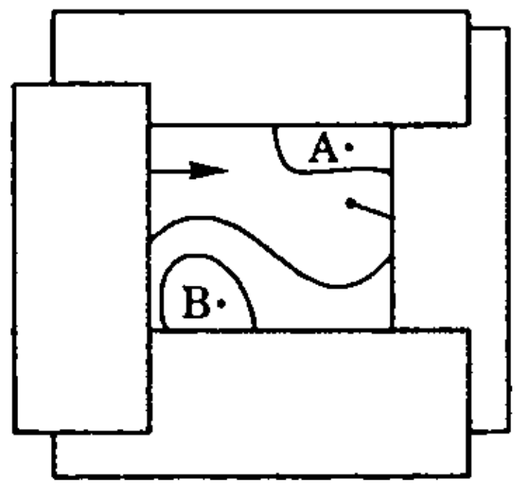


A) Fuera **B)** Dentro
C) No es posible saber
D) No dibujó una curva cerrada

6. ***Dada una curva simple y abierta como la AB.***

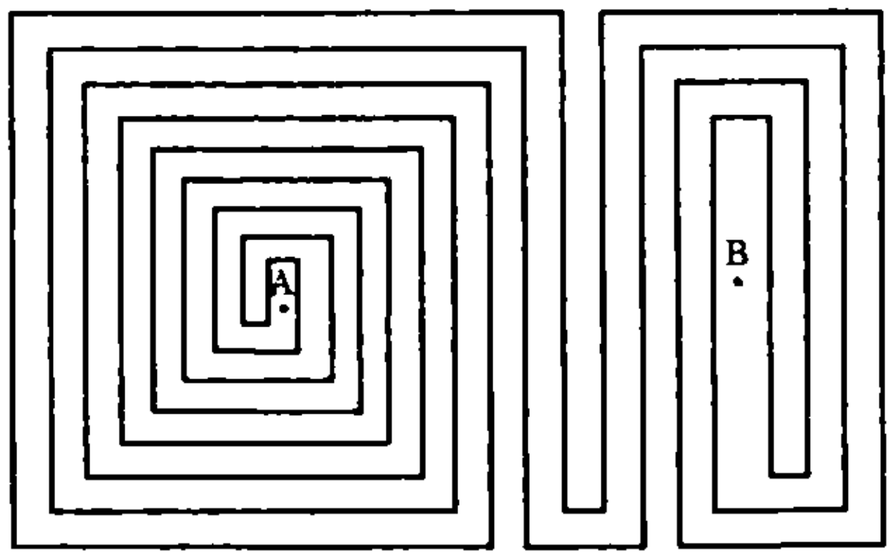


Vamos a convenir que la figura va de A hacia B y divide el plano en dos regiones derecha e izquierda. La siguiente figura simple y abierta ha sido cubierta con papel en sus bordes. Si el punto A está en el lado derecho, entonces el punto B está en:



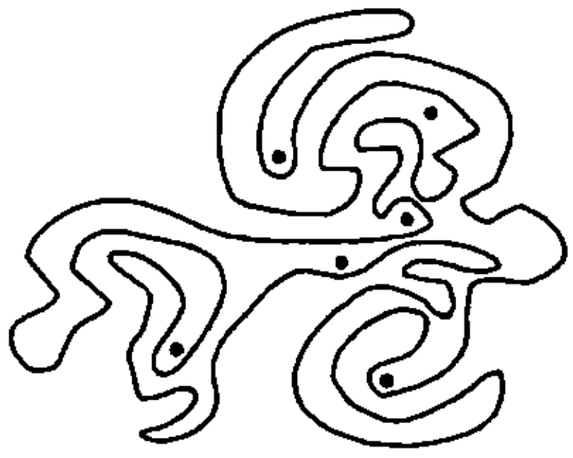
A) El lado derecho
B) En el lado izquierdo
C) no es posible saber

7. ***¿Cuál de los puntos esta dentro de la figura?***



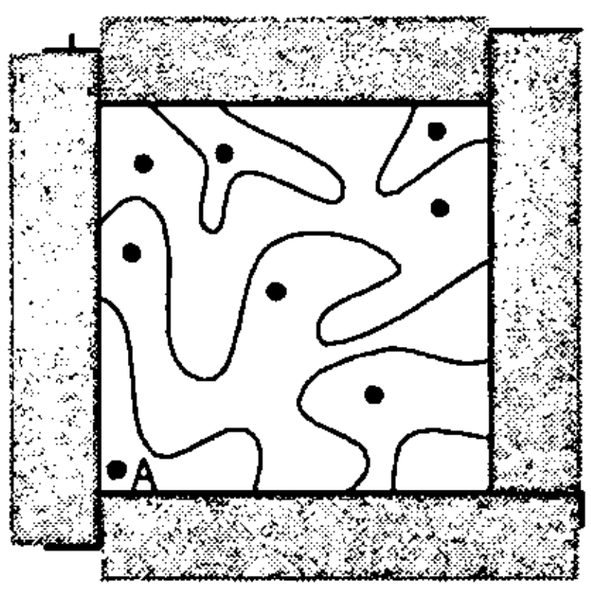
A) El punto A
B) El punto B
C) Ambos puntos
D) La figura no tiene región interior.
E) Ninguno

8. ¿Cuántos puntos hay fuera de la figura?



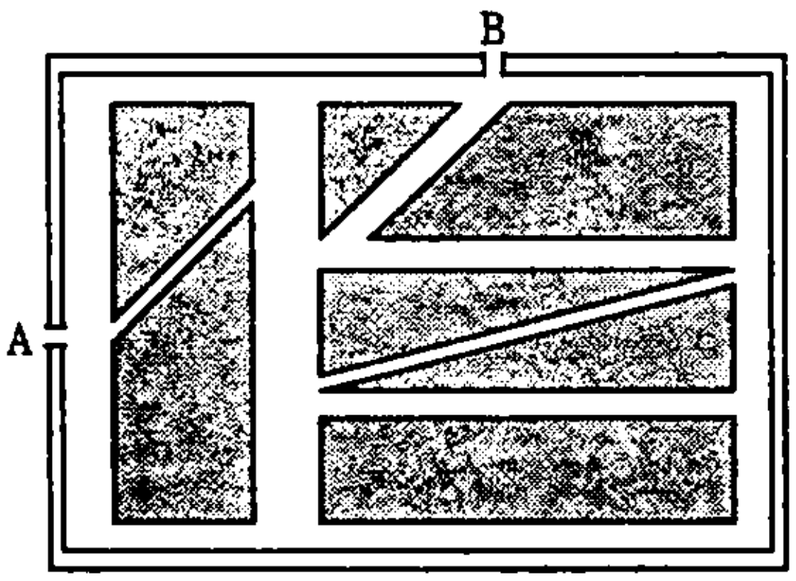
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

9. Se ha dibujado una línea curva simple y cerrada, y se ha cubierto con papel las periferias de la figura. Si el punto A está dentro de la curva, ¿Cuántos de los puntos mostrados están fuera de la figura?



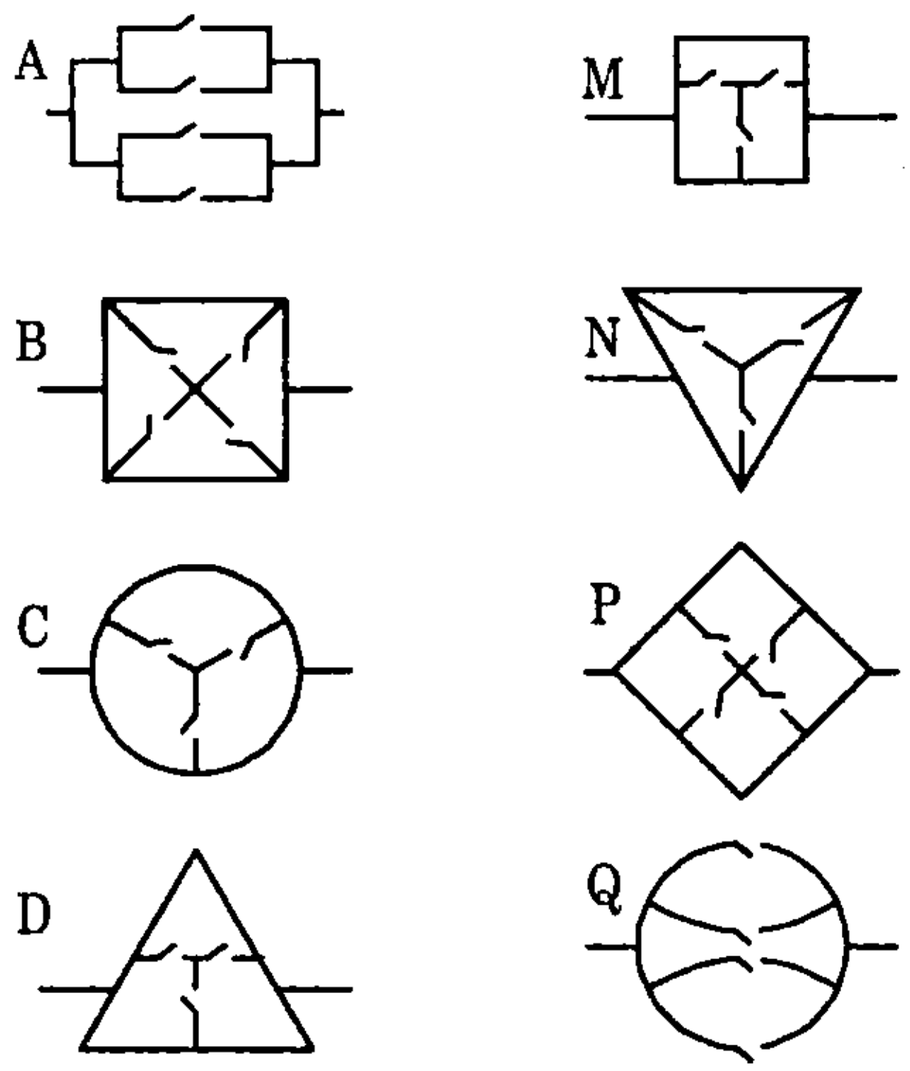
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

10. Isaac está a punto de ingresar, por la puerta A, a este centro histórico para recorrer todas sus calles y salir por la puerta B. ¿Será posible recorrer todas las calles de una sola vez? Se pregunta Isaac. Tú, ¿qué opinas?

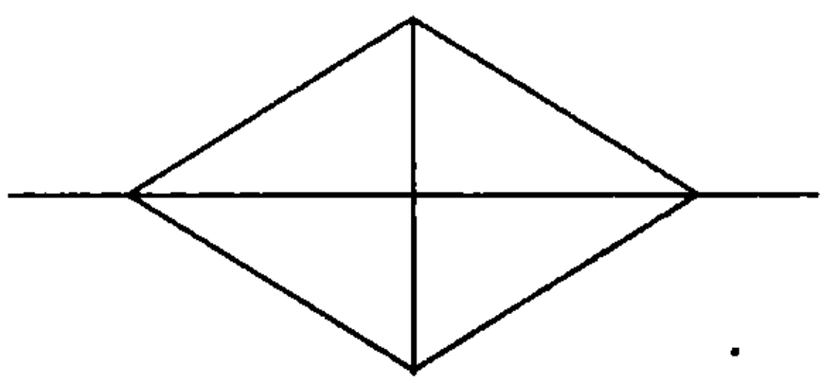


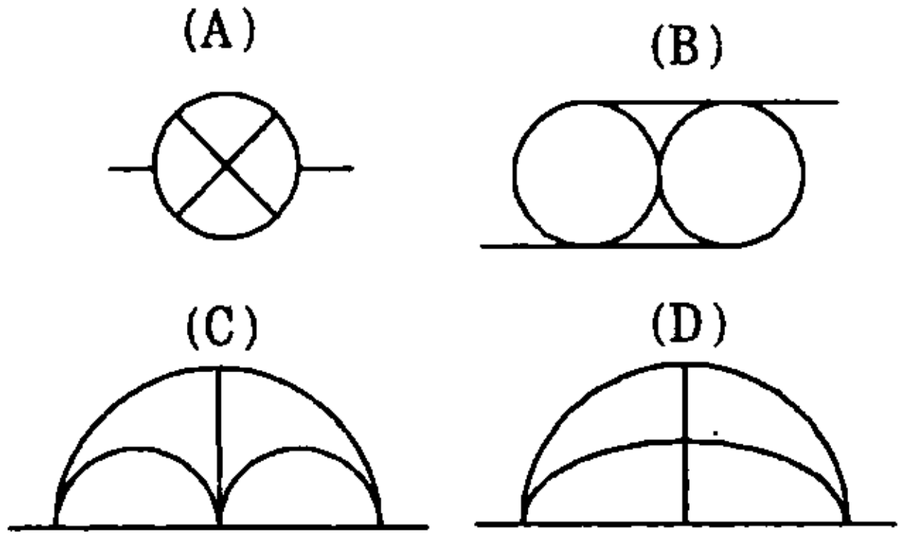
A) Que sí
B) Que no

11. Mediante una línea une los circuitos equivalentes:



12. ¿Cuál de las figuras signadas con letras, es topológicamente igual a la mostrada?



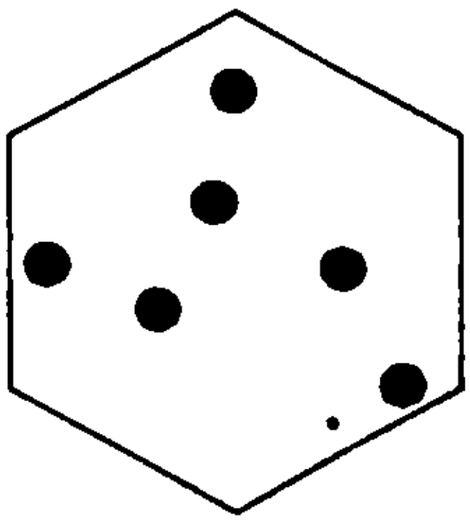


A) Sólo a **B)** Sólo d **C)** b y d
D) Todos **E)** Ninguna

13. Señala la pareja de objetos que no son topológicamente iguales:

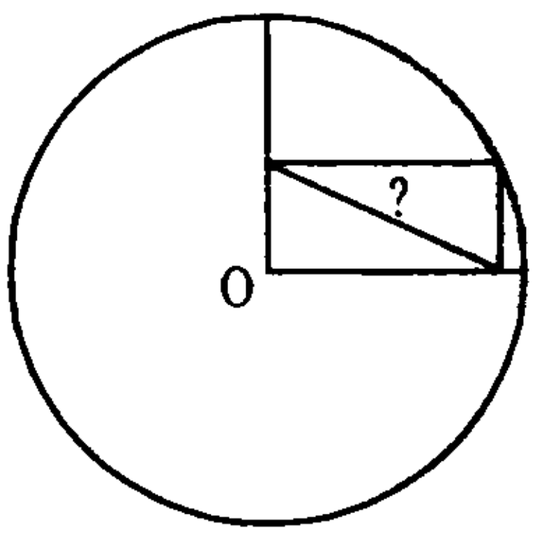
A) Borrador – ladrillo
B) Rosquilla – taza de te
C) Perro – gato
D) Pelota de cuero – canica de vidrio
E) Plato – tablero de ajedrez

14. Seis hermanos se disponen a repartirse este terreno que tiene la forma de un hexágono regular. A cada hermano le debe corresponder la misma área de terreno, con perímetros exactamente iguales y con un roble para cada uno. ¿Cómo deben trazar los límites?



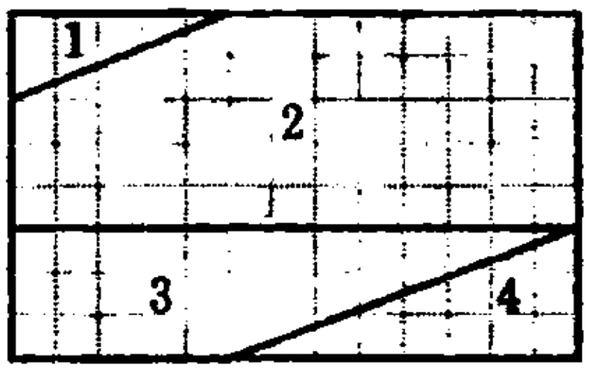
15. En la ilustración, hemos dibujado un rectángulo en el interior del círculo de centro O. Lo que quisiéramos saber es, cuál es la longitud de la línea oblicua señalada con un signo de interrogación. El círculo tiene un diámetro de 8 cm, ¿Puedes ayudarnos?

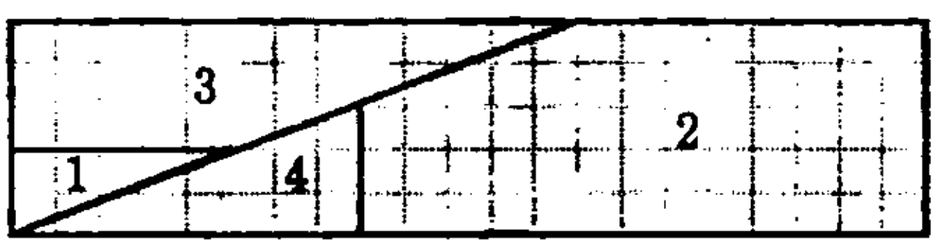
A) 8 cm
B) 4,2 cm
C) 4 cm
D) 5 cm
E) $2\sqrt{2}$ cm



16. El rectángulo de Langman.

Toma un papel cuadriculado de 13 por 8 cuadraditos, recorta según las líneas indicadas (ilustración superior). Enseguida arma el "rompecabezas" tal como la ilustración de abajo. Compara las áreas y busca una explicación.

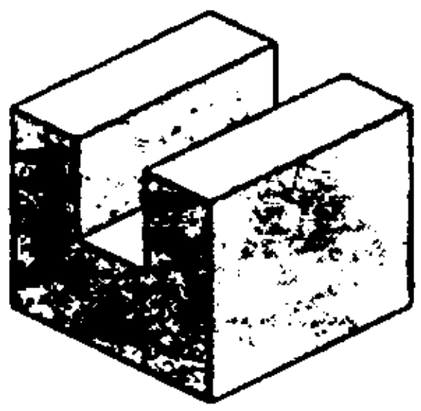


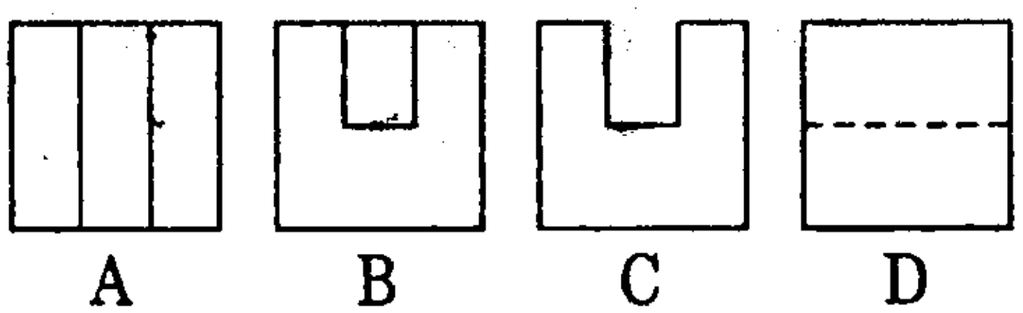


ENUNCIADO

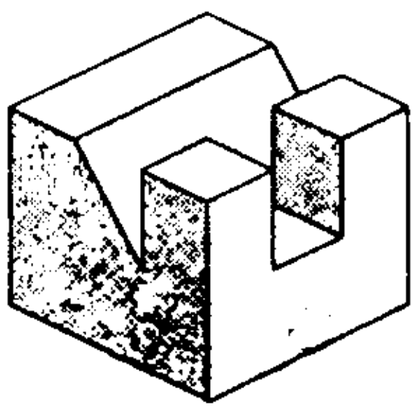
En cada una de las siguientes figuras se muestra un sólido y cuatro figuras, tres de las cuales corresponden a las vistas frontal, horizontal y de perfil del sólido. Se pide identificar la figura que no corresponde a una de las mencionadas vistas.

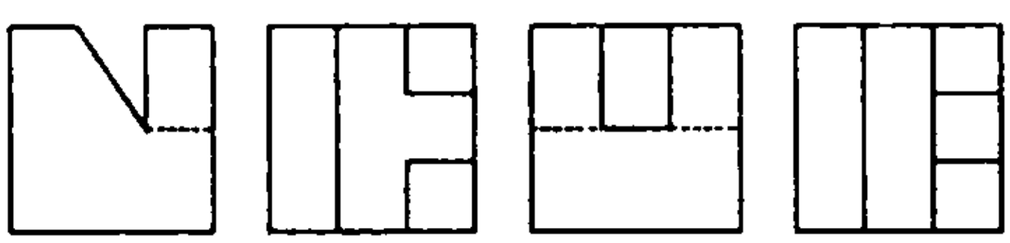
17.



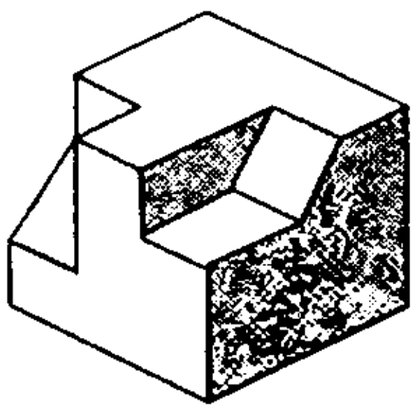


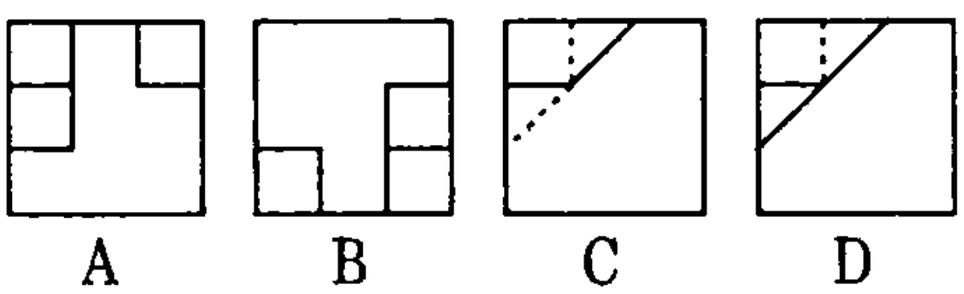
18.



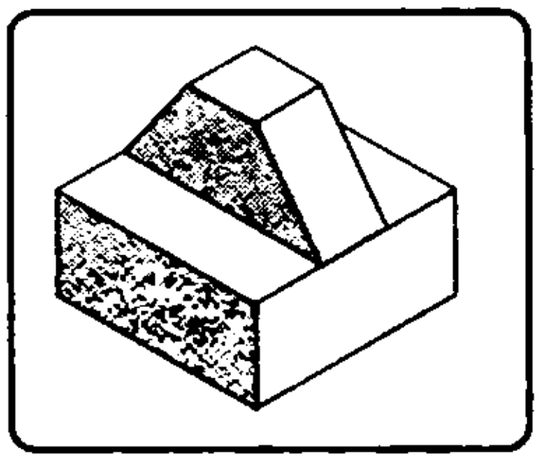


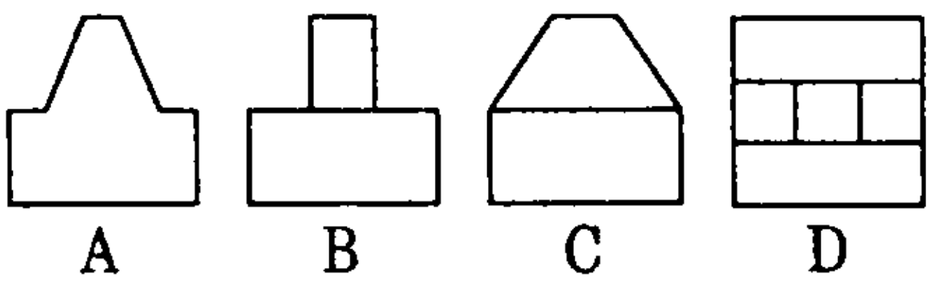
19.



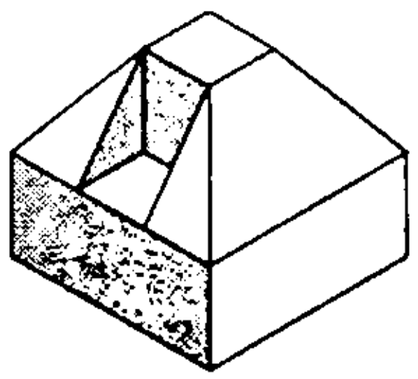


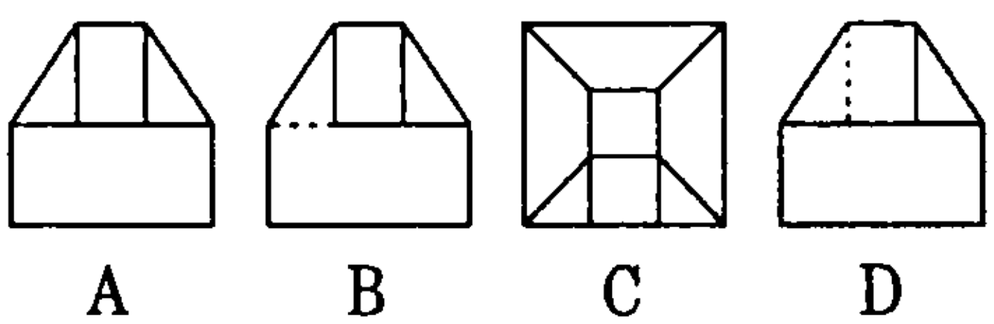
20.



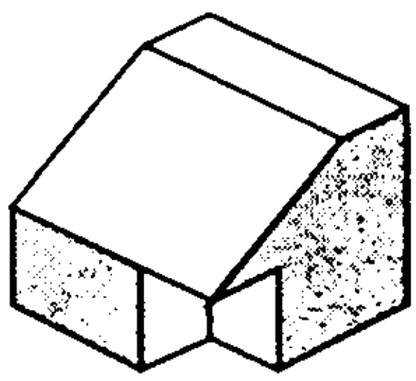


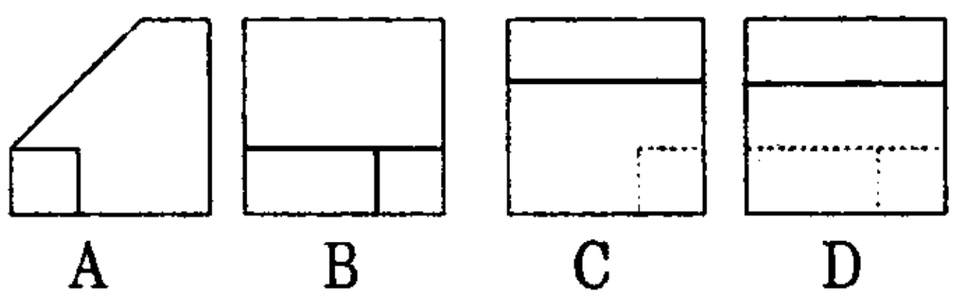
21.



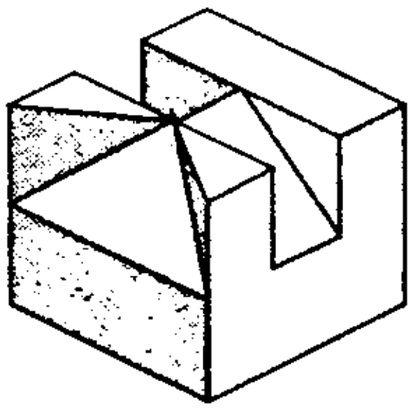


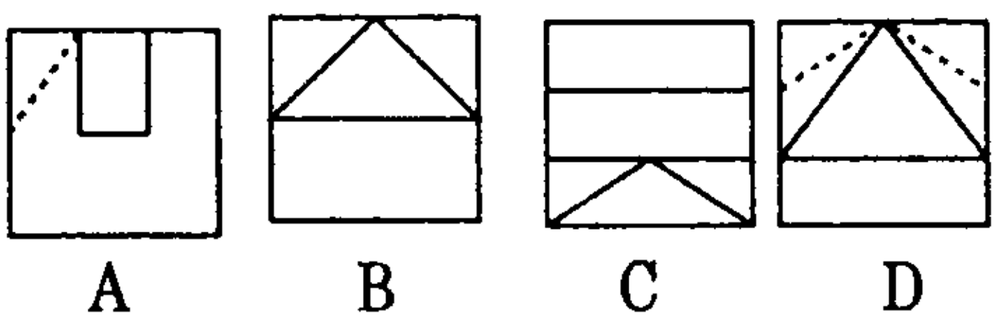
22.



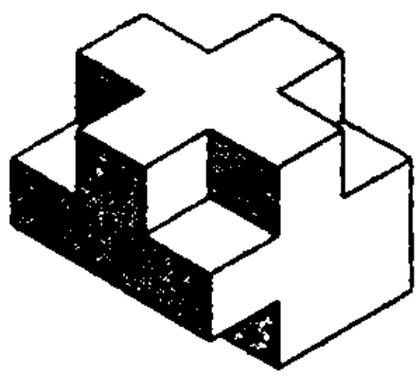


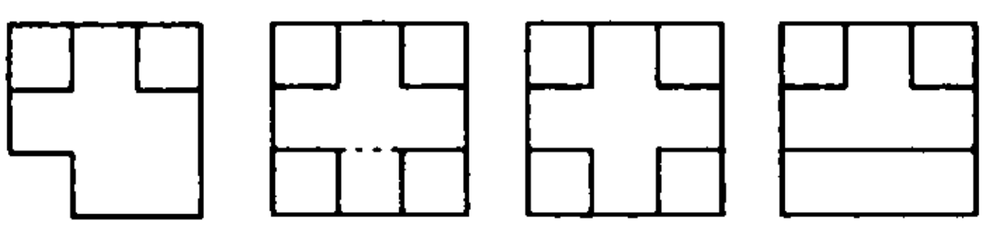
23.





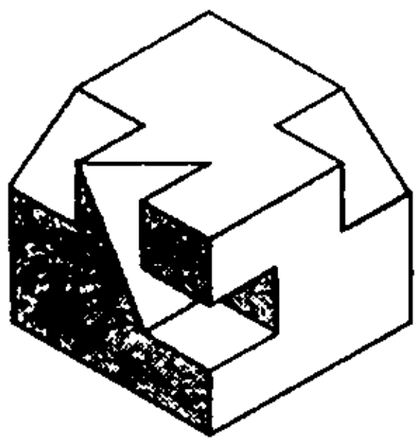
24.

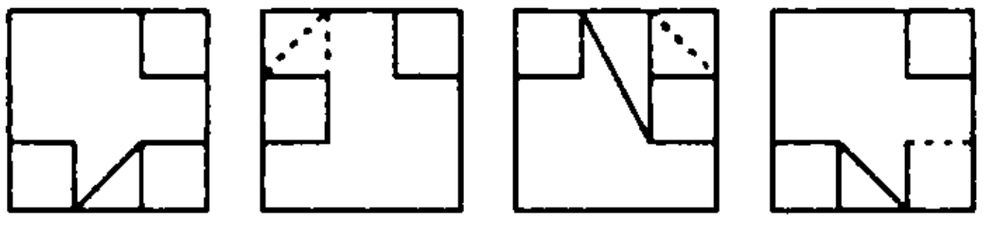




A B C D

25.





A B C D

26. *Encierra en un círculo la letra que no tiene relación con las demás respecto a la simetría.*

A) A M S T H

B) E B C Q D

C) H V X I O

D) K C B D M

E) J L P A R

F) W Y N V U

G) M S Q F G

H) K N Z L P

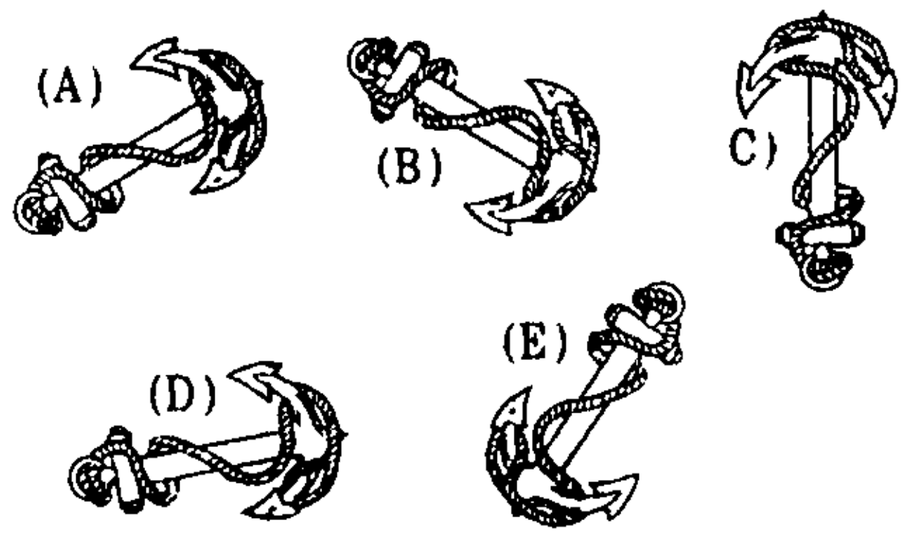
I) X Y O H I

J) M X W E P

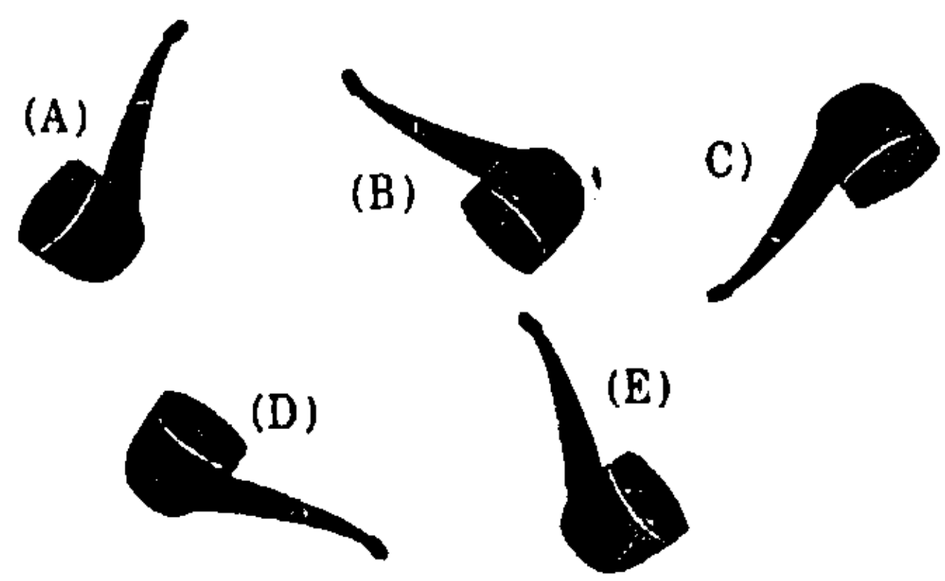
ENUNCIADO

En este test de 9 preguntas, cada problema consiste de 5 figuras, designadas con las letras A, B, C, D y E. En cada grupo de figuras debes encontrar aquella que es diferente a las demás respecto a la simetría y marca la letra correspondiente.

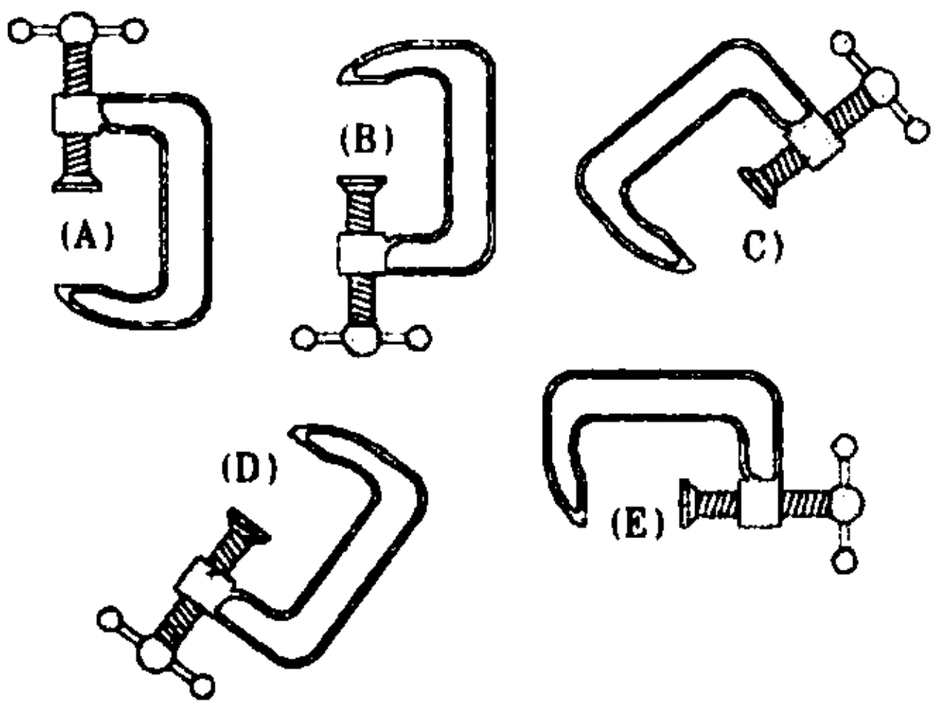
27.



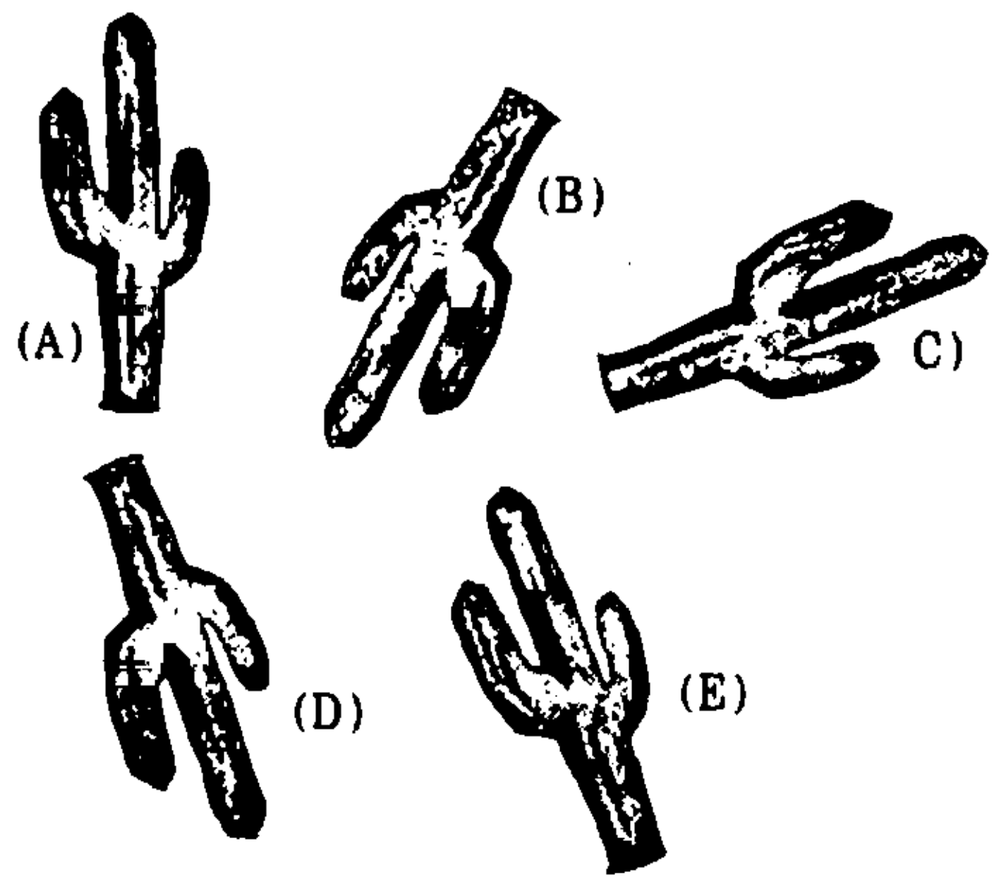
28.



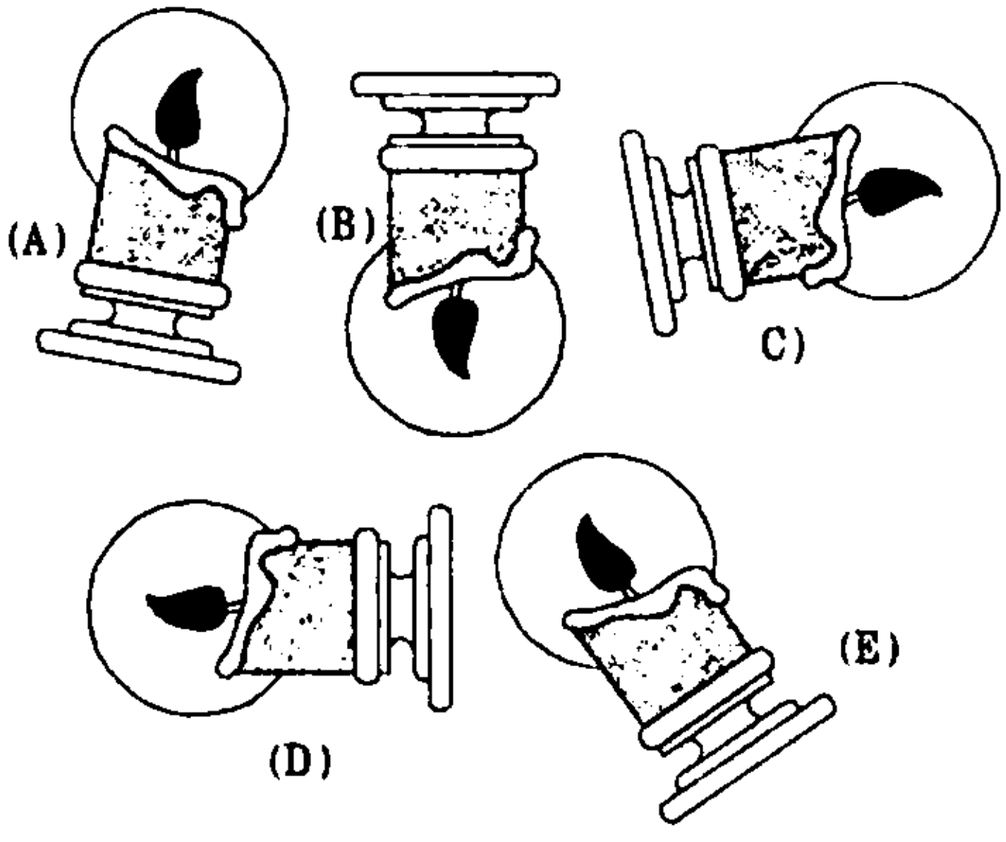
29.



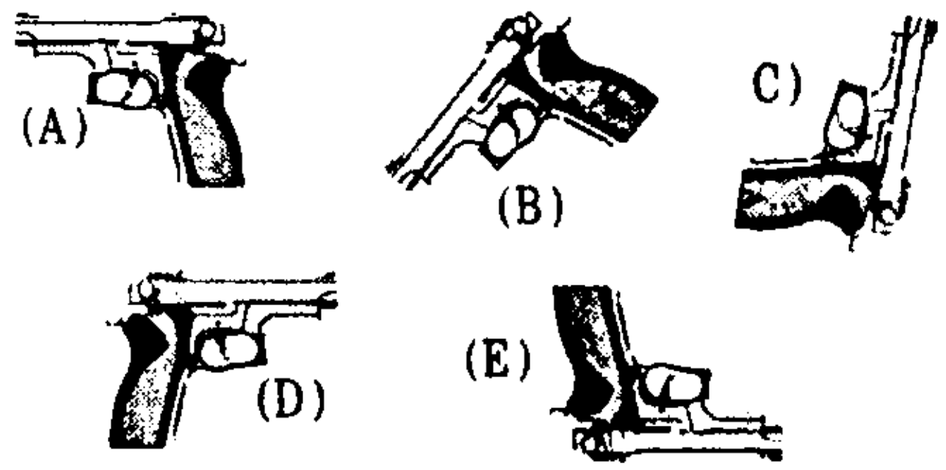
30.



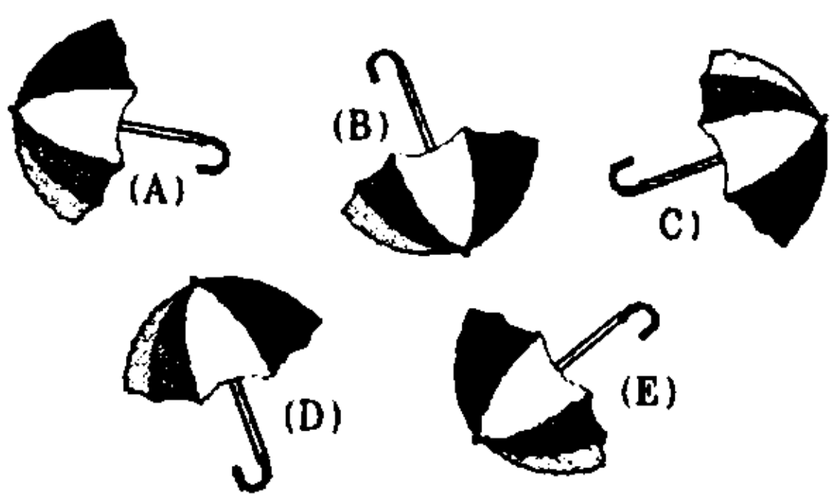
31.



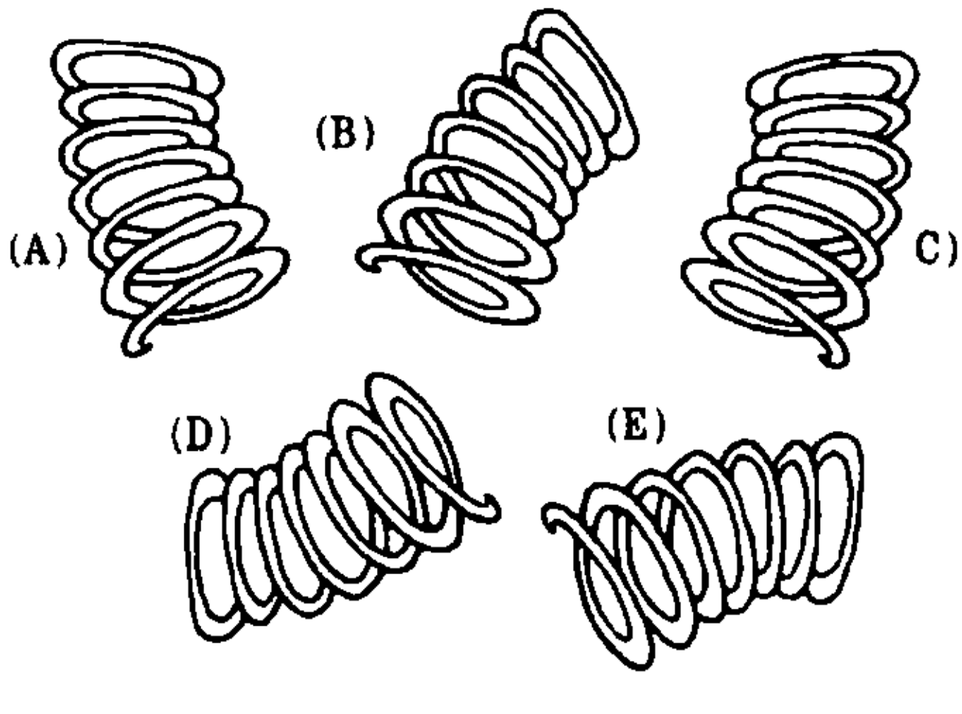
32.



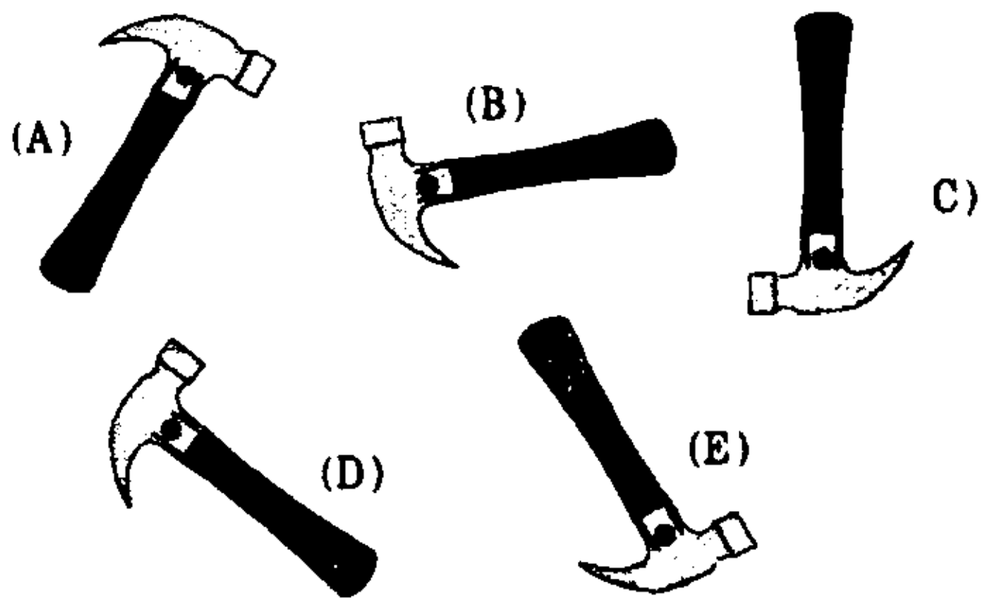
33



34.



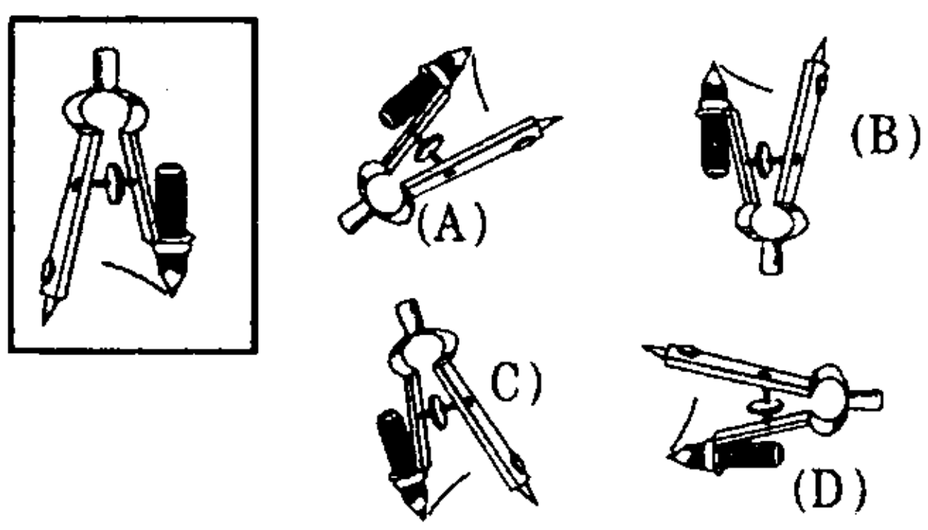
35.



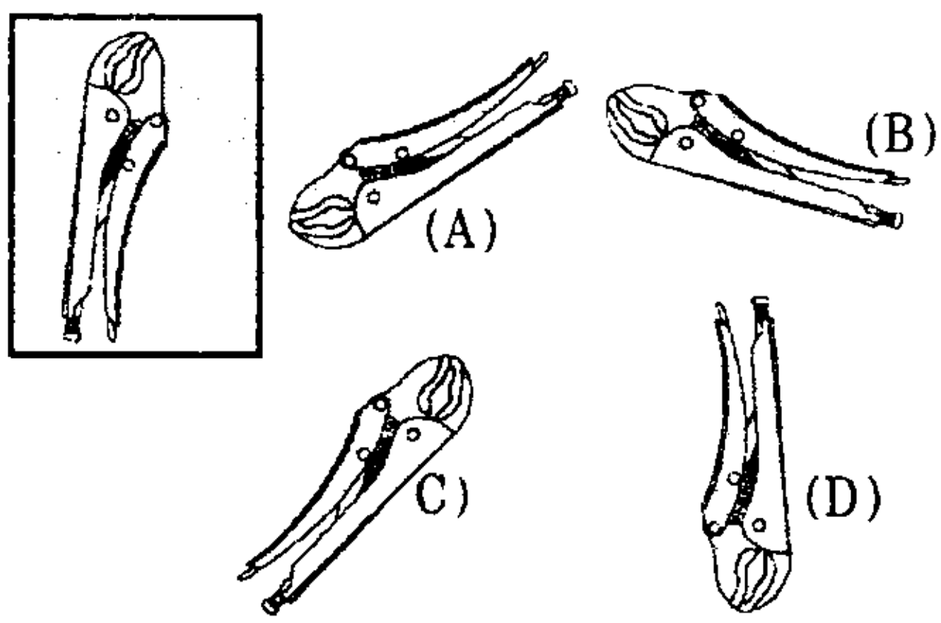
ENUNCIADO

Este test tiene 7 preguntas. Cada una consiste de una figura que está al lado izquierdo y 4 figuras al lado derecho, designadas con las letras A, B, C y D. Una de estas figuras, es necesariamente la imagen especular de la figura de la izquierda. Deberás encontrarla y marcar la letra correspondiente.

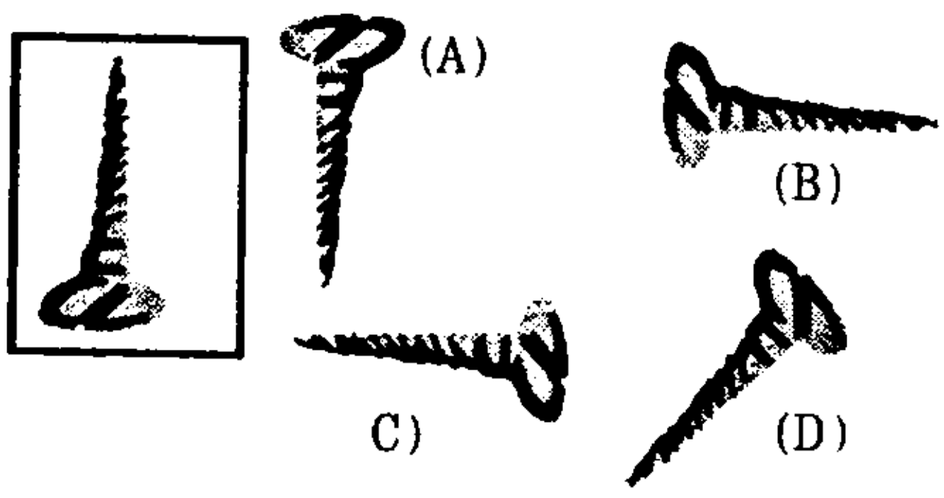
36.



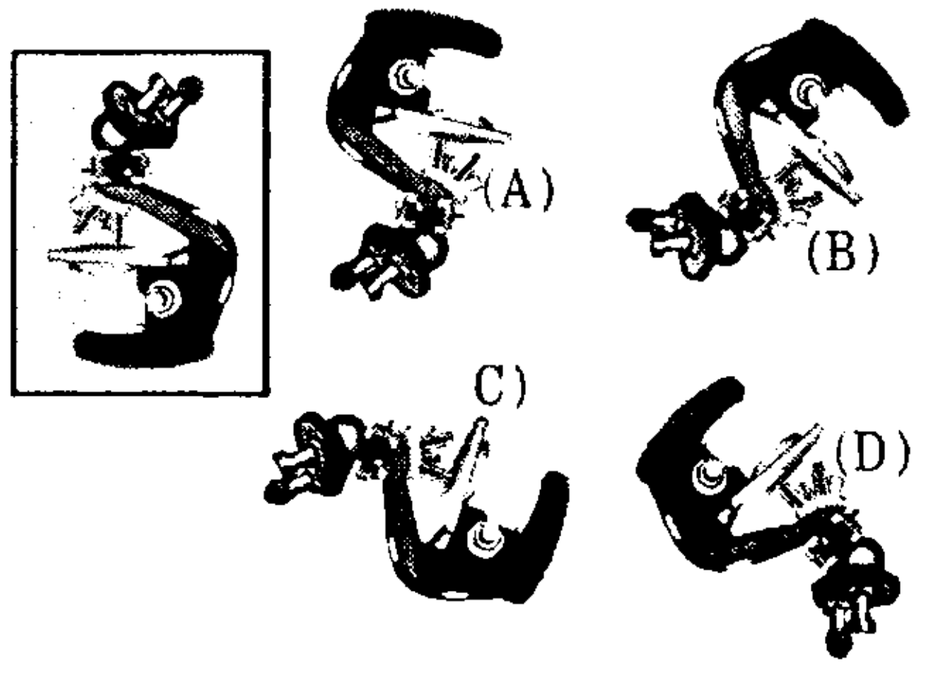
37



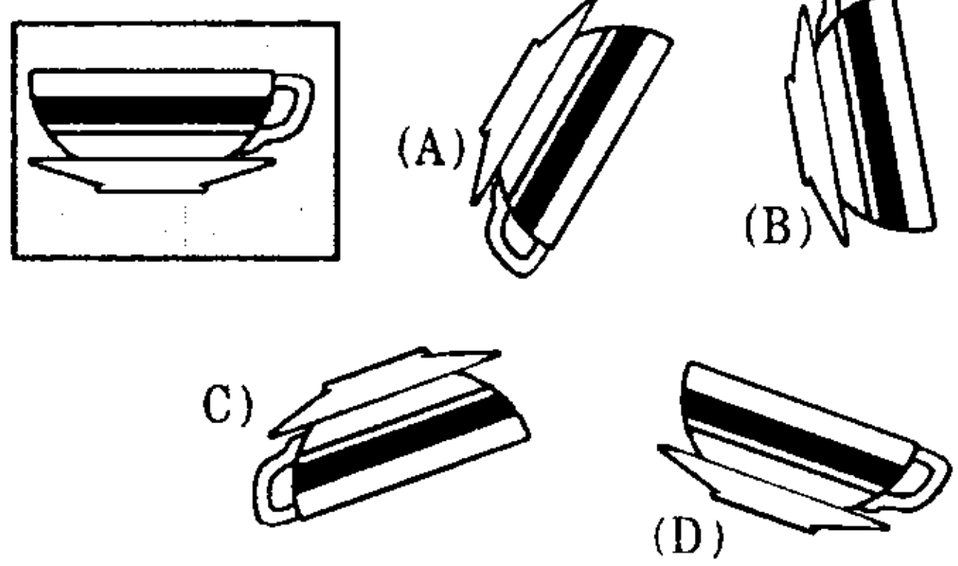
38.



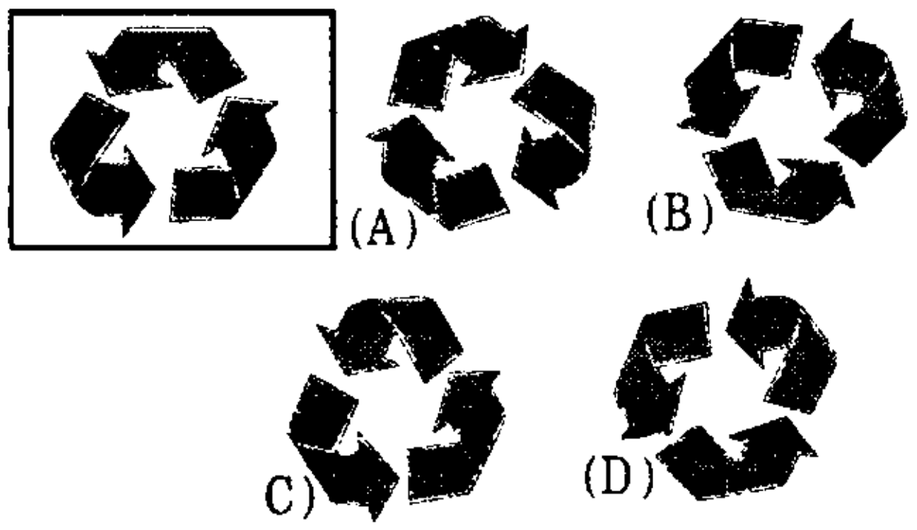
39.



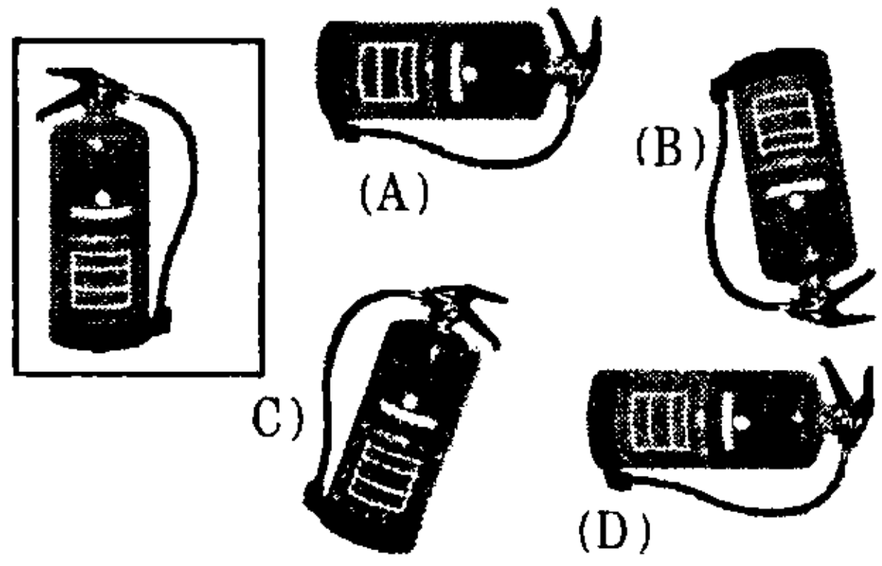
40.



41.



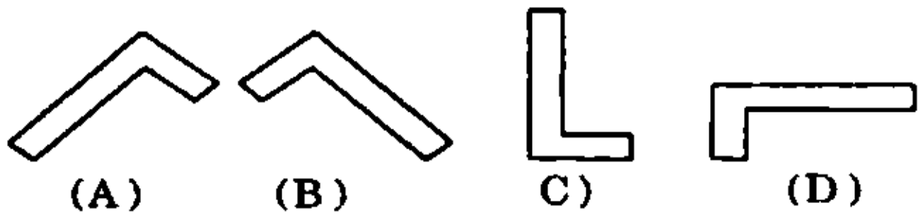
42.



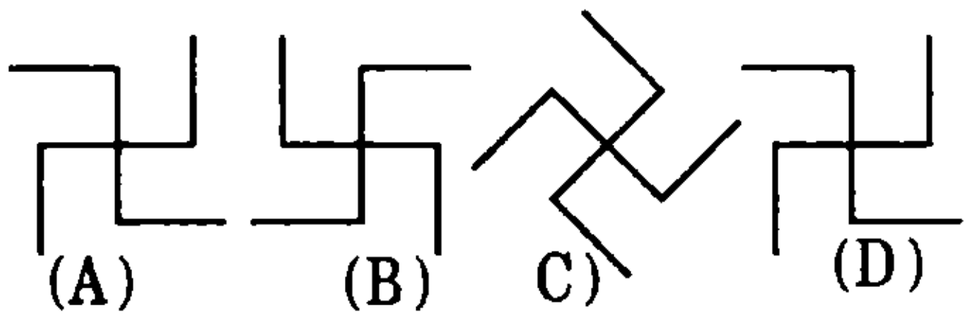
ENUNCIADO

En cada uno de los siguientes grupos de figuras, señale aquella que es diferente a las demás.

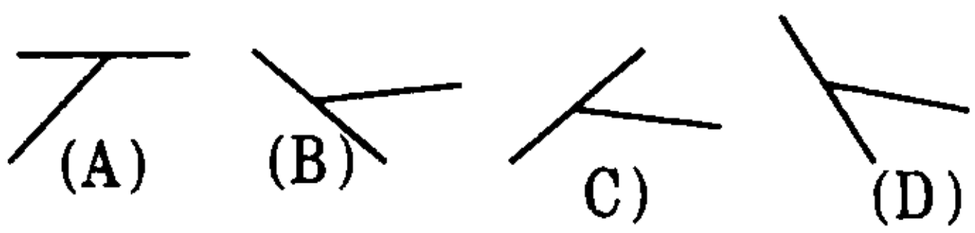
43.



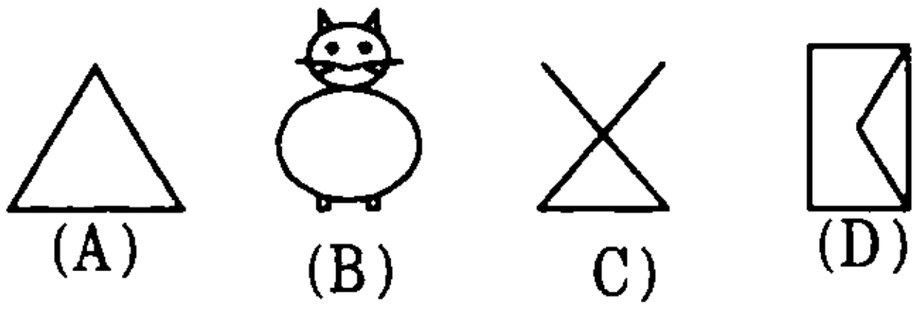
44.



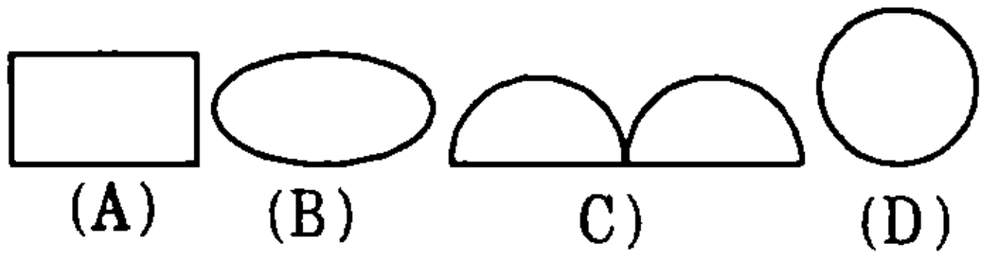
45.



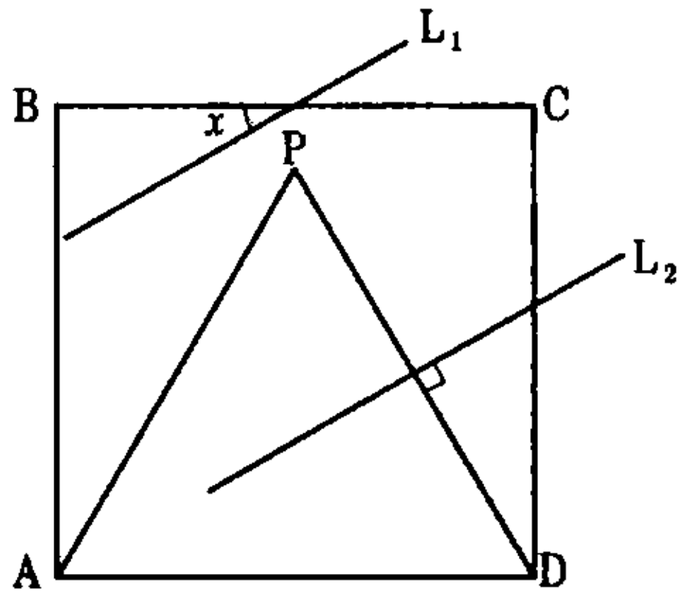
46.



47.

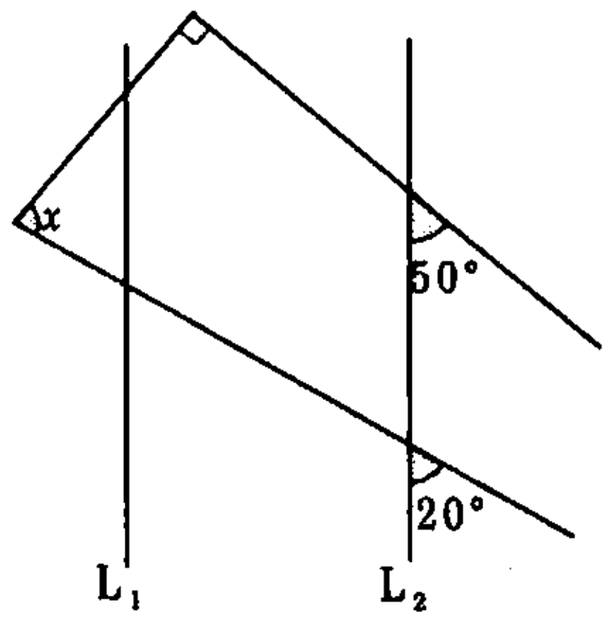


48. En la figura, ABCD es un cuadrado; DPA triángulo equilátero y L_1 // L_2. Determinar la medida de x.



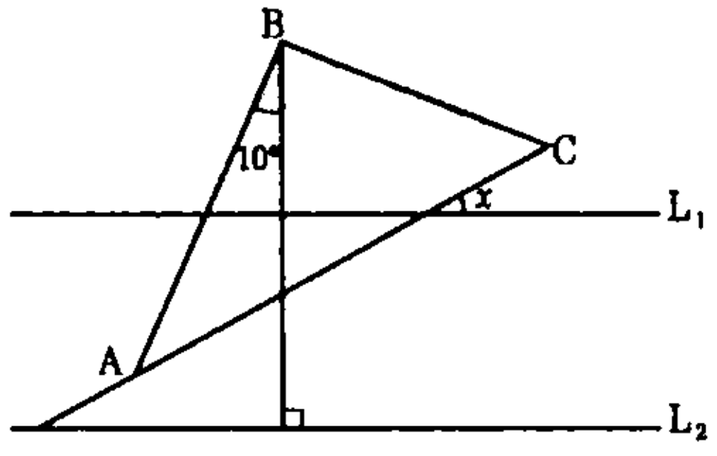
A) 10° **B)** 20° **C)** 25°
D) 30° **E)** 40°

49. En la figura; L_1 // L_2 Hallar "x"



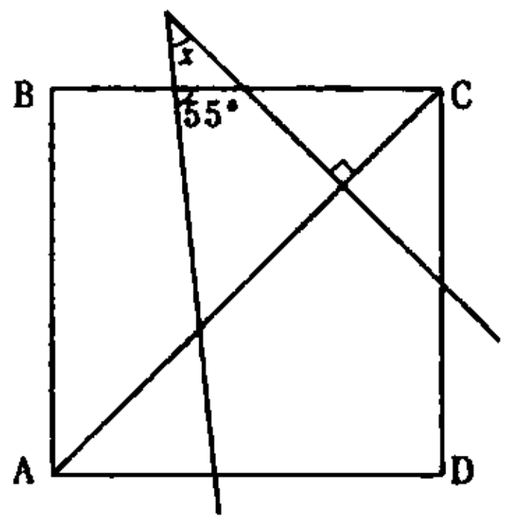
A) 30° **B)** 40° **C)** 50°
D) 60° **E)** 70°

50. En la figura que se muestra a continuación: L_1 // L_2 y el triángulo ABC es equilátero. Hallar el valor de "x".



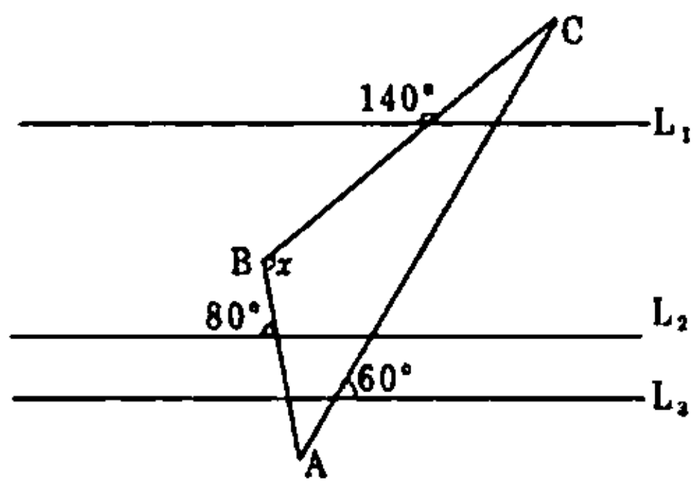
A) 10° **B)** 15° **C)** 20°
D) 25° **E)** 18°

51. En la figura que se muestra, ABCD es un cuadrado. Calcular el valor de "x"



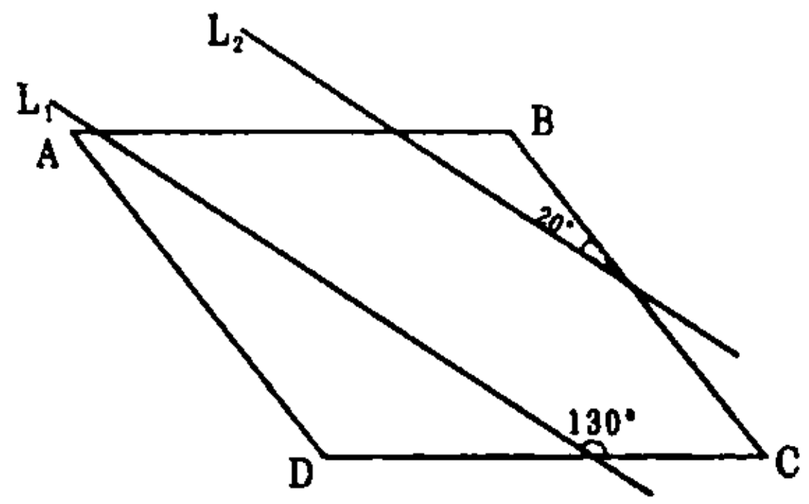
A) 5° **B)** 8° **C)** 10°
D) 12° **E)** 15°

52. En la siguiente figura, $L_1 // L_2$ y $L_2 // L_3$. Calcular la medida del ángulo "B" del triángulo ABC.



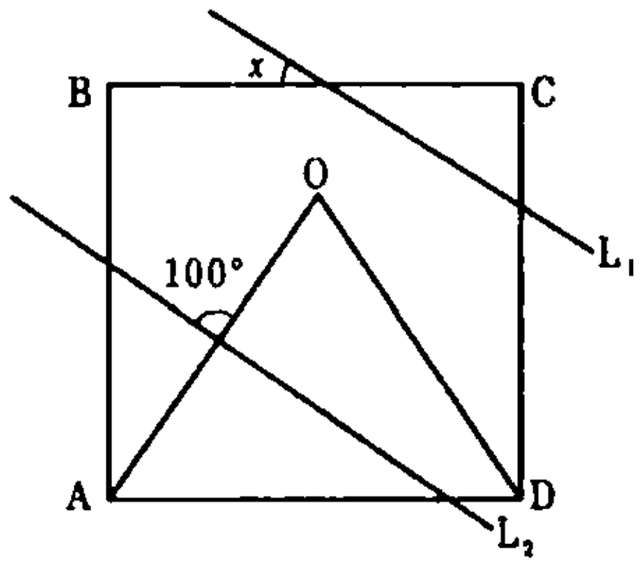
A) 90° **B)** 100° **C)** 120°
D) 120° **E)** 130°

53. En la figura adjunta, ABCD es paralelogramo, además: $L_1 // L_2$. ¿Cuánto mide el ángulo interior mayor del paralelogramo?



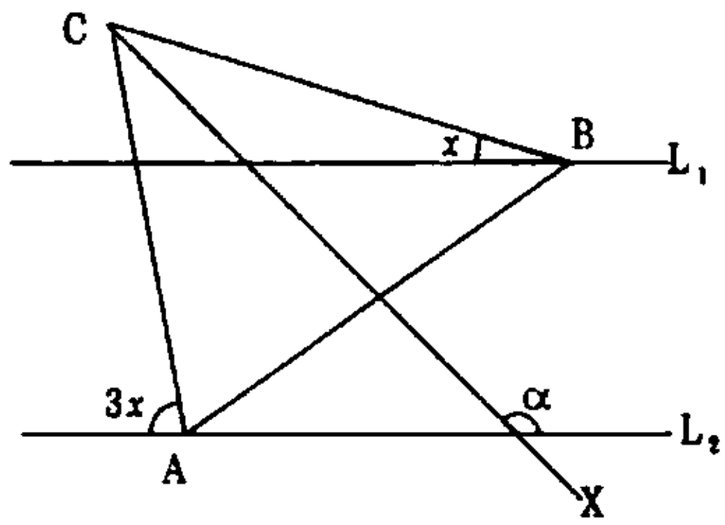
A) 120° **B)** 115° **C)** 110°
D) 100° **E)** 140°

54. ABCD es un cuadrado y AOD un triángulo equilátero, además $L_1 // L_2$. Hallar "x".



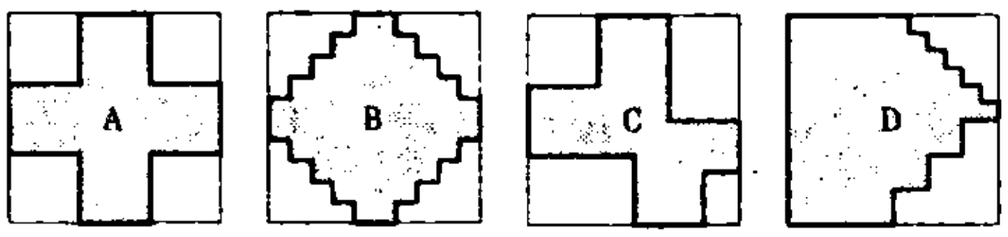
A) 10° **B)** 15° **C)** 20°
D) 25° **E)** 30°

55. En la figura mostrada: $L_1 // L_2$ CX es bisectriz del triángulo equilátero ABC. Calcular el valor de "α".



A) 110° **B)** 115° **C)** 118°
D) 120° **E)** 116°

56. Se muestra 4 cuadrados congruentes de 4 m de lado cada uno. Inscrito en cada uno hay una figura sombreada, ¿Cuál de ellas tiene mayor perímetro?

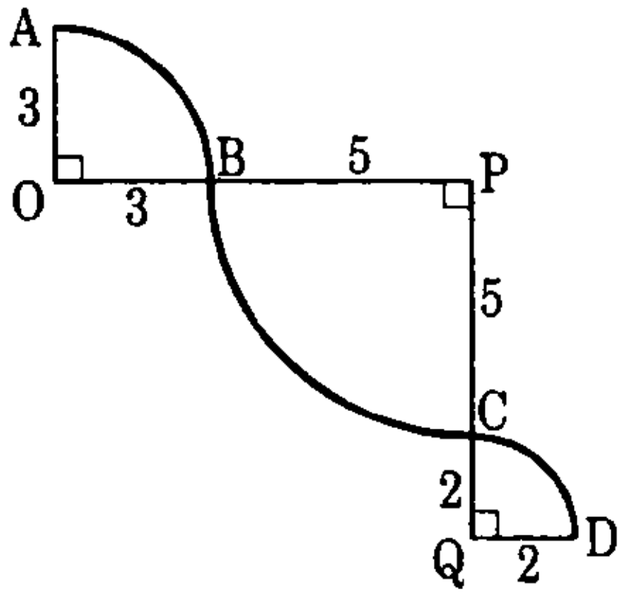


a) A **b)** B **c)** C **d)** D
e) Todas tienen igual perímetro.

57. ¿En qué relación se encuentran los lados de un cuadrado y de un triángulo, si ambos tienen el mismo perímetro?

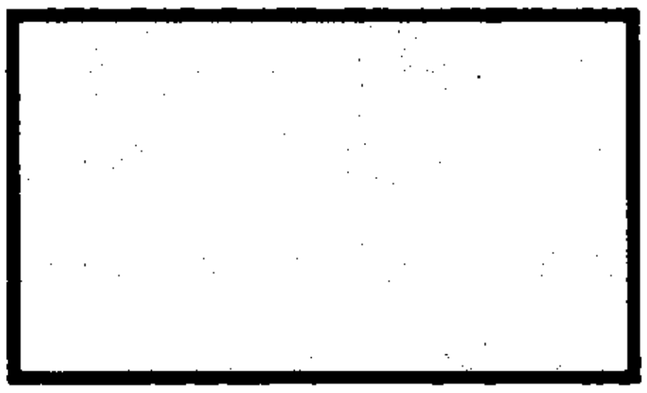
A) 1 : 1 **B)** 2 : 1 **C)** 2 : 3
D) 3 : 4 **E)** 4 : 5

58. ¿Cuál es la longitud de este tramo de la pista? AOB, PBC y CQD son cuadrantes de radios 3 km, 5 km y 2 km respectivamente.



A) 9π km
B) 8π km
C) 5π km
D) 12π km
E) 3π km

59. Este rectángulo tiene 20 cm de perímetro; ¿Cuál puede ser el área máximo del rectángulo?

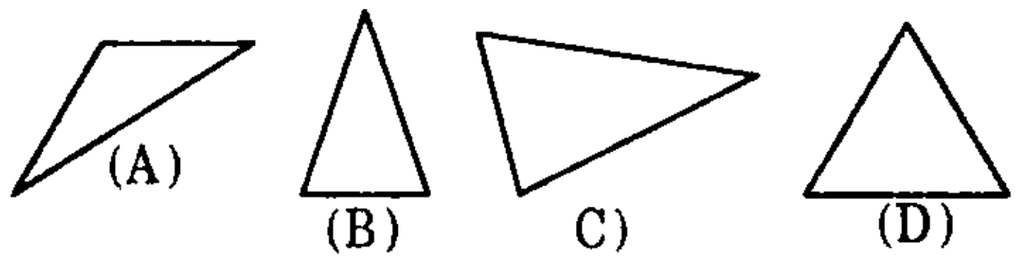


A) 25 cm²
B) 16 cm²
C) 24 cm²
D) 23 cm²
E) 20 cm²

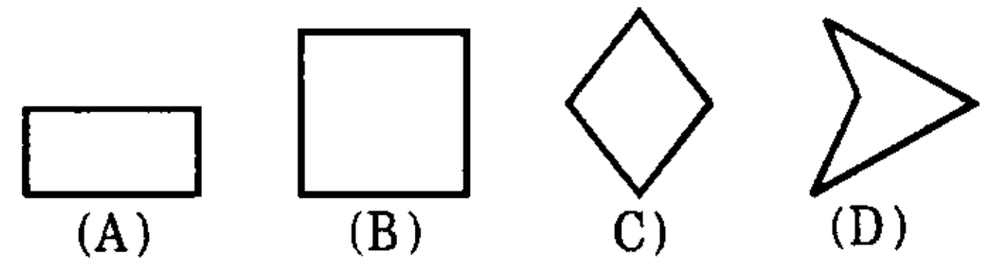
ENUNCIADO

En cada grupo de figuras, los perímetros de las figuras que componen el grupo, son iguales. Señale aquella figura del grupo que tenga más área que las demás:

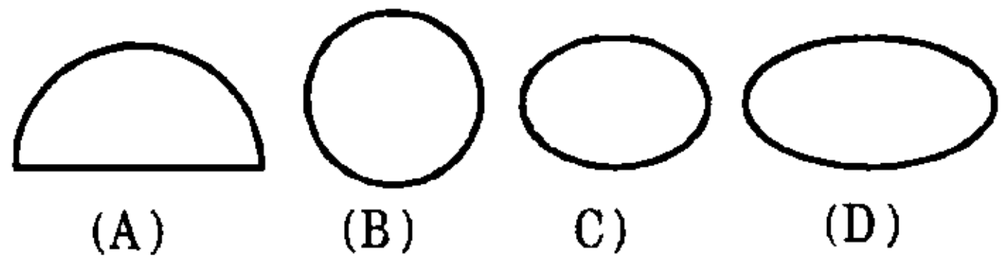
60.



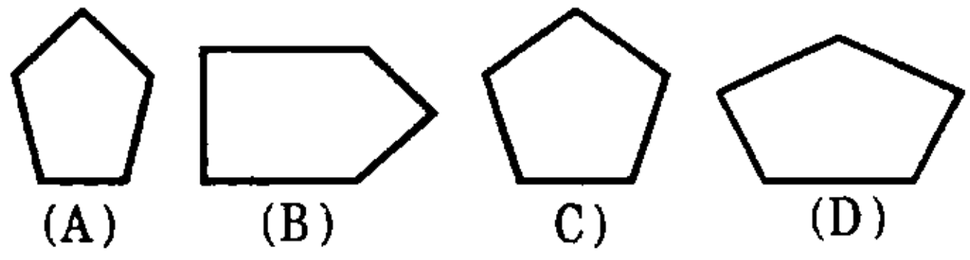
61.



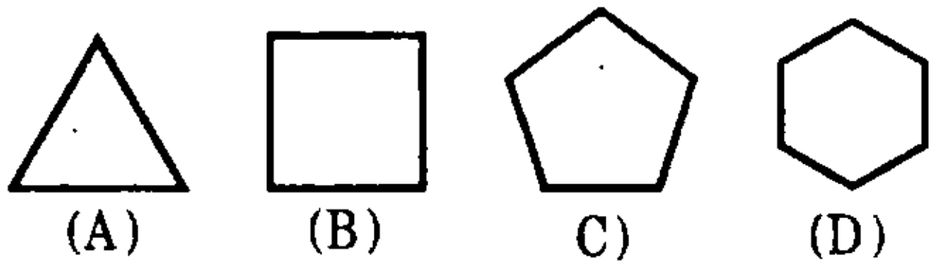
62.



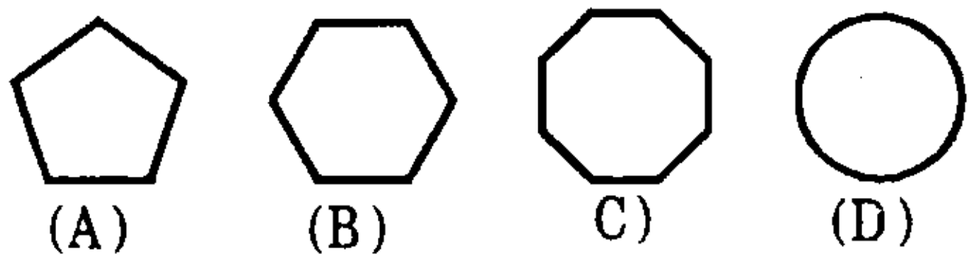
63.



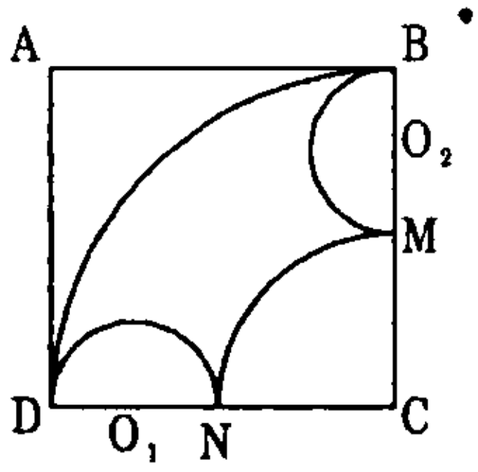
64.



65.

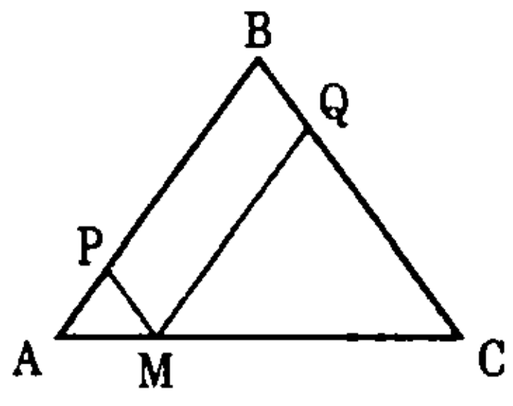


66. ***Hallar el perímetro de la figura sombreada. ABCD es un cuadrado de lado 4 m, O_1 y O_2 son centros de los semicírculos, C es centro de los cuadrantes, M es punto medio de CB y N, punto medio de CD.***



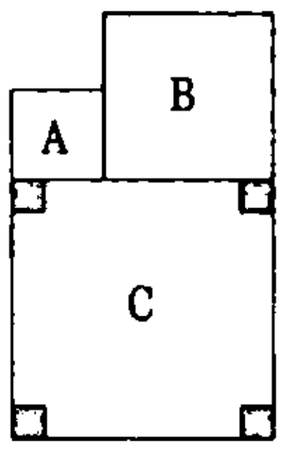
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

67. ***En el triángulo equilátero ABC de perímetro 12 cm, PM// BC y MQ // AB. ¿Cuál es el perímetro de la superficie sombreada?***



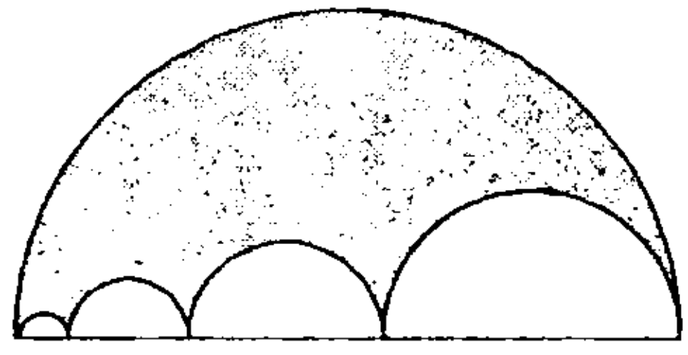
A) 12 cm **B)** 6 cm **C)** 18 cm
D) 15 cm **E)** 8 cm

68. ***El perímetro del cuadrado C es 15 cm, el cuadrado B tiene 3 cm de perímetro más que A. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado A?***



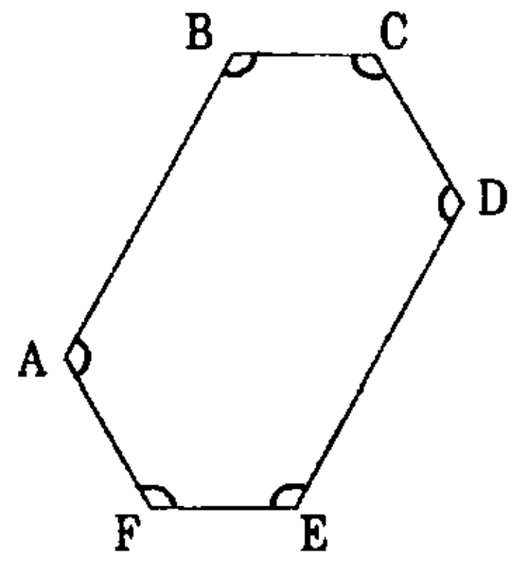
A) 15 cm **B)** 12 cm **C)** 8 cm
D) 6 cm **E)** 4 cm

69. ***La figura muestra 5 semicírculos con diámetros ubicados en la misma recta. El diámetro del semicírculo mayor es 6 cm. ¿Cuál es el perímetro de la figura sombreda?***



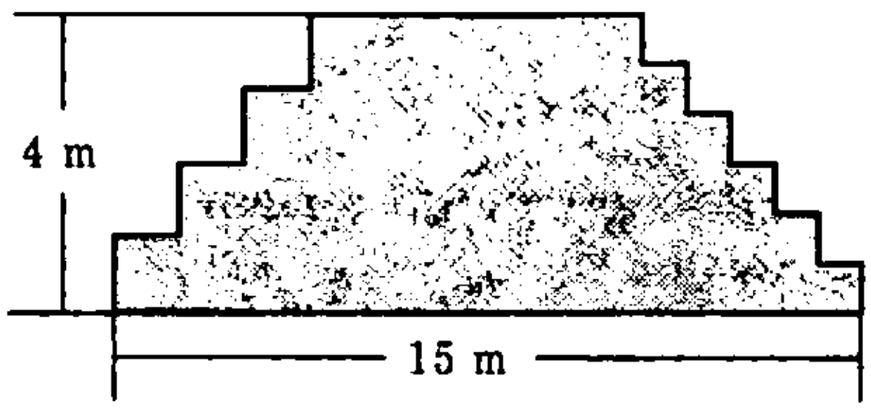
A) 6π **B)** 7π **C)** 12π **D)** 15π **E)** 8π

70. ***Hallar el perímetro del hexágono equiángulo, si BC = 4 cm, CD = 5 cm, DE = 10 cm y EF = 3 cm.***



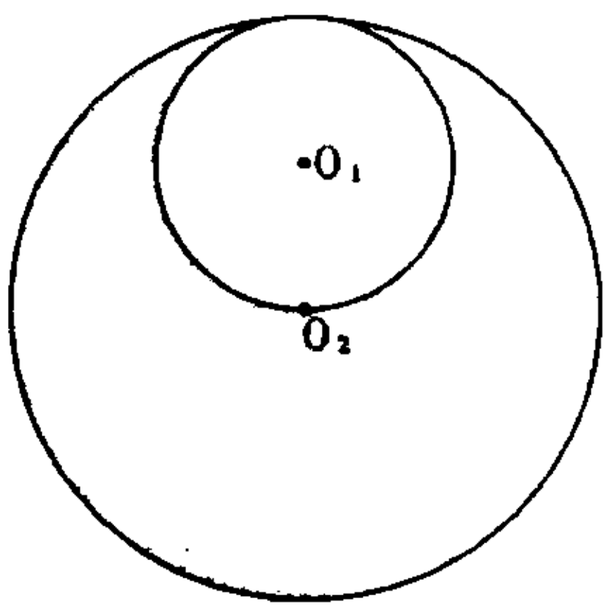
A) 24 cm **B)** 22 cm **C)** 36 cm
D) 57 cm **E)** 37 cm

71. ***¿Cuál es el perímetro de esta silueta de una escalinata? Se muestran las dimensiones.***



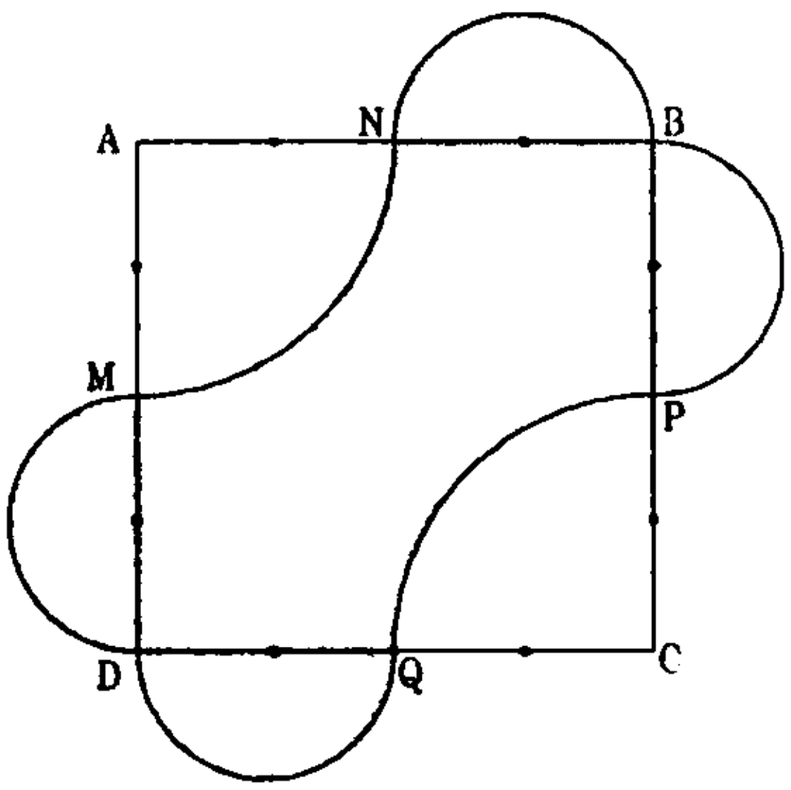
A) 60 cm **B)** 19 cm **C)** 38 cm
D) 40 cm **E)** 30 cm

72. Los puntos O_1 y O_2 son centros de los círculos mostrados. Si el perímetro del sector sombreado es 6 cm, ¿cuál es el perímetro del círculo en blanco?



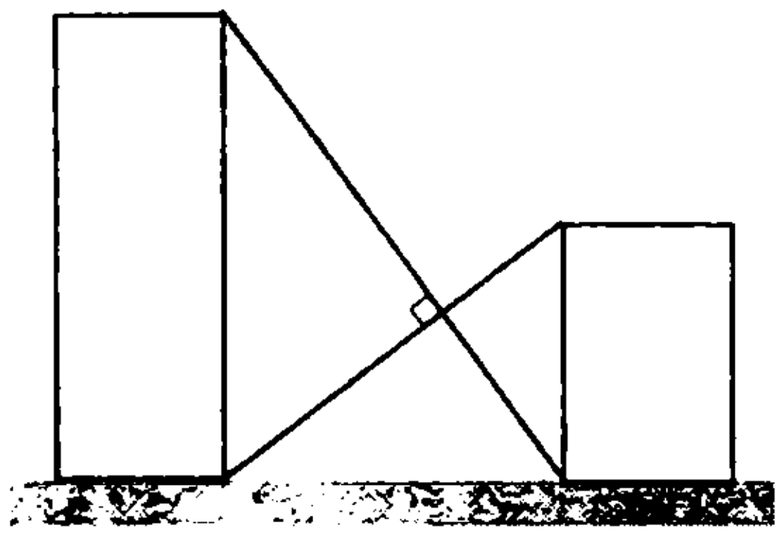
A) 4 cm
B) 3 cm
C) 2 cm
D) 1 cm
E) 2,5 cm

73. En la figura ABCD es un cuadrado de 4 cm de lado. ¿Cuál es el perímetro de la región sombreada? M, N, P y Q son puntos medios de los lados del cuadrado.



A) 6π **B)** 5π **C)** 4π **D)** 3π **E)** 8π

74. Un edificio de 36 m de altura está frente a otro de 25 m de altura. Entre ellos hay una avenida cuyo ancho queremos averiguar. Si uniéramos el pie de cada edificio con el extremo superior del otro, las dos líneas resultarían perpendiculares. ¿Puedes indicar el ancho de la avenida?



A) 25 m **B)** 30 m **C)** 32 m
D) 24 m **E)** 40 m

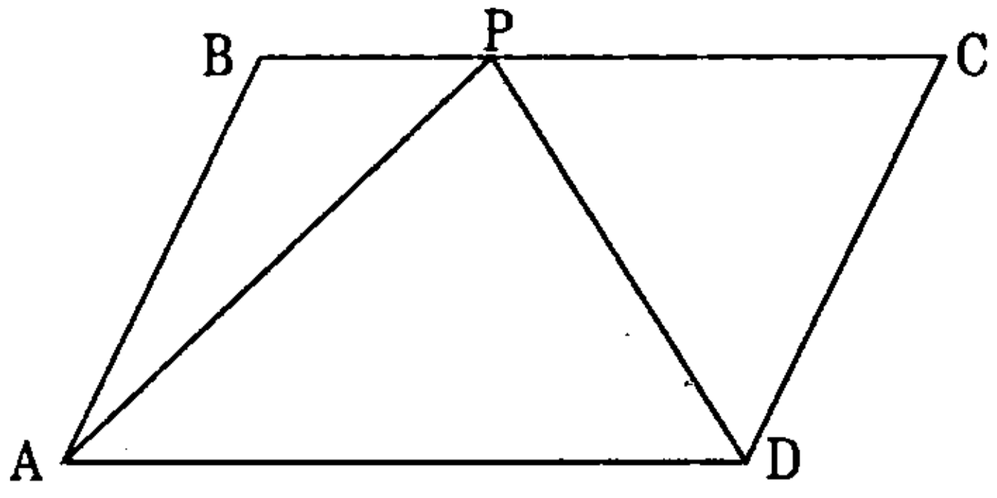
75. De una lámina rectangular de 12 cm de ancho y 21 cm de largo, se construye una caja abierta, cortando un cuadrado de 2 cm de lado en cada esquina. El volumen de la caja es: (SM '75)

A) 136 cm^3 **B)** 192 cm^3 **C)** 292cm^3
D) 380 cm^3 **E)** 272 cm^3

76. Si se une los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero se obtiene un triángulo cuya área con respecto al área del primero es:

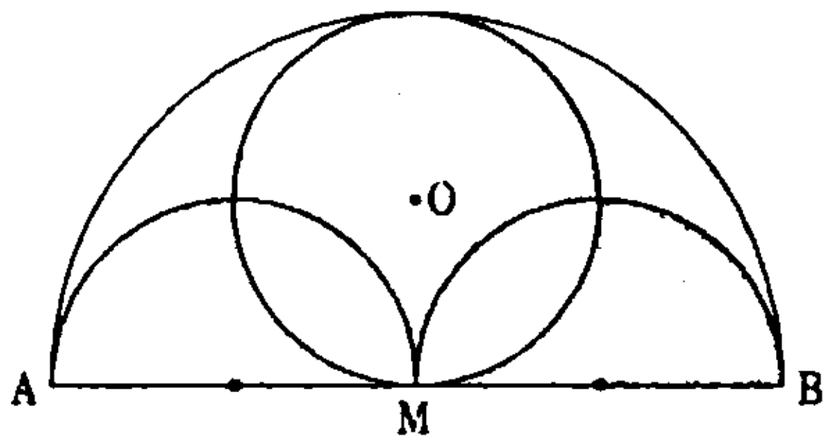
A) quinta parte **B)** cuarta parte
C) tercera parte
D) la mitad **E)** ninguno

77. El área del paralelogramo ABCD es 20 cm^2. ¿Cuál es el área del triángulo APD?



A) 10 cm^2 **B)** 12 cm^2 **C)** 15 cm^2
D) 18 cm^2 **E)** 13 cm^2

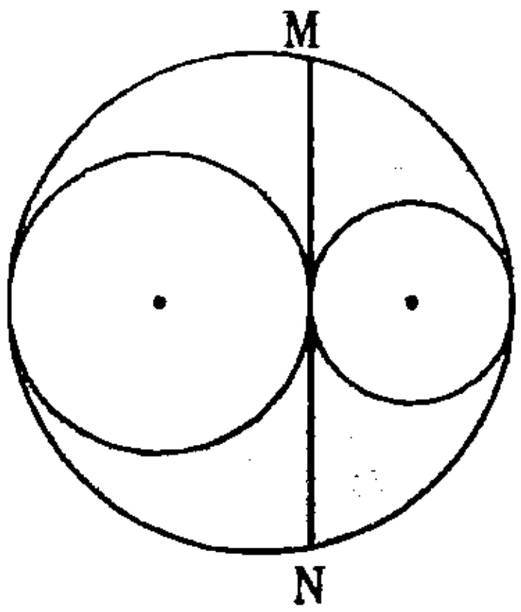
78. En la figura AB = 8 cm, AM y MB son diámetros de los semicírculos y O es centro del círculo. Calcular el área de las partes oscuras del semicírculo mayor.



A) 15 cm² **B)** 12 cm² **C)** 8 cm²
D) 32 cm² **E)** 16 cm²

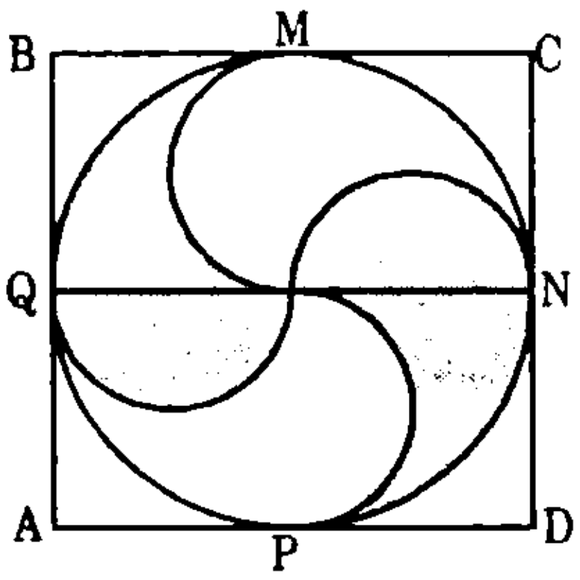
79. En la siguiente figura, hallar el área de la región sombreada; si MN, que es tangente a los 2 círculos menores, mide 12 cm.

A) 15 π cm²
B) 16 π cm²
C) 18 π cm²
D) 20 π cm²
E) 24 π cm²

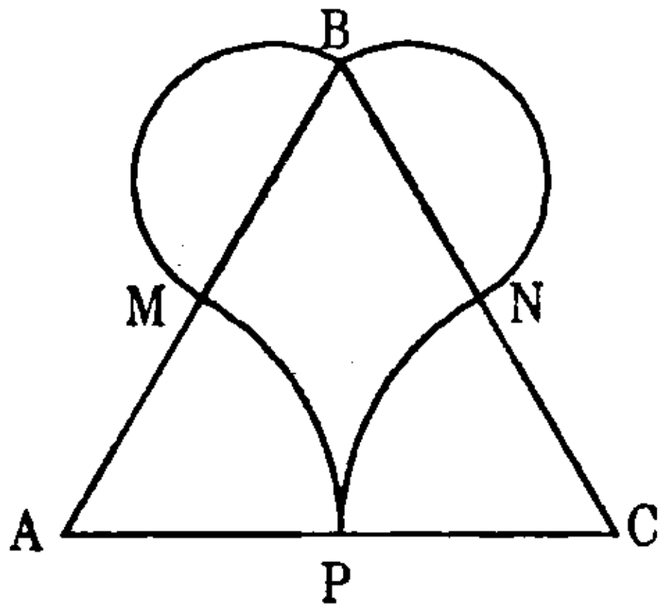


80. Hallar el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado de 8 cm de lado, además M, N, P y Q son puntos medios de los lados.

A) 6 π cm²
B) 8 π cm²
C) 10 π cm²
D) 12 π cm²
E) 15 π cm²

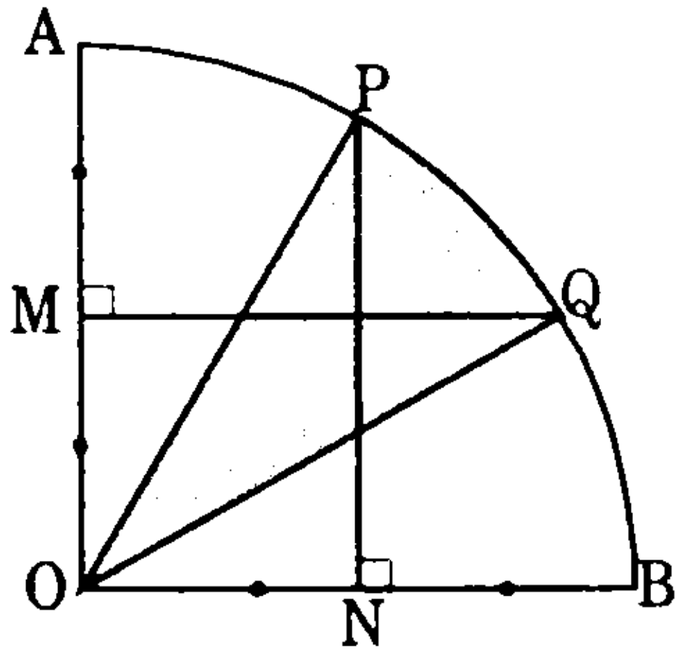


81. Si el triángulo ABC es equilátero y su lado mide 12. Además M, N y P son puntos medios de los lados del triángulo. Calcular el área de la región sombreada.



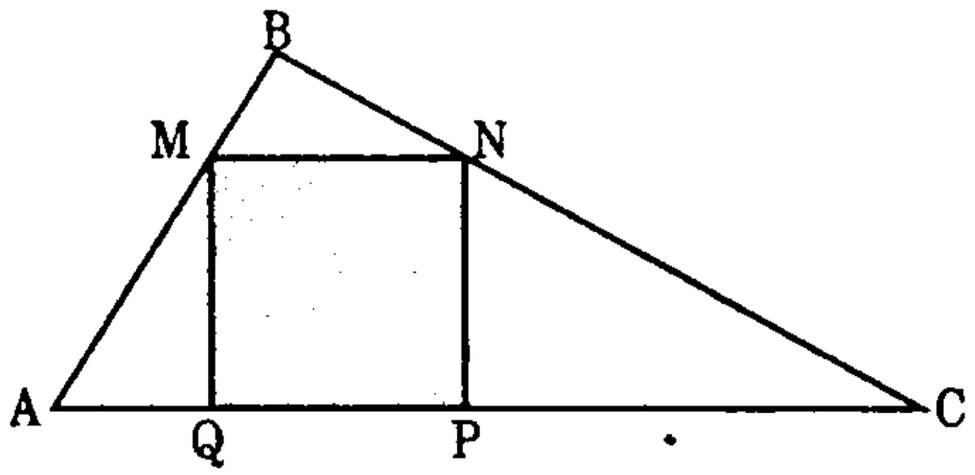
A) $6(2\sqrt{3}-\pi)$ **B)** $6(\sqrt{3}+\pi)$
C) $4(3\sqrt{3}+\pi)$
D) $8(3\sqrt{3}-\pi)$ **E)** $3(12\sqrt{3}-\pi)$

82. En el cuadrante AOB de radio 2r la mediatriz de OA y la mediatriz de OB cortan al arco AB, en los puntos Q y P respectivamente. El área del sector circular POQ es:



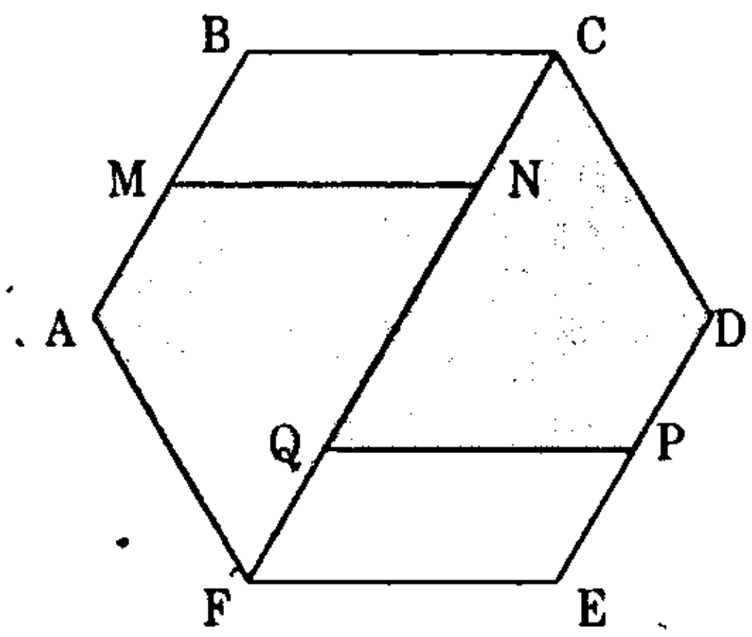
A) πr^2 **B)** $\frac{\pi r^2}{2}$ **C)** $\frac{\pi r^2}{3}$
D) $\frac{\pi r^2}{4}$ **E)** $\frac{\pi r^2}{6}$

83. ¿Cuál es el área del cuadrado MNPQ inscrito en el triángulo ABC?. La base AC y la altura relativa a está base del triángulo, miden 12 cm y 6 cm respectivamente.



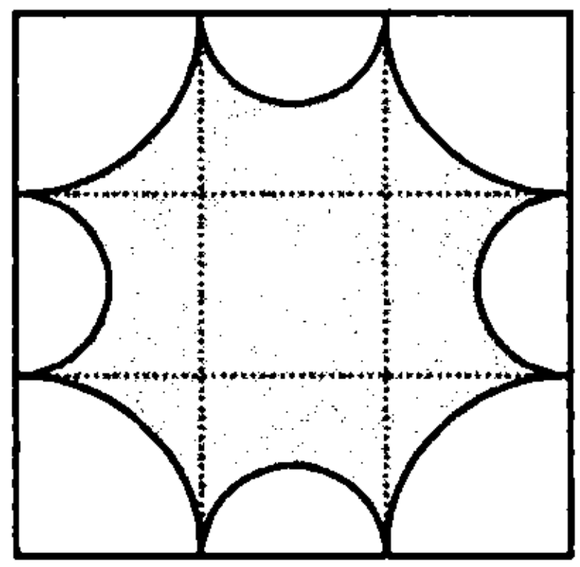
A) 12 cm² **B)** 16 cm² **C)** 9 cm²
D) 25 cm² **E)** 36 cm²

84. Calcular el área del hexágono regular, si el área de la parte sombreada es 8 cm². Para tal fin, ten presente $\overline{MN}$ // $\overline{PQ}$ // $\overline{FE}$ y M y P son puntos medios de AB y DE respectivamente.



A) 9 cm² **B)** 10 cm² **C)** 12 cm²
D) 15 cm² **E)** 63 cm²

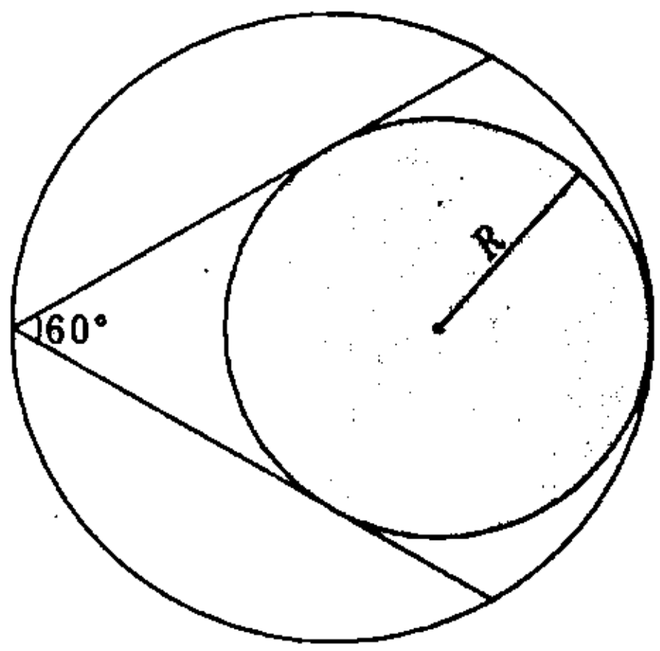
85. Una ventana cuadrada de 120 cm de lado, está dividida ên 9 cuadrados iguales, en cada una de ellas va una luna, decorada, ubicadas de tal manera que forman un motivo, como se muestra en la figura. El área de la parte oscura es: (las esquinas claras son cuadrantes y los laterales, semicírculos)



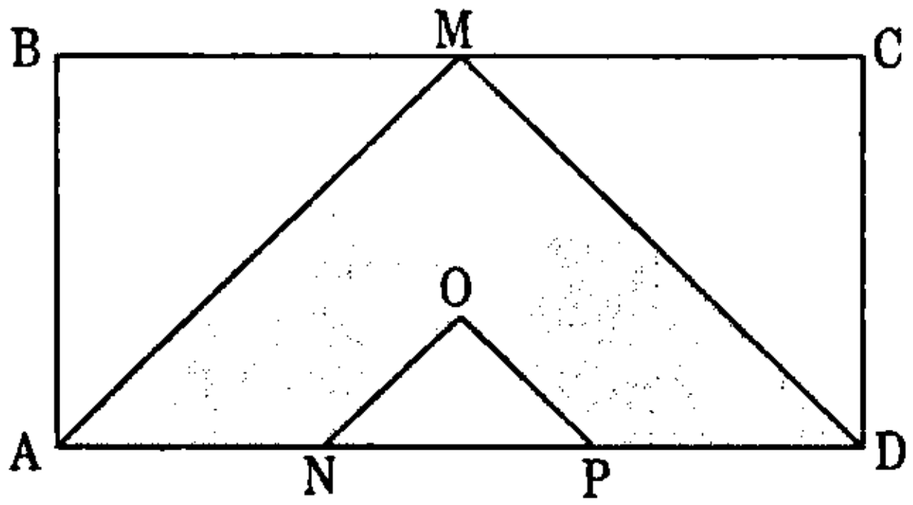
A) $2400(4-\pi)$ cm² **B)** $2400(6-\pi)$ cm²
C) $1200(8-\pi)$ cm²
D) $1200(6+\pi)$ cm² **E)** $2400(2+\pi)$ cm²

86. Hallar el área del círculo sombreado, si el radio del círculo mayor es 6cm.

A) 4π cm²
B) 9π cm²
C) 16π cm²
D) 15π cm²
E) 30π cm²

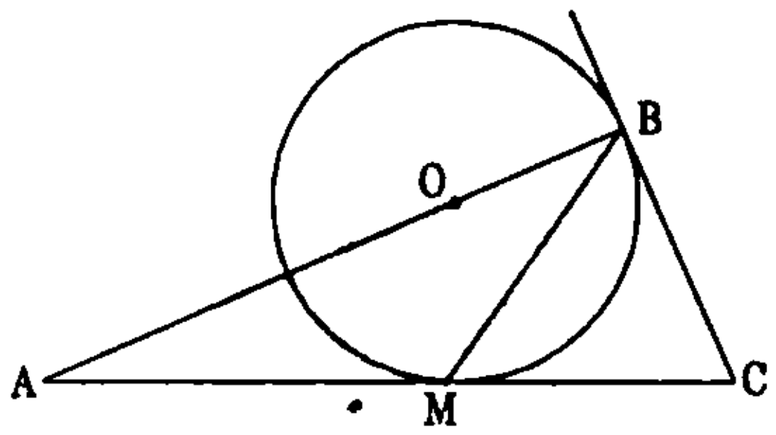


87. ABCD es un rectángulo de 36 cm² de área. BM = MC, AN = NP = PD, además, NO//AM y PO//MD. Calcular el área de la superficie oscura.



A) 12 cm² **B)** 15 cm² **C)** 16 cm²
D)18 cm² **E)** 20 cm²

88. Hallar el área del triángulo ABC, si el círculo de radio r tiene por centro el punto O y MA = MB.



A) $3r^2\sqrt{3}$ **B)** $\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$ **C)** $r^2/3$

D) $2r^2/3$ **E)** $2r^2\sqrt{3}$

89. En la figura que se muestra a continuación, ABC es un cuadrante de radio igual a 4 cm. Determine el área de la superficie sombreada.

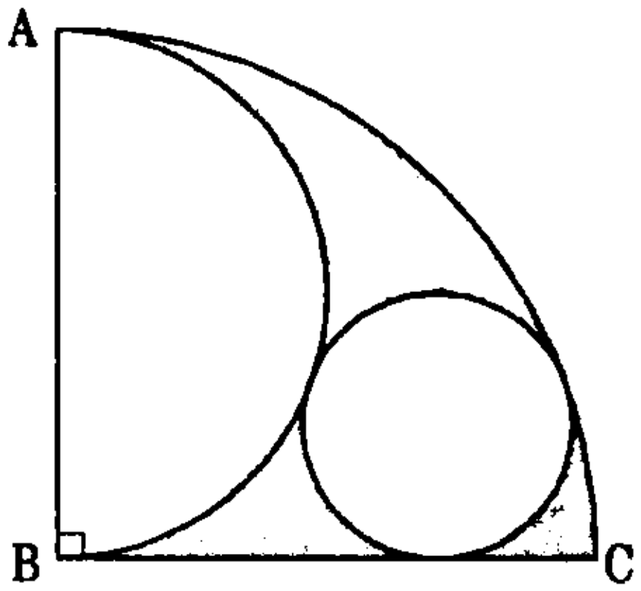
A) $\frac{\pi}{2}$

B) π

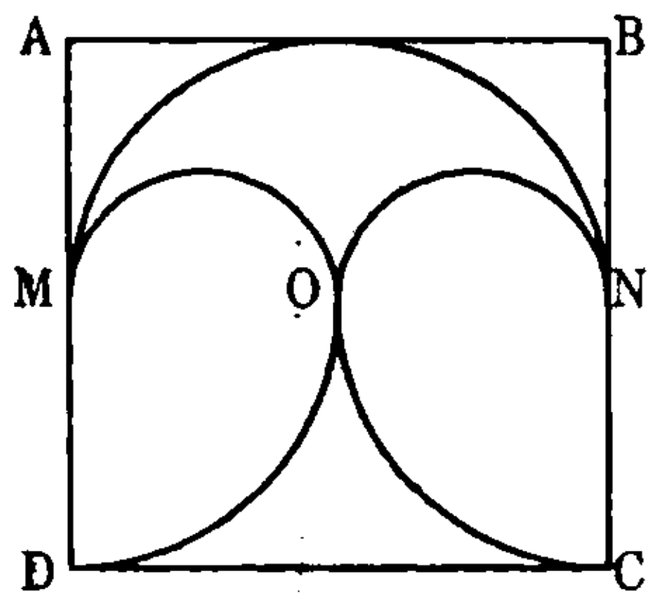
C) 2π

D) $\frac{3\pi}{2}$

E) 4π



90. Cuál es el área de la región sombreada, si el lado del cuadrado ABCD mide 4 cm; M y N son puntos medios de los lados y O centro del cuadrado.

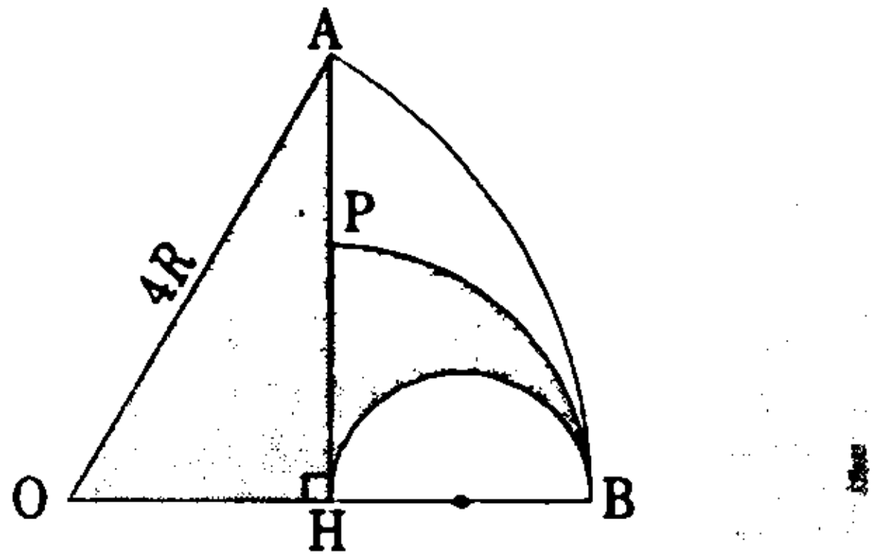


A) $(2 + \pi)$ cm² **B)** $(4 - \pi)$ cm²

C) $(6 - \pi)$ cm²

D) $(8 + \pi)$ cm² **E)** $(8 - \pi)$ cm²

91. Determinar el área de la superficie sombreada, si AOB es un sector circular de radio 4R y ángulo central igual a 60°, además PHB es un cuadrante y HB diámetro del semicírculo.

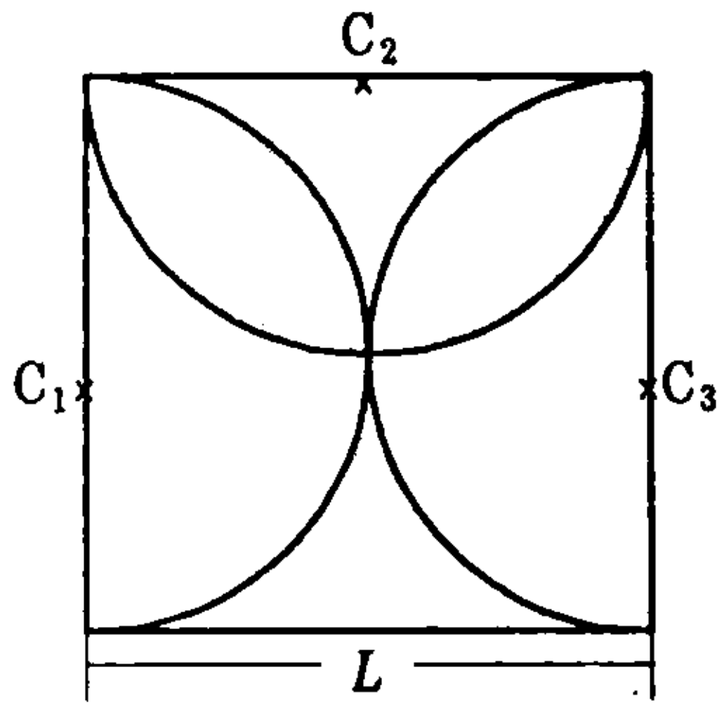


A) $R^2(4\sqrt{3} - \pi)$ **B)** $R^2(4 + \pi)$

C) $\frac{R^2(4\sqrt{3} - \pi)}{2}$

D) $\frac{R^2(4\sqrt{3} + \pi)}{2}$ **E)** $\frac{R^2(2 + \pi)}{2}$

92. Si C_1, C_2 y C_3 son centros de semicírculos de radios iguales, entonces el área de la figura sombreada en función del lado "L" del cuadrado es:



A) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)L^2$ **B)** $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)L^2$

C) $\frac{\pi L^2}{4}$

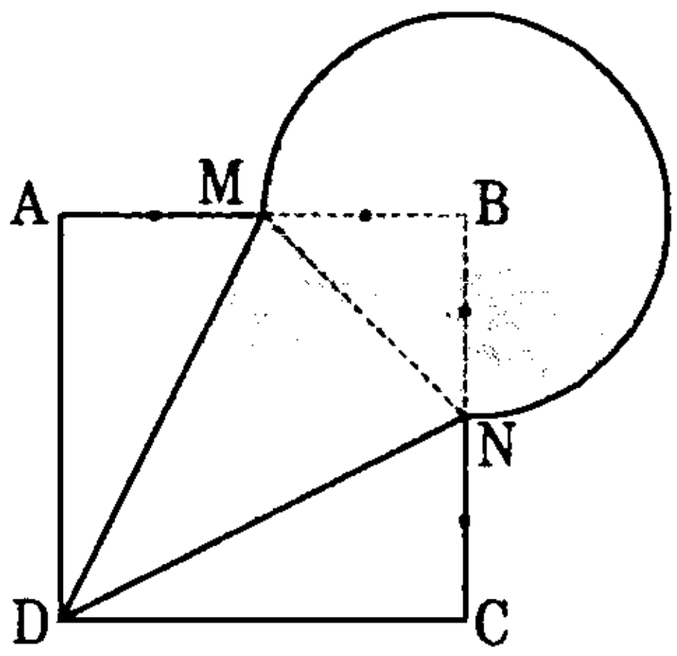
D) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{8}\right)$ **E)** $\frac{1}{8}\pi L^2$

93. En el cuadrado ABCD, de lado "2a" el punto medio M del lado AB, se une con el vértice D. Del punto medio de MD se levanta una perpendicular que corta al lado BC en el punto N. ¿Cuál es el área del triángulo DMN?

A) $\frac{5a^2}{4}$ **B)** $\frac{25a^2}{8}$ **C)** $\frac{15a^2}{4}$

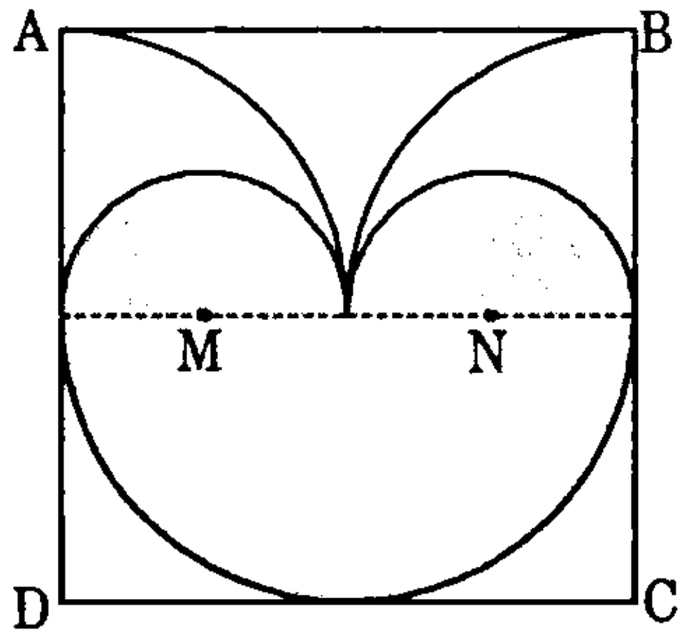
D) $\frac{15a^2}{8}$ **E)** $\frac{10a^2}{3}$

94. En la siguiente figura, ABCD es un cuadrado de lado 4R, y B es el centro del círculo. El área de la región sombreada es:



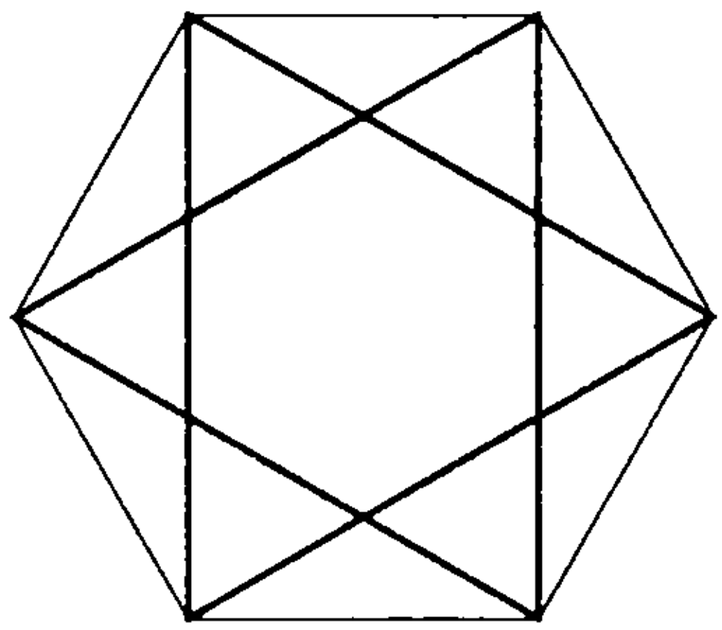
A) $R^2(3\pi + 8)$ **B)** $R^2(3\pi + 4)$
C) $2R^2(3\pi + 4)$
D) $3R^2(2\pi + 3)$ **E)** $3R^2(\pi + 4)$

95. En la siguiente figura, ABCD es un cuadrado de lado "4a" cuyo centro es el punto "O"; además M y N son centros de los semicirculos menores. Calcule el área de la superficie sombreada.



A) $a^2(\pi + 2)$ **B)** $a^2(\pi + 4)$
C) $a^2(\pi + 5)$
D) $a^2(\pi + 10)$ **E)** $a^2(8 + \pi)$

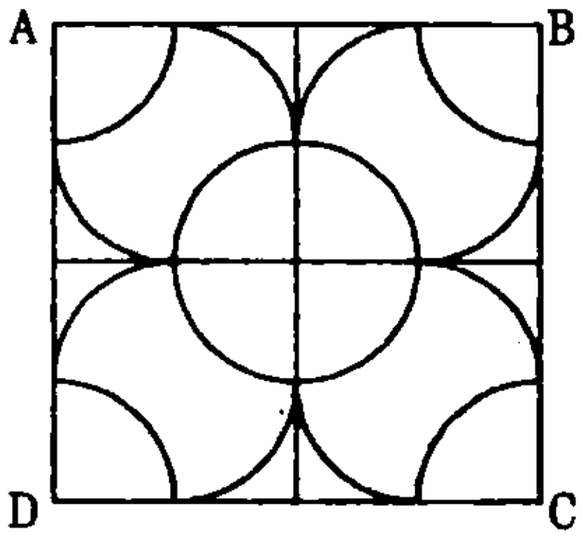
96. La figura muestra un hexágono regular cuyo lado mide: $2a\sqrt{3}$. Entonces el área de la región sombreada es:



A) $6a^2\sqrt{3}$ **B)** $8a^2\sqrt{3}$ **C)** $12a^2\sqrt{3}$

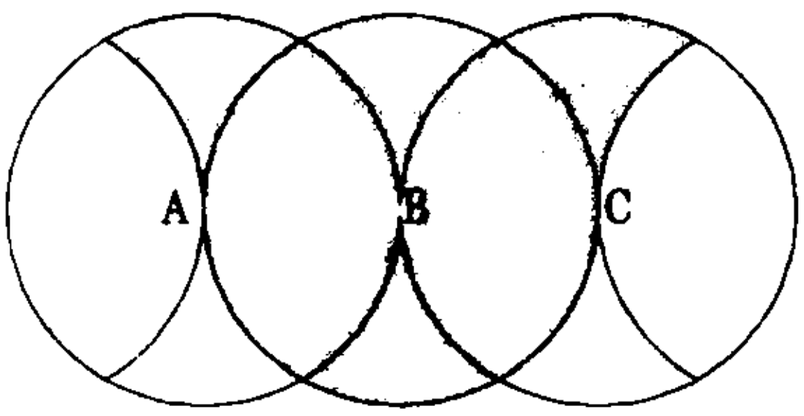
D) $15a^2\sqrt{3}$ **E)** N.A.

97. El cuadrado ABCD cuya área es 14 cm², se divide en cuadrados iguales. El área de la región sombreada es:



A) 7 cm² **B)** 4,5 cm² **C)** 8 cm²
D) 3,5 cm² **E)** 10,5 cm²

98. Determinar el área de la parte sombreada de la figura que se muestra a continuación si A, B y C son centros de los círculos cuyos radios miden "r"

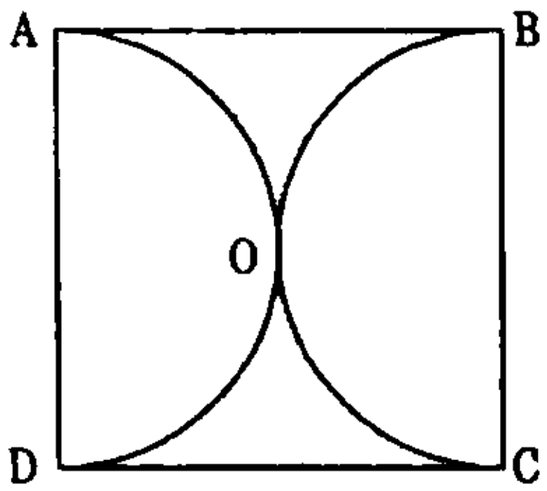


A) $\frac{r^2}{3}(3\sqrt{3}+2\pi)$ **B)** $r^2(\sqrt{3}+\pi)$

C) $r^2(2\sqrt{3}+\pi)$

D) $\frac{r^2}{2}(2\sqrt{3}-3\pi)$ **E)** N.A.

99. En la siguiente figura, ABCD es un cuadrado cuyo centro es O, AD y BC son diámetros de los semicírculos de radio "a". Encuentre el área de la superficie sombreada.



A) $a^2(4-\pi)$ **B)** πa^2 **C)** $2a^2$
D) $2\pi a^2$ **E)** $3\,a^2$

100. En la siguiente figura, ABCD es un cuadrado cuyo lado mide $a\sqrt{5}$ y MNPQ son puntos medios de los lados del cuadrado. Calcule el área de la región sombreada.

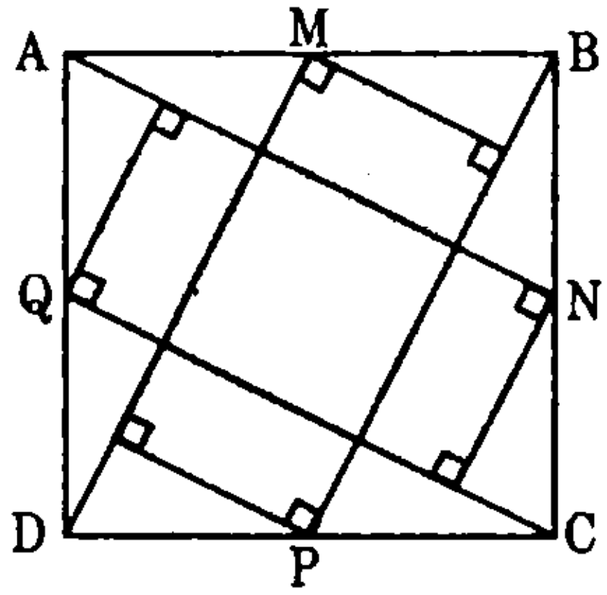
A) a^2

B) $2a^2$

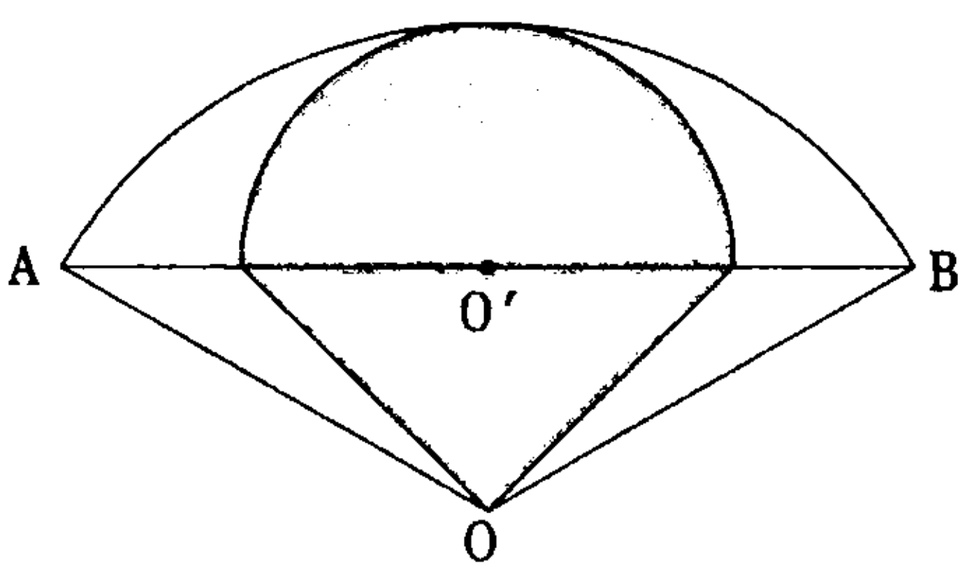
C) $3a^2$

D) $4a^2$

E) $2{,}5a^2$



101. En la siguientes figura, AOB es un sector circular de radio 2r, cuyo ángulo central mide 120° y O' es el centro del semicírculo. Calcule el área de la superficie sombreada.



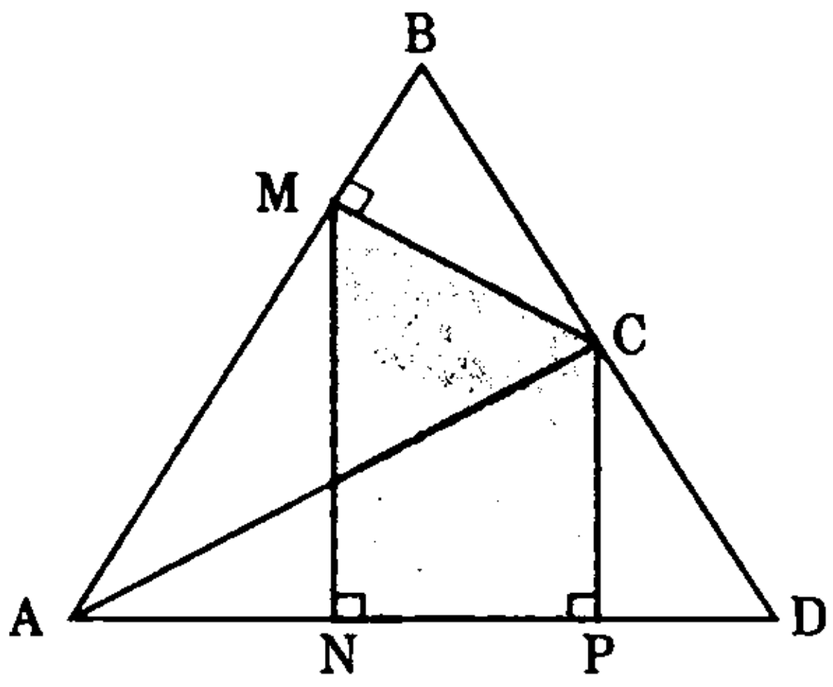
A) $\pi^2(\pi+2)/2$ **B)** $\pi^2(\pi+1)/2$
C) $2\pi^2(\pi-1)/2$
D) $\pi^2(\pi-1)/2$ **E)** $\pi^2(2\pi+1)/2$

102. "M" es un punto cualquiera del lado AB del cuadrado ABCD; tomando como diámetro AM se construye un semicírculo hacia el interior del cuadrado y tomando como diámetro DE

(E en la prolongación de DC) se construye otro semicírculo tangente al anterior. Hallar el área del cuadrado ABCD si el producto de los diámetros de los semicírculos es 12 cm².

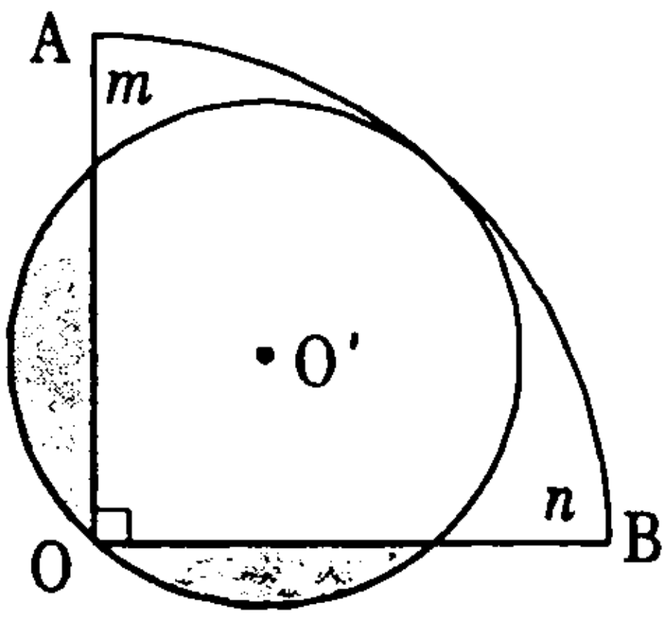
A) 48 cm² **B)** 12 cm² **C)** 36 cm²
D) 24 cm² **E)** 16 cm²

103. El triángulo ABD es equilátero de lado 8 cm. $\overline{AC}$ es mediana, $\overline{CM} \perp \overline{AB}$, $\overline{MN}$ y $\overline{CP}$ perpendiculares a AD. ¿Cuál es el área del cuadrilátero MCPN.



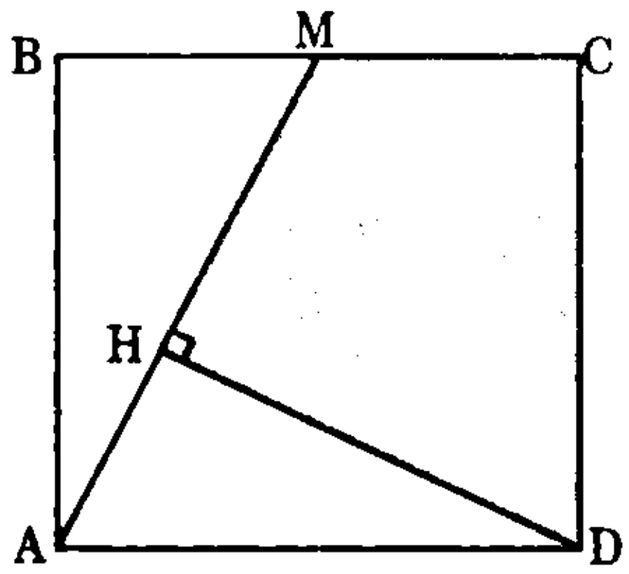
A) $7{,}5\sqrt{3}$ cm² **B)** $20\sqrt{3}$ cm²
C) $24\sqrt{3}$ cm²
D) $27\sqrt{3}$ cm² **E)** $30\sqrt{3}$ cm²

104. Las regiones m y n forman una superficie de 12 cm². El área de la región sombreada es: (AOB es un cuadrante y O' centro del círculo)



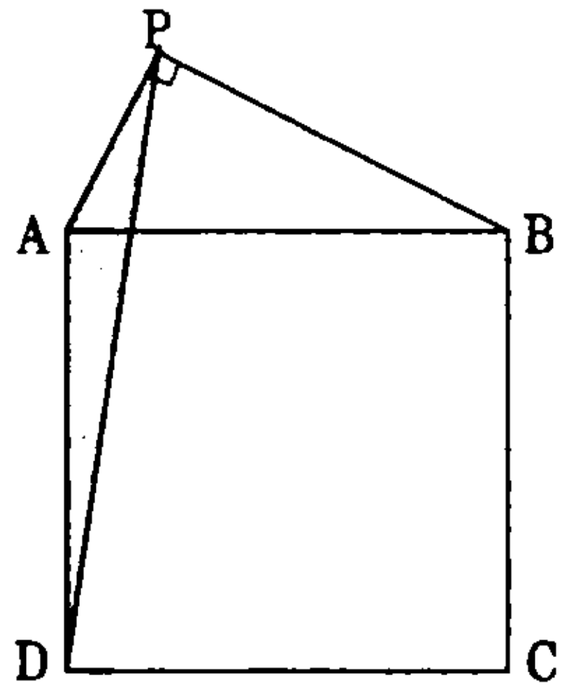
A) 10 cm² **B)** 12 cm² **C)** 14 cm²
D) 15 cm² **E)** 8 cm²

105. El área del cuadrado ABCD es 30 cm²? M es punto medio de BC y $\overline{DH} \perp \overline{AM}$



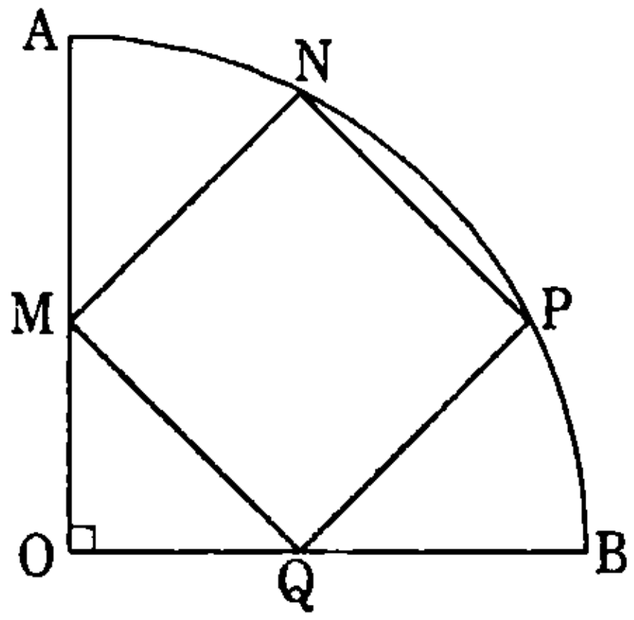
A) 16,5 cm² **B)** 15,5 cm²
C) 12 cm²
D)18 cm² **E)** 9 cm²

106. Calcular el área del triángulo APD, si ABCD es un cuadrado, el ángulo APB mide 90° y AP = $\sqrt{3}$ cm.



A) 3 cm² **B)** 6 cm² **C)** 1,5 cm²
D) 4,5 cm² **E)** 4 cm²

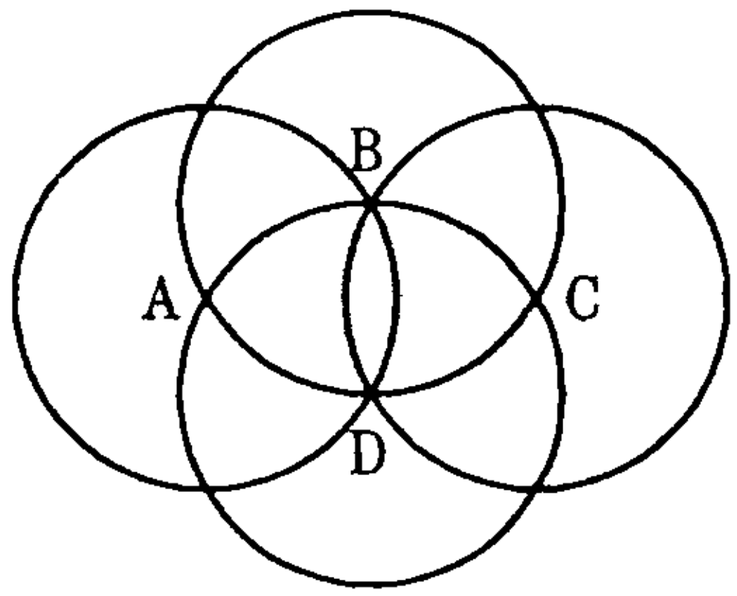
107. En el cuadrante AOB de radio $a\sqrt{5}$ se inscribe el cuadrado MNPQ, como muestra la figura; determinar el área del cuadrado.



A) a^2 **B)** $2a^2$ **C)** $3a^2$

D) $4a^2$ **E)** $\frac{5a^2}{2}$

108. La figura muestra 4 círculos iguales, cuyos radios miden "r", donde A, B, C y D son sus respectivos centros. Calcule el área de la porción sombreada.



A) $\frac{r^2}{2}(\pi+\sqrt{3})$ **B)** $\frac{r^2}{2}(\pi-\sqrt{3})$

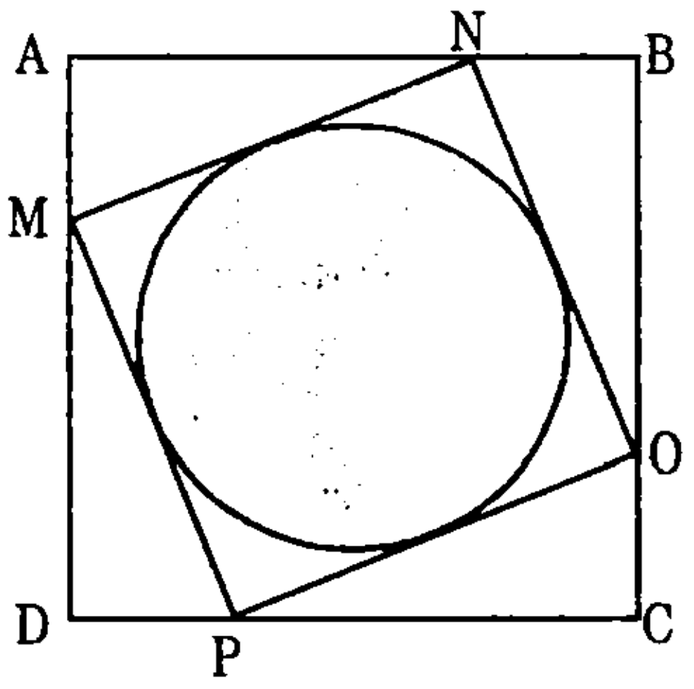
C) $\frac{r^2}{2}(\pi-2\sqrt{3})$

D) $\frac{r^2}{2}(2\pi+\sqrt{3})$ **E)** $\frac{r^2}{2}(2\pi-\sqrt{3})$

109. En el rectángulo ABCD, AB = 30 cm y BC = 20 cm. M es punto medio de AB y N es punto medio de DC. De M se traza la perpendicular MQ a NB y de N se traza la perpendicular NP a DM. Hallar el área del rectángulo PMQN.

A) 156 cm² **B)** 168 cm² **C)** 180 cm²
D) 192 cm² **E)** 204 cm²

110. En el cuadrado ABCD, se inscribe otro cuadrado MNPQ, donde AN = 2NB y además el lado del cuadrado mayor mide "3a", calcular el área del círculo inscrito en el cuadrado menor.



A) $\frac{5a^2\pi}{4}$ **B)** $\frac{4a^2\pi}{5}$ **C)** $\frac{5a^2\pi}{2}$

D) $\frac{3a^2\pi}{3}$ **E)** $\frac{5a^2\pi}{8}$

CLAVES DE RESPUESTAS

PÁGINA 414	1	2	3	4	5	6	7	8
	A	C	A	A	C	E	B	E

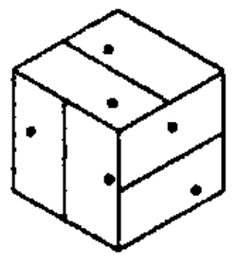
PÁGINA 418	1	2	3	4	5	6	7	8
	E	C	B	D	C	D	D	A
	9	10	11	12	13			
	B	D	C	C	D			

PROBLEMAS PROPUESTOS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	E	A	E	A	A	A	D	D	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
i	C	D	*ii*	C	*iii*	B	B	D	A
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	D	D	C	D	*iv*	B	E	A	D
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	D	B	C	E	C	C	D	C	B
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	C	A	B	C	D	C	D	D	C
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
C	D	C	C	D	E	D	C	A	D
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
B	B	C	D	D	C	A	D	A	E
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C	C	A	B	E	B	A	E	C	B
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
E	C	B	C	B	C	C	B	B	E
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
D	E	D	A	E	C	A	A	A	C
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
A	A	A	B	A	A	B	D	D	A

i) AQ, BP, CN, DM

ii)



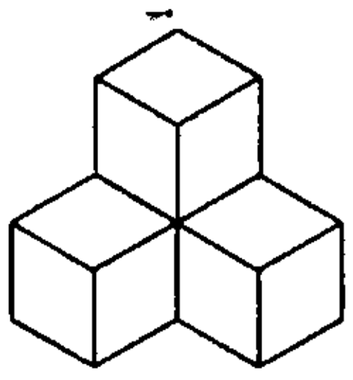
iii) El área de la figura aumenta en un cuadradito. En la diagonal formada en la segunda figura hay una pequeña avertura que casi no se nota. El área de esta avertura es un cuadradito.

Esta situación ocurre cuando los lados de rectángulo y las piezas del rompecabezas tienen sus dimensiones en números de Fibonacci.

iv) **A)** S; **B)** Q; **C)** V; **D)** K; **E)** A; **F)** N; **G)** M; **H)** K; **I)** Y; **J)** P

Divertijos

1.



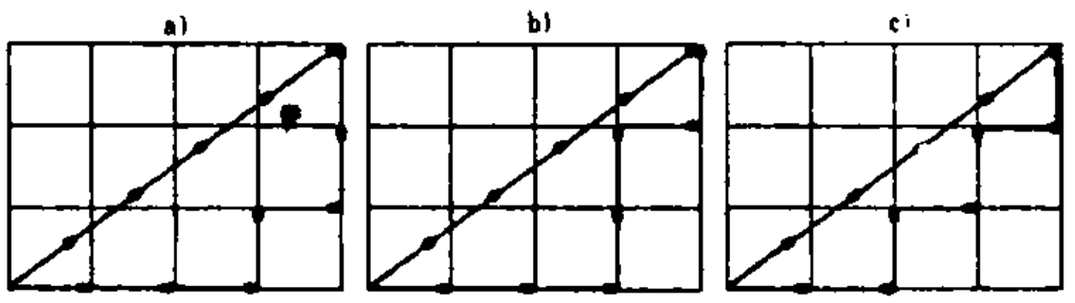
2. Un círculo

3. En la diagonal de la segunda figura hay un espacio.

4. A: 30 + 10 = 40 cm de grosor

20 + 15 = 35 cm de grosor

5.



Euclides (365 a.n.e. - 300 a.n.e.)

Euclides

Nació : 365 AC en Alejandría, Egipto

Muy poco se sabe con certeza de su vida. Probablemente, fue llamado a Alejandría en el año300 AC. Sin duda que la gran reputación de Euclídes se debe a su famosa obra titulada Los elementos Geométricos, conocida simplemente por Los Elementos. Tal es la importancia de esta obra que se ha usado como texto de estudios cerca de 2000 años, veinte siglos, sin que se le hicieran correcciones de importancia, salvo pequeñas modificaciones. Los Elementos están constituidos por trece libros. A aquellos se ha agregado un XIV libro que comprende un trabajo de Hipsicles del siglo II de nuestra era, y aún un XV libro con un trabajo de menor importancia.

Esta obra de Euclídes es el coronamiento de las investigaciones realizadas por los geómetras de Atenas, como así mismo de los anteriores. Euclídes no hace sino volver a tomar con más perfección los ensayos anteriores; hace una selección de las proposiciones fundamentales y las coordina convenientemente desde el punto de vista lógico. La forma que emplea es la deductiva.

Las definiciones que emplea son nominales, es decir, definiciones en que se da a una palabra una denotación que se determina a priori. Entre estas definiciones están las de :

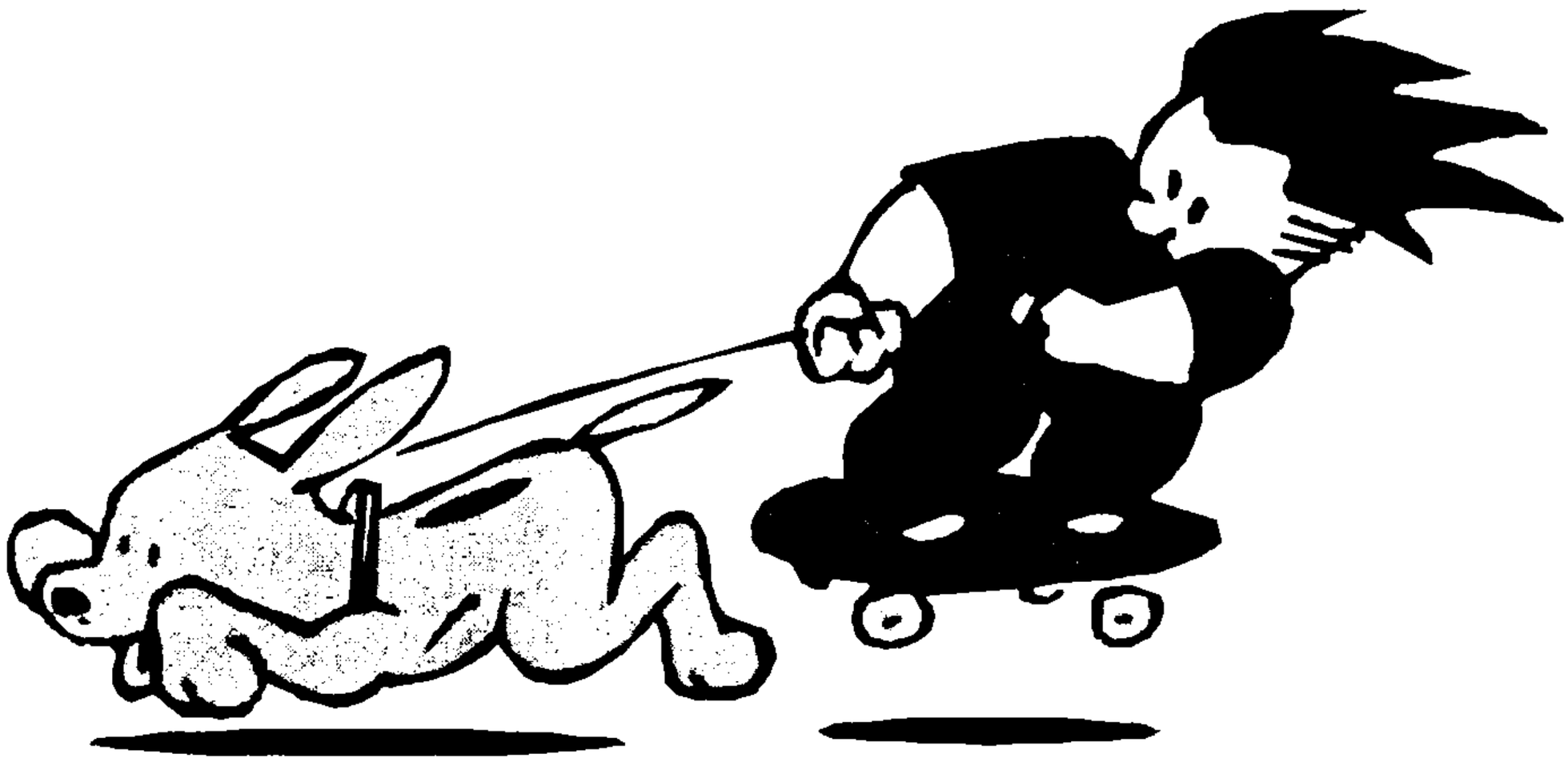
1.- Punto, que lo define como «una cosa que no tiene parte»
2.- Línea «es una cosa que no tiene sino largo; es una longitud sin ancho»
3.- Línea recta, es la que está igualmente situada con respecto a sus puntos.
4.- Los extremos de las líneas son puntos.
5.- Superficie es lo que tiene sólo ancho y largo.
6.- Los límites de las superficies son líneas»
7.- Angulo es la inclinación de una línea con respecto a la otra.
8.- Angulos adyacentes son los que tienen un lado común y los otros en línea recta.
9.- Angulo recto es aquél que es iguala su adyacente.
10.-Angulo agudo es el menor que el recto y ángulo obtuso, el mayor que el recto.

Además, define los triángulos isósceles, rectángulos, etc. y da otras definiciones de elementos que, como algunas de las anteriores, las seguimos usando.

Falleció : Alrededor del 300 AC

11

RAZONAMIENTO FISICO GEOMETRICO



INTRODUCCION

La matemática como herramienta para la resolución de problemas no ha sido excluido de ningún campo del saber. La física es una las ciencias que más auxilio ha recibido de la matemática y en reciprocidad ha contribuido a su avance planteándole nuevos retos en los que la matemática se ha quedado corto.

En este capítulo vamos a exponer estrategias en la resolución de algunos problemas de movimiento rectilíneo uniforme, movimiento de cuerpos rígidos y mecanismo de poleas.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Es necesario saber resolver ecuaciones.

Muchos piensan que para resolver los problemas de algún campo de la física hay que conocer necesariamente las fórmulas de ese campo, que sin ellas es prácticamente imposible, lo cual no es del todo cierto.

Un problema físico contiene el aspecto físico, es decir, en qué consiste el fenómeno físico y el aspecto matemático que permite cuantificar los elementos del fenómeno. Por lo tanto, para resolverlo, es necesario comprender primero las características del fenómeno y luego matematizarlo.

11.1 Movimiento rectilíneo uniforme

La **cinemática** es la parte de la mecánica que estudia y describe el movimiento de un cuerpo o partícula, sin tomar en cuenta las causas que producen el movimiento. El término **partícula** lo vamos a entender como un cuerpo material cuya forma y tamaño no serán considerados en el problema.

El término **móvil** se aplicará para todo cuerpo que tiene o posee un movimiento, por ejemplo, un avión en vuelo, un atleta que corre, etc.

El **movimiento**, es un concepto demasiado amplio y complejo. En este caso, entenderemos por **movimiento mecánico** al cambio de posición que experimenta un cuerpo con respecto a otro considerado como referencia.

Cuando una partícula experimenta un movimiento lo hace siguiendo un camino o una línea que llamaremos **trayectoria**. Cuando la trayectoria es una línea recta, se dice que el movimiento es rectilíneo.

¿Rapidez o velocidad?

En algún tramo de la Panamericana Sur, un ómnibus está en movimiento, recorriendo 100 kilómetros en cada hora, ¿cuál es su rapidez y cuál es su velocidad?

La rapidez es 100 kilómetros por hora. La velocidad no está totalmente definida, porque, si bien está en la Panamericana Sur, no se ha especificado si se dirige al Sur o al Norte.

El término VELOCIDAD, no sólo involucra cuántos metros recorre en cada hora, sino en qué dirección y sentido es el movimiento. Por eso, matemáticamente la velocidad se representa mediante un **vector**.

Sin embargo, en el lenguaje común, la velocidad se entiende en el mismo sentido que la rapidez, en adelante así lo consideraremos.

Cuando un móvil recorre trayectos de la misma longitud en cada unidad de tiempo, diremos que el móvil se mueve con RAPIDEZ UNIFORME O CONSTANTE.

Divertijo 1

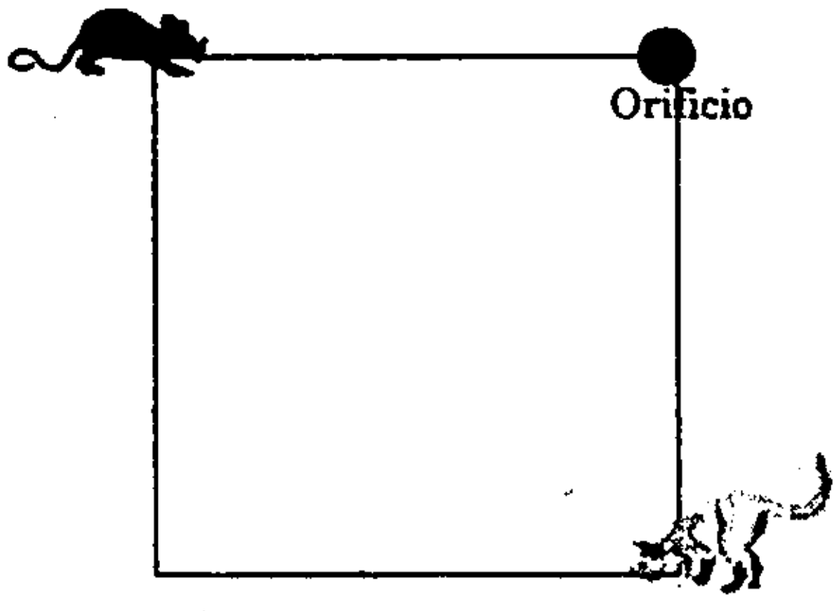
Sube la marea

Una escalera cuelga de un bote, de modo que el último peldaño queda a 20 cm por encima del nivel del agua. Los peldaños están igualmente espaciados cada 40 cm. Si la marea sube 50 cm por hora, ¿cuánto tiempo demorará el agua en cubrir 5 escalones?

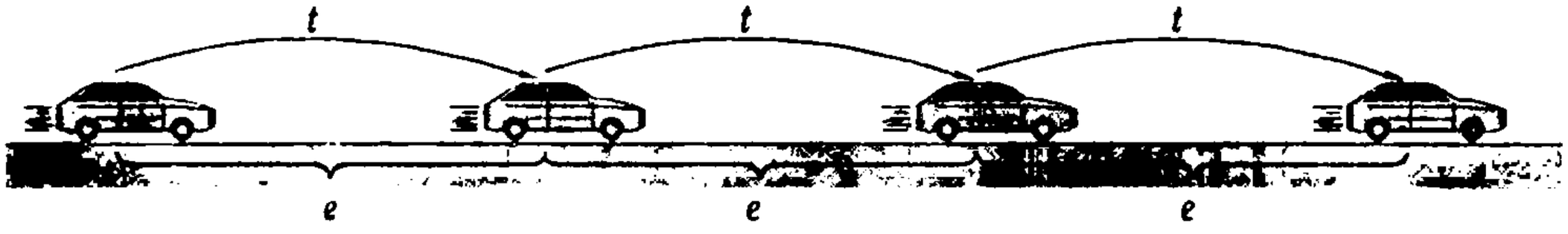
Divertijo 2

El gato y el ratón

La figura adjunta muestra una habitación cuadrada de 6 m de lado. En las esquinas opuestas de la habitación aparecen un gato y un ratón que se divisan simultáneamente. Si el gato se dirige en todo momento hacia el ratón en tanto que éste se dirige al orificio tal como muestra el gráfico:



¿El gato, logrará atrapar al ratón, si ambos corren con la misma rapidez?



En el movimiento rectilíneo uniforme, el móvil, en intervalos de tiempo iguales recorre espacios iguales.

Problema 1

La ciudad de Ica se encuentra en el kilómetro 301 de la Panamericana Sur. ¿Qué hora debes salir de Lima, si quieres estar a las 10 de la noche, en la fiesta de la Vendimia de Ica? ¡Ah¡ ... Te informo que los ómnibus corren por la Panamericana a 86 kilómetros por hora.

Resolución

La rapidez de 86 km/h significa que el ómnibus recorre 86 kilómetros en cada hora. Para calcular el tiempo de viaje basta calcular cuántos 86 km hay en 301 km, esto es $301 \div 86 = 3{,}5$. Por lo tanto el viaje dura 3 horas y media. Si quieres estar a las 10, debes salir a las seis y media de la tarde.

Rpta.: 18 h 30 min

Divertijo 3

Carrera contra el Sol

Pueda que la pregunta te parezca absurda, hasta puedes pensar que el autor está loco, pues tienes ra..., digo no hay razón. Es un asunto de lo más científico. ¿Cuándo te mueves más rápido con respecto al Sol, de día o de noche?

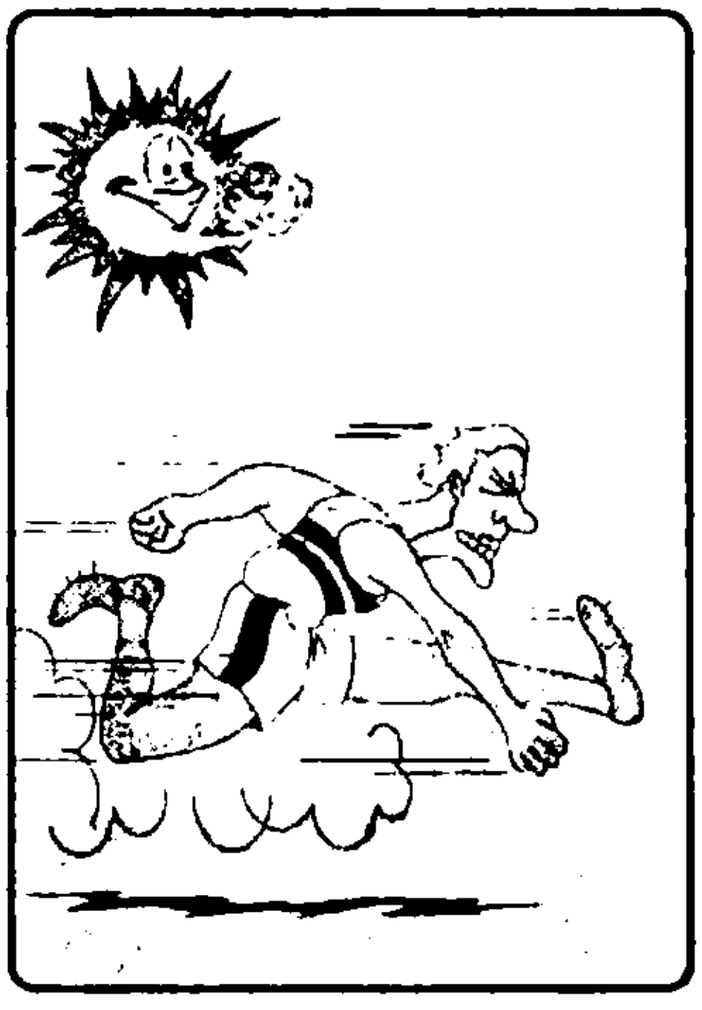
GENERALIZANDO

Si un móvil ha recorrido "*e*" kilómetros en "*t*" horas, ¿Cuál es su rapidez (v) en kilómetro por hora?

La rapidez es la cantidad de kilómetros que recorre en cada hora. Luego: Si en "t" horas recorre "e" km en 1 hora recorre "v" km.

Si en t horas recorre e km
en 1 hora recorre v km

De donde $\boxed{v = \frac{e}{t}}$ también $\boxed{e = vt}$ y $\boxed{t = \frac{e}{v}}$



Problema 2

Dos ómnibus A y B salen del Cusco hacia Arequipa a la 17 h. El ómnibus A a 40 km/h y el ómnibus B a 36 km / h ¿Qué horas el ómnibus A le ha sacado una ventaja de 24 km al B?

Resolución

METODO (1)

En una hora A le saca a B: **40 – 36 = 4 km** de ventaja, entonces para 24 km de ventaja requiere de **24÷4 = 6 h**. Esto se producirá a las **17 + 6 = 23 h**.

METODO (2)

El tiempo de viaje para ambos es el mismo. Sea t horas este tiempo. En t horas el ómnibus A ha recorrido e_A kilómetros y el B, e_B kilómetros, de donde:

$$e_A - e_B = 24 \qquad \ldots (1)$$

Pero $e_A = 40t$ y $e_B = 40t$;

en (1): $40t - 36t = 24$

$$4t = 24 \Rightarrow t = 6\,h$$

La ventaja de 24 km se producirá a las $17 + 6 = 23\,h$.

Rpta.: 23 h

Tiempo de encuentro y de alcance

Problema 3

Dos automóviles se encuentran en dos ciudades separados por 160 km de carretera. Ambos parten simultáneamente a razón de 50 km/h y 30 km/h respectivamente. ¿Luego de cuantas horas se encontrarán si:

a. Parten en sentidos contrarios (al encuentro)

b. Parten en el mismo sentido

Resolución

a. METODO (1)

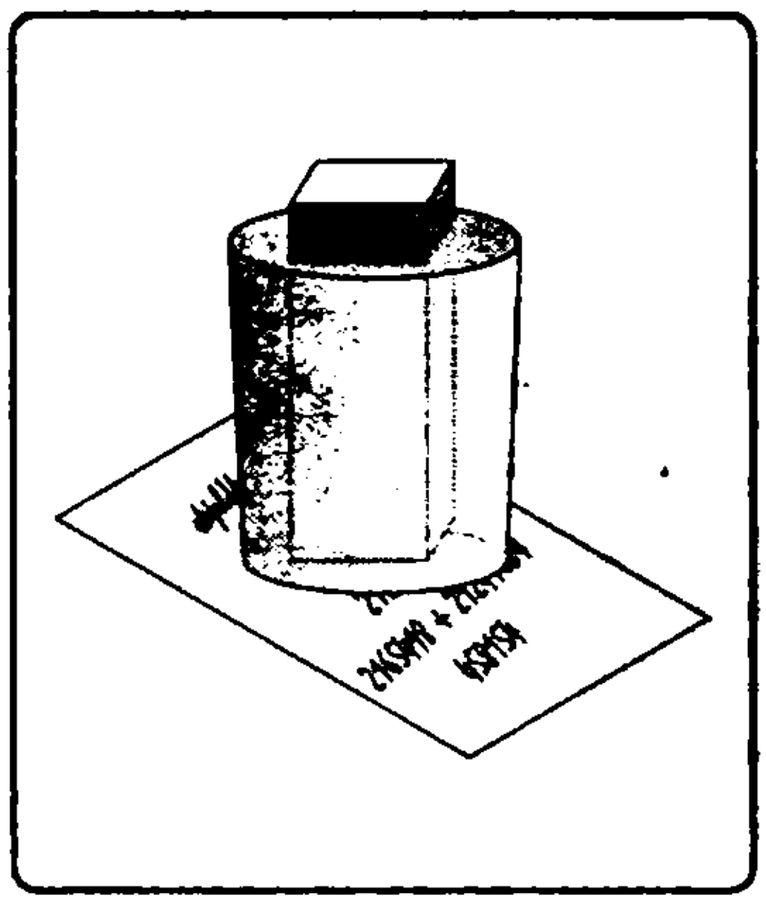
En una hora el primero se acerca al otro 50 km y éste otro, 30 km al primero; en 1 hora se acercan **50 + 30 = 80**

Divertijo 4

Hielo y agua

Este cubo de hielo está empezando a derretirse. El vaso está a punto de derramar el agua y aunque no lo creas, el hielo está flotando. Esto no es todo, el vaso está sobre mi manuscrito a tinta.

¿Se mojará mi manuscrito cuando todo el cubo de hielo se haya derretido?



km; para acercarse 160 km necesitan **160÷80 = 2** horas.

Rpta.: 2 h

METODO (2)

MOMENTO DE PARTIDA

MOMENTO DE ENCUENTRO
Luego de 3 horas

Consideremos que se encuentran en *t* horas. El primero, en *1 h* recorre *50 km*, en *t* horas habrá recorrido *50t* km y el otro *30t km*.

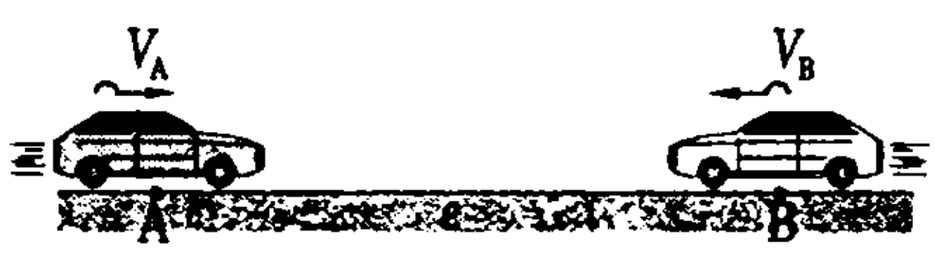
De la figura: $50t + 30t = 160$

$$80t = 160 \Rightarrow \boxed{t = 2\ h}$$

GENERALIZANDO

Dos móviles separados "*e*" kilómetros parten simultáneamente al encuentro con V_A y V_B kilómetros por hora. ¿Al cabo de cuántas horas de la partida se encuentran?

MOMENTO DE PARTIDA



MOMENTO DE ENCUENTRO
Luego de *t* horas

De la figura: $V_A t + V_B t = e \Rightarrow \boxed{t = \dfrac{e}{V_A + V_B}}$

b. METODO (1)

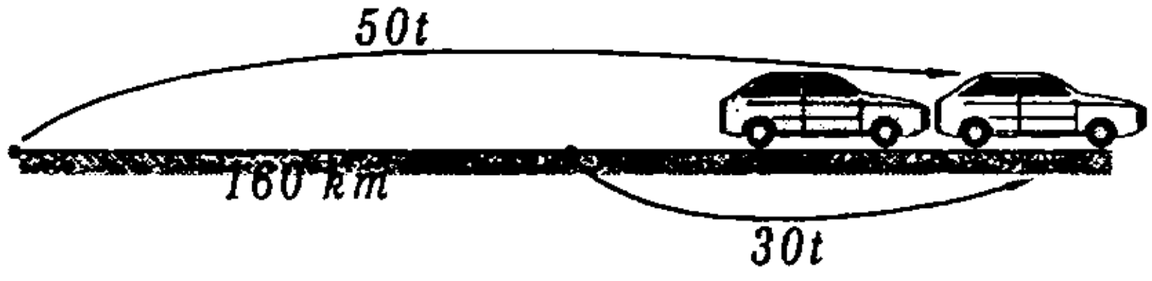
En una hora, el primero recorre *50 km* y el otro *30 km*, esto es, se le acerca *50 – 30 = 20 km* por hora. Para acercarse los *160 km*, necesita *160÷20 = 8 h*.

Rpta.: 8 h

Método (2)

MOMENTO DE PARTIDA

MOMENTO DE ALCANCE
Luego de t horas



De la figura: $50t - 30t = 160$

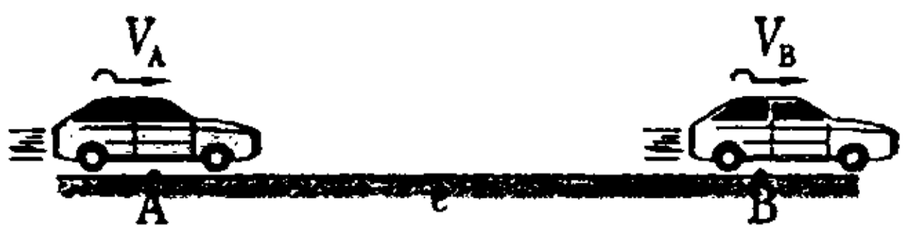
$20t = 160 \Rightarrow t = 8\ h$

Rpta.: 8 h

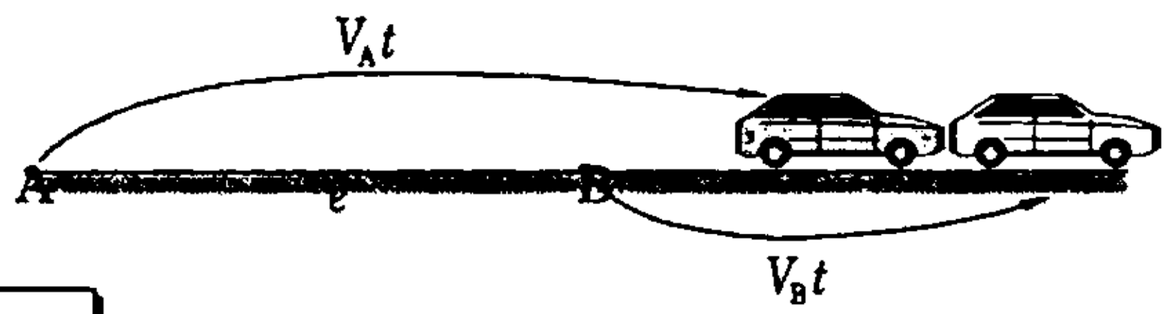
GENERALIZADO

Si dos móviles separados "e" kilómetros parten simultáneamente por la misma ruta y en el mismo sentido, persiguiendo el más veloz a V_A kilómetros por hora al otro que va a V_B kilómetros por hora, ¿al cabo de cuántas horas lo alcanza?

MOMENTO DE PARTIDA



MOMENTO DE ALCANCE
Luego de t horas



De la figura: $V_A t - V_B t = e \Rightarrow \boxed{t = \dfrac{e}{V_A - V_B}}$

Problemas

1. ***Un autobús recorre 148 kilómetros en 2 horas. ¿Cuál es la rapidez del autobús?***

   A) 74 km/h **B)** 68 km/h **C)** 75 km/h
   D) 70 km/h **E)** 90 km/h

2. ***Un auto recorre un tramo de carretera de 429 kilómetros en 5 horas. Si una primera parte lo recorrió a 80 kilómetros por hora y el tramo restante a 90 kilómetros por hora, ¿Cuántos kilómetros ha recorrido a 80 kilómetros por hora?***

   A) 186 km **B)** 180 km **C)** 168 km
   D) 160 km **E)** 165 km

3. ***Un automovilista estima que llegará a su destino en 3,5 horas si viaja a 80 kilómetros por hora. En el trayecto se le revienta la llanta y le demora media hora en repararla. Para recuperar el tiempo perdido arranca a 100 km/h y así llegar a la hora prevista a su destino. ¿A los cuántos kilómetros de recorrido se le reventó la llanta?***

   A) 75 km **B)** 80 km **C)** 84 km

D) 90 km **E)** 95 km

4. ***Dos ómnibus salen al encuentro al mismo tiempo, uno de A a 80 km/h y el otro de B a 75 km/h. Se encuentran luego de 6 horas de viaje. ¿Qué longitud tiene la carretera que une A con B?***

A) 930 km **B)** 960 km **C)** 980 km
D) 990 km **E)** 1000 km

5. ***Marcos le da a su hermano menor una ventaja de 51 metros en una pista de 408 metros. ¿Con qué rapidez debe correr Marcos para alcanzarlo en la meta, si el hermano corre a 7 m/s.***

A) 7,4 m/s **B)** 7,5 m/s **C)** 7,6 m/s
D) 7,8 m/s **E)** 8 m/s

6. ***Un policía persigue a un ladrón que le lleva 32 metros de ventaja. El ladrón corre a 8 metros por segundo y el policía a 10 metros por segundo. ¿A los cuántos segundos lo podrá alcanzar al ladrón?***

A) 32 s **B)** 24 s **C)** 20 s
D) 16 s **E)** 15 s

Teniendo en cuenta la longitud de los móviles

Problema 4

Un tren demora 3 minutos para pasar por delante de un observador y 8 minutos para atravesar completamente un túnel de 250 m de longitud. ¿Con qué rapidez corre el tren y cuál es su longitud?

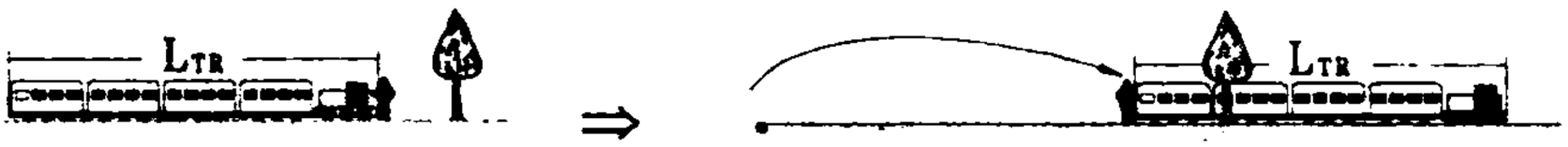
Resolución

La resolución de este problema, exige contestar previamente las siguientes preguntas: ¿Qué longitud debe recorre el tren para pasar por delante del observador y qué longitud, para atravesar el túnel? Veamos. Es suficiente que te fijes en un punto del tren. (Por ejemplo, el extremo posterior).

TEN PRESENTE

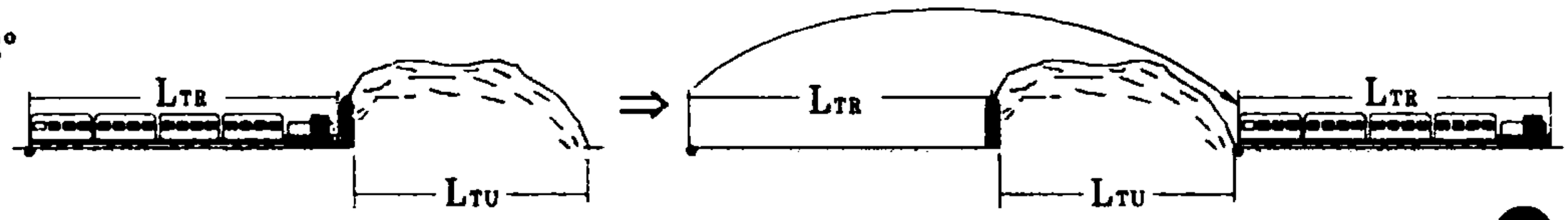
En los casos en los que no interviene la longitud del móvil, al momento de graficar se considera como si fuera como una partícula y lo representamos mediante un punto; en estos casos sólo nos interesa el espacio que recorre el móvil.

EMPIEZA A PASAR TERMINA DE PASAR

1° 

Espacio recorrido : L_{TR}

INICIA EL INGRESO TERMINA DE SALIR

2° 

Espacio recorrido : $L_{TR} + L_{TU}$

METODO (1)

Sea "v" la rapidez del tren:

$1°\quad L_{TR} = 3v \qquad \ldots (1)$

$2°\quad L_{TR} + L_{TU} = 8v \qquad \ldots (2)$

(1) y $L_{TU} = 250$ en (2): $3v + 250 = 8v$

$$\Rightarrow \boxed{v = 50\ m/min}$$

En (1) $L_{TR} = 3(50)$ $\Rightarrow \boxed{L_{TR} = 150\ m}$

METODO (2)

Puesto que para atravesar el túnel, recorre la longitud del túnel y la suya propia, y le toma 8 minutos: 3 de ellos para cubrir su propia longitud y los 5 min restantes para recorrer los 250 m del túnel. Entonces, corre a **250÷5 = 50** m por minuto. Ya que su longitud lo cubre en 3 minutos, debe tener **3×50 = 150** m de largo.

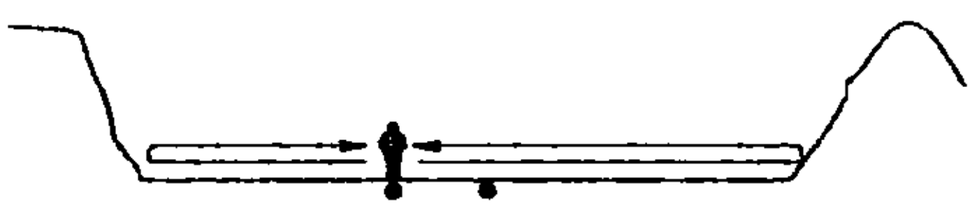
Rpta.: 50 m/min y 150 m

Problema 5

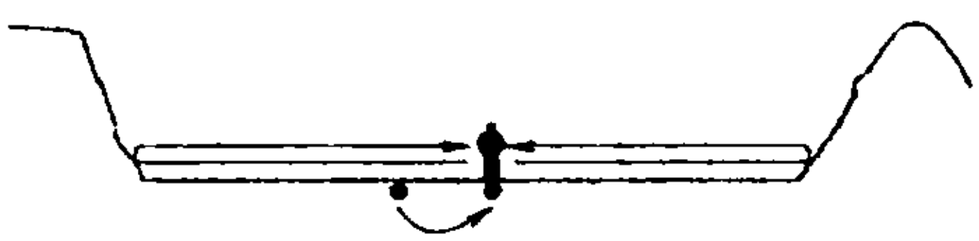
Un aficionado a la física utiliza un curiosos método para medir la distancia entre dos cerros. Se ubica en un punto entre ellos, emite un sonido y mide la diferencia de segundos que tardan en retornar los ecos; dato que le permite calcular la ubicación del punto equidistante de los cerros. Se encamina a él y emite otro sonido y mide el tiempo que demoran en retornar los dos ecos. Este último dato le permite calcular la distancia entre los cerros. Si los datos recogidos son 2 segundos y 4 segundos respectivamente. ¿Qué distancia debe caminar hasta el punto céntrico y cuánto distan los cerros? (Velocidad del sonido en el aire 330 m/s)

Resolución

PRIMER DATO



SEGUNDO DATO



C1 CONCLUSIÓN

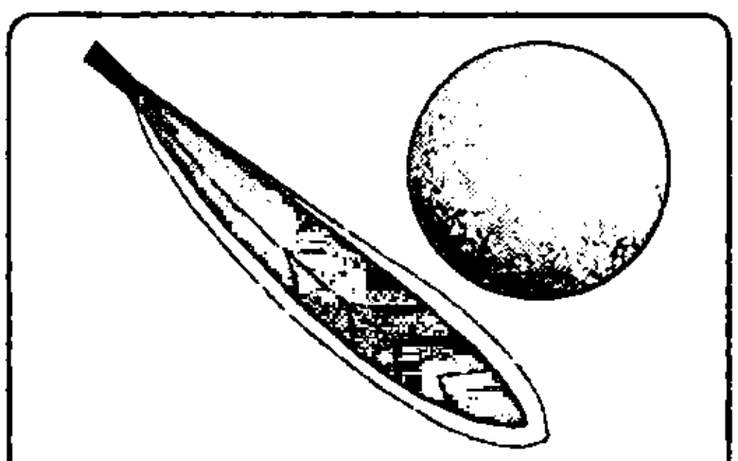
De las figuras de la página anterior se puede concluir que:

- *Para pasar por delante de un observador, el tren debe recorrer una distancia igual a su longitud.*
- *Para atravesar un túnel tiene que recorrer una distancia igual a su longitud más la del túnel.*

Divertijo 5

¿Qué llega primero?

Si dejamos libres, a una determinada altura, una bolita de plomo y una pluma, ¿cuál de ellos llega más rápido al piso?



1° Si un eco retorna *2 segundos* más tarde que el otro, quiere decir que ha tenido que recorrer **2×330 = 660 *m*** más que el otro, de los cuales *330* son de ida y *330* de vuelta. Por lo tanto, un cerro está a *330 m* más lejos que el otro, para ubicarse en el punto medio, basta recorrer *115 m*.

2° Estando en el centro, ambos ecos retornan al mismo tiempo. Puesto que demoran *4 s*, de los cuales *2 s* son de ida y *2 s* de vuelta; el sonido viaja *2 s* en ambos lados hasta chocar; esto es 330×2 = 660 a cada lado. Por lo tanto la distancia entre los cerros es **660×2 = 1320 *m***.

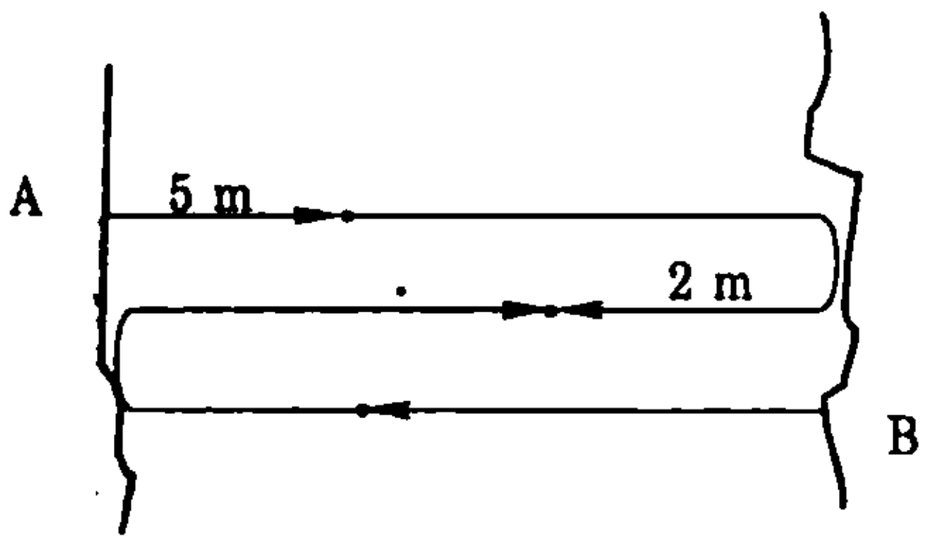
Rpta.: 115 m y 1320 m

Problema 6

Dos nadadores se lanzan simultáneamente al encuentro, de las orillas opuestas de un río. Se cruzan a 5 m de la orilla más cercana. Continúan nadando hasta la otra orilla y sin perder el tiempo vuelven, encontrándose esta vez a 2 m de la otra orilla. ¿Puedes calcular el ancho del río en este tramo?

Resolución

Hasta el primer encuentro, entre ambos cubren un ancho del río. Veamos el gráfico.



De la partida hasta el segundo encuentro cubrieron entre ambos 3 anchos del río.

Se concluye que de la partida hasta el segundo encuentro han recorrido cada uno el triple de lo que recorrieron hasta el primer encuentro. Entonces el nadador A recorrió *5×3 = 15 m* hasta el segundo encuentro. Por lo tanto el ancho del río es *15 – 2 = 13 m*.

Rpta.: 13 m

COMENTARIO

Transmisión del sonido

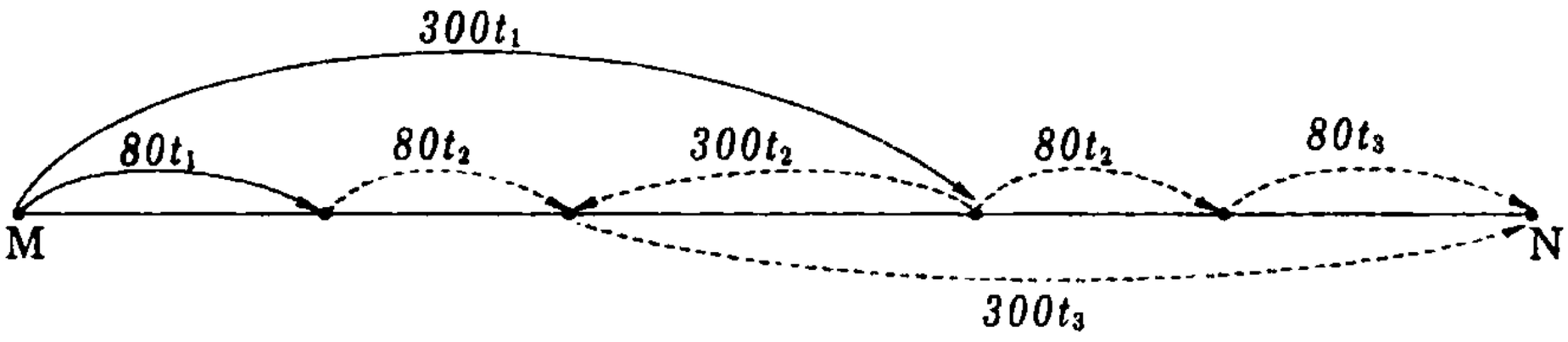
¿Alguna vez has visto la luz de un rayo y algunos segundos después escuchado el ruido? Tal vez has escuchado el ruido de un avión a chorro y cuando has levantado la cabeza sólo puedes observar la cinta de humo que ha dejado. Esto se debe a que tanto la luz como el sonido viajan por el aire a una cierta velocidad, no la misma obviamente. Nosotros vemos un árbol gracias a que la luz del sol llega hasta él y refleja parte de esta luz la cual llega a nuestros ojos. Sin embargo, la luz viaja tan rápido (300 000 km / s) que por más lejos que pase un avión la vemos casi instantáneamente. En cambio, el sonido viaja mucho más despacio (330 m / s) por tanto llega después de la luz. Por eso, cuando vemos a lo lejos un leñador cortando un árbol, el sonido no coincide con el golpe del hecha en el árbol; pero a medida que nos acercamos esta discrepancia desaparece.

Problema 7

Tres amigos A, B y C disponen de una bicicleta para ir de una ciudad M a otra N distantes 16,2 km. En la bicicleta sólo caben 2 de ellos. Para apurar el viaje, deciden avanzar A y B en bicicleta mientras camina C. Llegado a un punto regresa A por C, mientras B va caminando. De este modo los tres llegan al mismo tiempo. La bicicleta recorre en todo momento a 300 m/min y los peatones a 80 m/min. ¿A los cuántos metros de camino, A deja a B?

Resolución

Graficando los trayectos y expresando los espacios recorridos en función de la rapidez y el tiempo. Los trayectos recorridos en el mismo tiempo se señalan con el mismo tipo de línea.



De la figura: $300t_1 + 80t_2 + 80t_3 = 80t_1 + 80t_2 + 300t_3$

$$\boxed{t_1 = t_3}$$

También: $300t_1 = 80t_1 + 80t_2 + 300t_2$

$$220t_1 = 380t_2$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{15}{11}\begin{cases} t_1 = 19k = t_3 \\ t_2 = 11k \end{cases}$$

De la figura: $300t_1 + 80t_2 + 80t_3 = 16200$

$$300(19k) + 80(11k) + 80(19k) = 16200$$

$$8100k = 16200 \Rightarrow \boxed{k = 2}$$

$$300t_1 = 300(19k) = 300\times19\times2 = 11400\ m$$

Rpta.: 11,4 km

HUECOS NEGROS

La teoría de la relatividad de Albert Einstein ha revelado entre otras, que la luz tiene características de onda y partícula. Como partícula, es atraída por una masa debido a la ley de la gravedad.

Para ver un objeto necesitamos que la luz llegue hacia ella y regrese a nuestra vista, o en todo caso el objeto tenga luz propia. ¿Qué sucede si una gran masa "atrapa", por su alta gravedad, toda luz que pase cerca de ella y no deje "escapar" la luz que pudiera haber en ella? ¿La podríamos ver? Obviamente que no.

Cuerpos de semejantes masas, son los llamados HUECOS NEGROS. Estos son enormes acumulaciones de masas, cuya gravedad es millones de veces mayor que de la tierra, que va "atrapando" todo cuerpo que pase "cerca" de él.

Problemas

1. Un tren de 150 m de longitud demora 2 minutos en pasar por delante del observador. Si el observador estuviera caminando paralela a la vía férrea en el mismo sentido del tren y a 3,6 km/h, ¿En qué tiempo lo pasaría?

A) 5 min **B)** 6 min **C)** 8 min
D) 10 min **E)** 12 min

2. Dos trenes de 300 m de largo y 240 metros de largo que viajan a la misma velocidad se cruzan en 3 minutos, ¿A qué velocidad viajan estos trenes?

A) 180 m/min **B)** 150 m/min
C) 120 m/min **D)** 100 m/min
E) 90 m/min

3. Dos ciclistas parten de un punto A al mismo tiempo y en el mismo sentido. Uno va a 40 km/h y el otro a 36 km/h. Ambos se dirigen a B. El más veloz llega a B inmediatamente regresa y se encuentra con el otro en C. Si este otro tarda 20 minutos en llegar de C a B; ¿Qué distancia hay entre A y B?

A) 218 km **B)** 215 km **C)** 120 km
D) 228 km **E)** 122,5 km

4. Un ciclista recorre los dos tercios de un tramo de carretera en una hora y media. Si de allí duplica su velocidad, ¿en qué tiempo recorrerá el tramo faltante?

A) 45 min **B)** 40 min **C)** 25 min
D) 23 min **E)** 22,5 min

5. Una persona ubicada entre dos montañas emite un sonido y recibe el primer eco a los 3 s y el segundo a los 3,65 s ¿Cuáles es la separación entre las dos montañas? (Considere la velocidad del sonido en el aire igual a 340 m/s)

A) 1140,5 m **B)** 1220,5 m **C)** 1122,5 m
D) 1130,5 m **E)** 1112,5 m

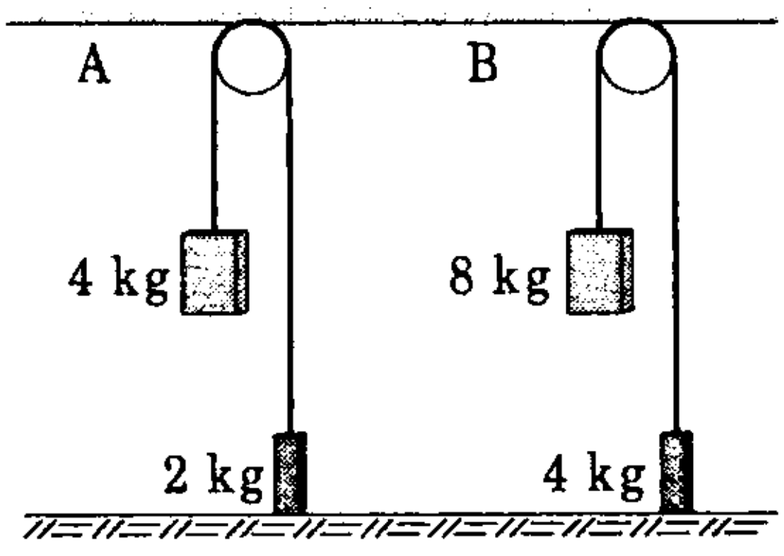
6. Tres ciclistas parten al mismo tiempo de tres puntos distintos A, B y C de la misma pista y en el mismo sentido de A hacia C. Las velocidades son: V_A = 600 m/min, V_B = 400 m/min y V_c = 420 m/min. Si al cabo de 24 minutos, el que partió de A se encuentra entre las otros dos y equidistante de ambos, ¿qué distancia hay entre A y C?

A) 5460 m **B)** 4640 m **C)** 4450 m
D) 4350 m **E)** 4200 m

11.2 Poleas y ruedas

Problema 8

Se muestra dos sistemas absolutamente iguales, excepto un detalle: Los pesos de B son el doble del correspondiente en A. Ahora, dejamos caer libremente de la misma altura y al mismo tiempo, los pesos más pesados. ¿Cuál llega primero, el de A o el de B? Para que no te rompas la cabeza, no consideres la fricción del aire.



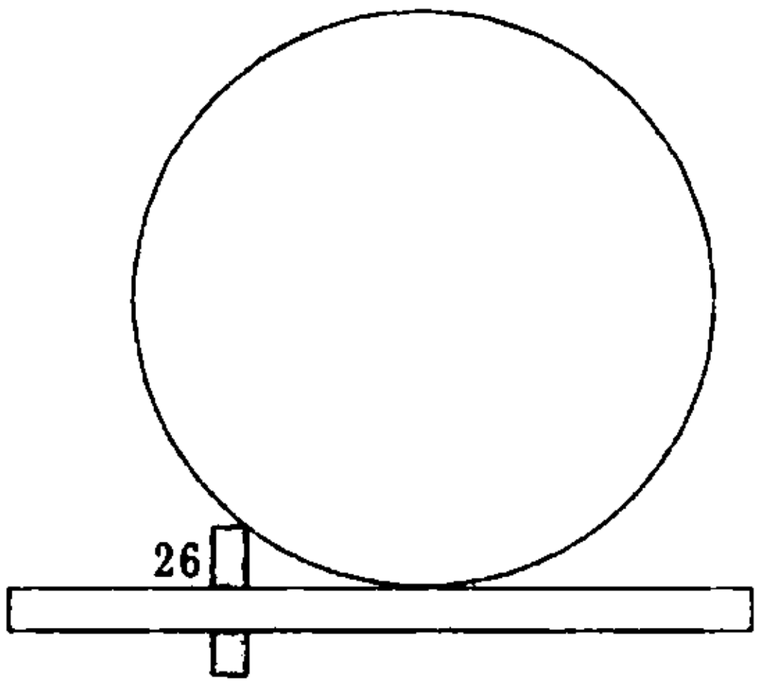
Resolución

Puesto que el tiempo de caída sólo depende de la gravedad y ésta es la misma para ambos, entonces llegan al piso los dos al mismo tiempo.

Rpta.: Los dos llegan iguales

Problema 9

Un cilindro circular de 1,30 m de diámetro descansa sobre un tablón apoyado en un taco movible verticalmente que sobresale 26 cm por encima del tablón, como se muestra en la figura. ¿Cuántos centímetros hay que elevar verticalmente el taco por encima del tablón para mover el cilindro 8 cm a la derecha?



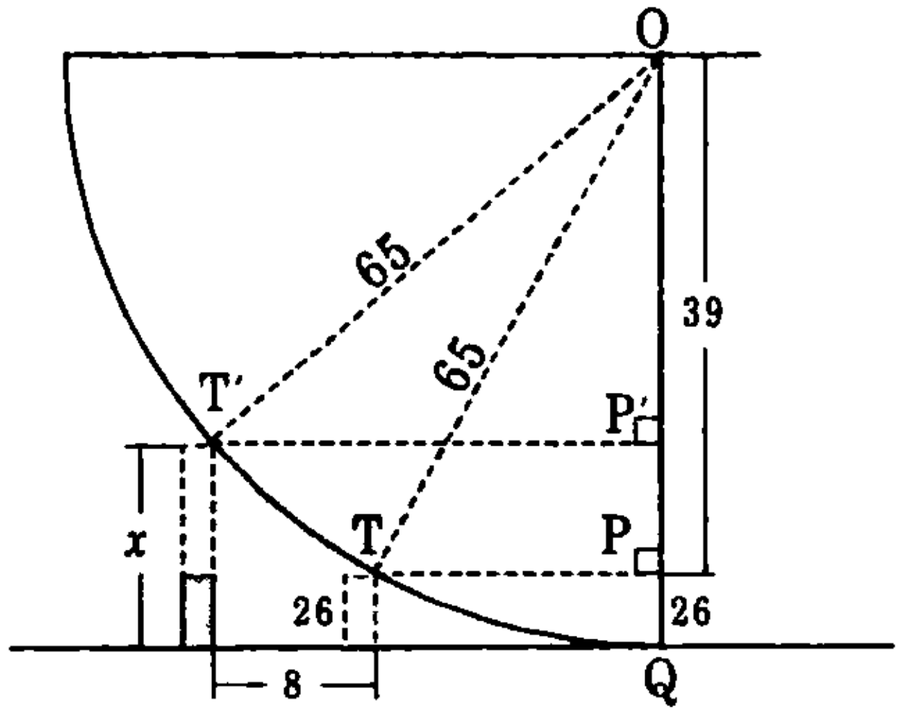
Resolución

- Diámetro del cilindro = 1,30 m ⇒ radio = 65 cm.
- $OP = 65 - 26 = 39$
- En el triángulo rectángulo OPT:

  $65^2 = 39^2 + PT^2 \Rightarrow \boxed{PT = 52}$
- $P'T' = PT + 8 \Rightarrow P'T' = 52 + 8 \Rightarrow \boxed{P'T' = 60}$
- En el triángulo rectángulo $OP'T'$:

  $65^2 = P'T'^2 + OP'^2 \Rightarrow 65^2 = 60^2 + OP'^2$

  $\Rightarrow \boxed{OP' = 25}$
- $x = OQ - OP' \Rightarrow x = 65 - 25 = 40$

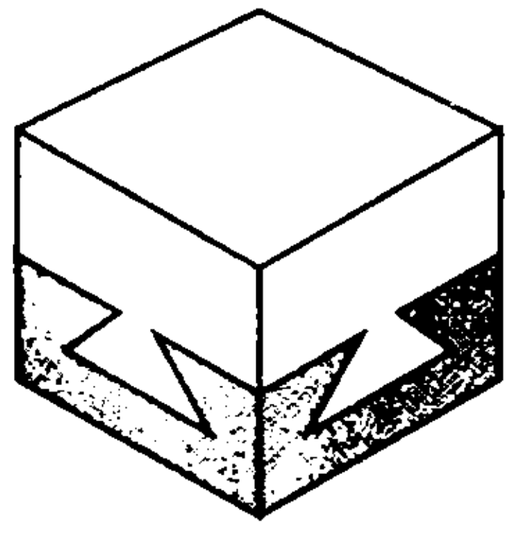


Rpta.: 40 cm

DIVERTIJO 6

Machihembrado increíble[1]

La figura muestra un cubo hecho de dos trozos de madera machihembrados. ¿Puedes decir cómo se las ingenió el carpintero para conseguir esta increíble "unión"?



(1) Tomado de Y. Perelman

Problema 10

Consideremos que tenemos dos cajas cúbicas de plástico de la misma capacidad. En la primera introducimos una esfera de fierro con diámetro igual a la arista interior de la caja, la otra la llenamos completamente al ras con pequeñas esferas de fierro, todas iguales. Enseguida echamos agua en ambos hasta llenarlas ¿En cuál de ellas entrará más agua?

Resolución

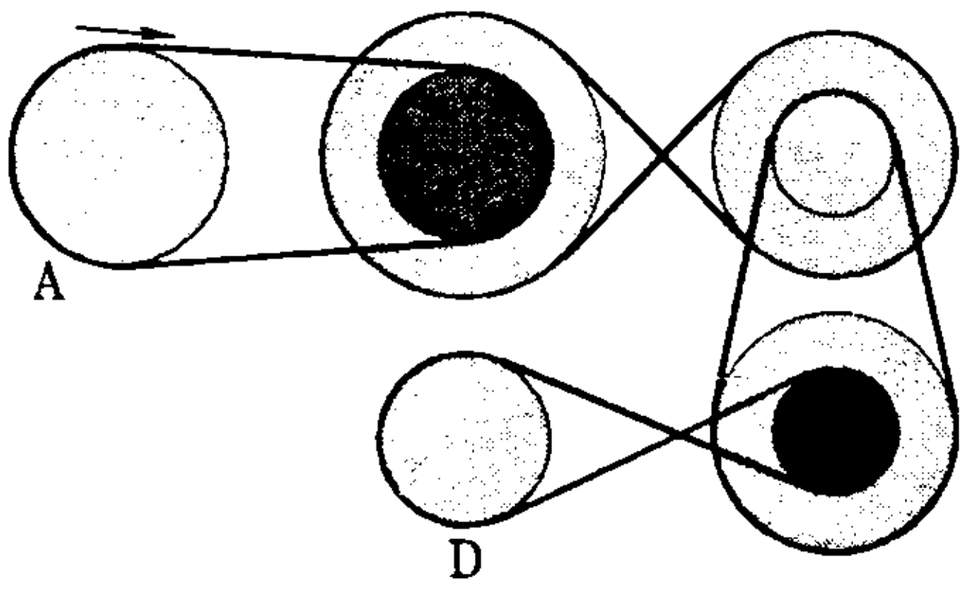
La esfera grande ocupa una fracción del cubo, igual a la que en un cubo pequeño ocupa una bola. Por lo tanto, el espacio dejado por la esfera grande, es igual a la suma de espacios dejados por las esferas pequeñas.

Luego, en ambos cubos entrará la misma cantidad de agua.

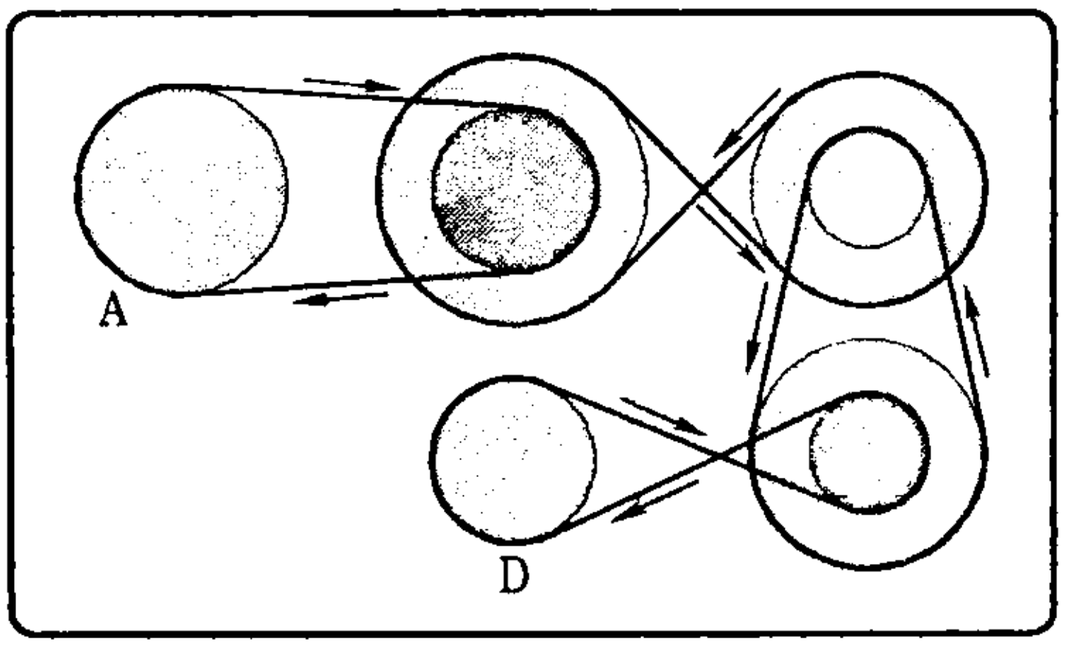
Rpta.: Igual en ambos

Problema 11

Estas poleas están acopladas mediante fajas, tal como indica la figura. Si la polea A, gira en el sentido de la flecha, en qué sentido gira la polea D?



Resolución

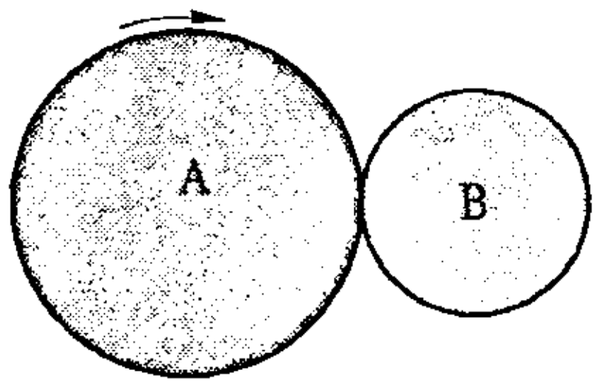


La polea D gira en sentido horario.

Problema 12

Dos engranajes, A de 36 dientes y B de 24 dientes están en contacto, tal como muestra la figura. Si A gira a 200 RPM. ¿A qué velocidad gira el engranaje B?

Resolución



Sea n_a el número de vueltas que da A. En cada vuelta que da A, por el punto de contacto pasan sus 36 dientes, en n_a vueltas pasan $36n_a$ dientes.

Sea n_b el número de vueltas que da B cuando A haya dado n_a vueltas. En cada vuelta, pasan 24 dientes de B por el punto de contacto. En n_b vueltas pasan $24n_b$ dientes. Como tanto de A como de B pasan el mismo número de dientes por el punto de contacto, se debe cumplir:

$$36n_A = 24n_B \qquad \ldots(1)$$

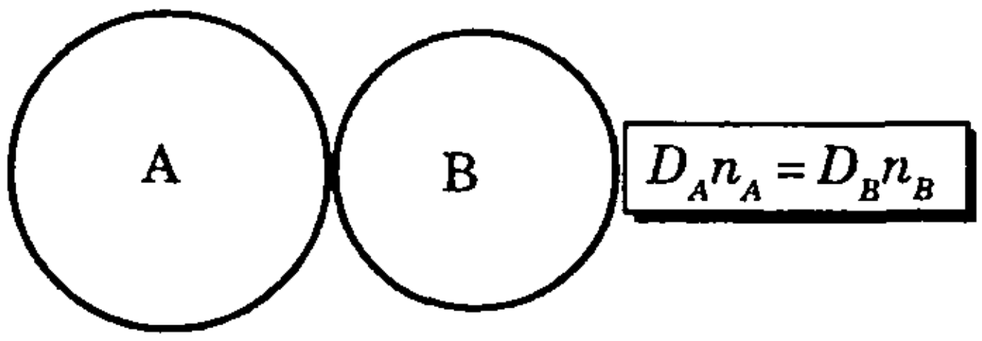
Como A gira 200 RPM (revoluciones o vueltas por minuto), entonces en (1):

$$36\times200 = 24n_B \quad \Rightarrow \quad n_B = 300$$

Quiere decir que B da 300 RPM.

Rpta.: 300 RPM

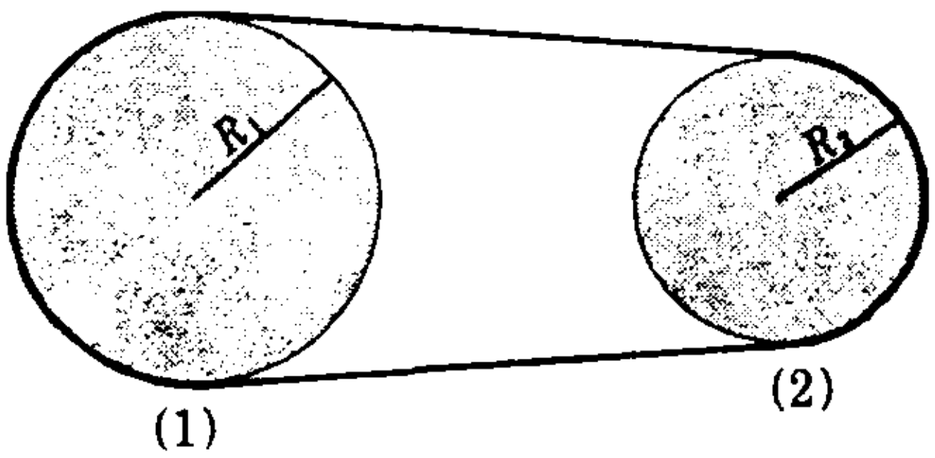
EN GENERAL



D_A *dientes* D_B *dientes*
n_A *vueltas* n_B *vueltas*

Problema 13

Dos poleas de radios R_1 y R_2, conectadas mediante una faja, dan V_1 y V_2 vueltas por minuto. Hallar la relación entre las radios y las velocidades de rotación.



Resolución

En cada vuelta la polea (1) hace correr a la faja una longitud de $2\pi R_1$, en V_1 vueltas, $2\pi R_1 V_1$.

En cada vuelta, la polea (2) hace correr a la faja una longitud de $2\pi R_2$, en V_2 vueltas, $2\pi R_2 V_2$.

Pero el recorrido de la faja es la misma para ambos, entonces:

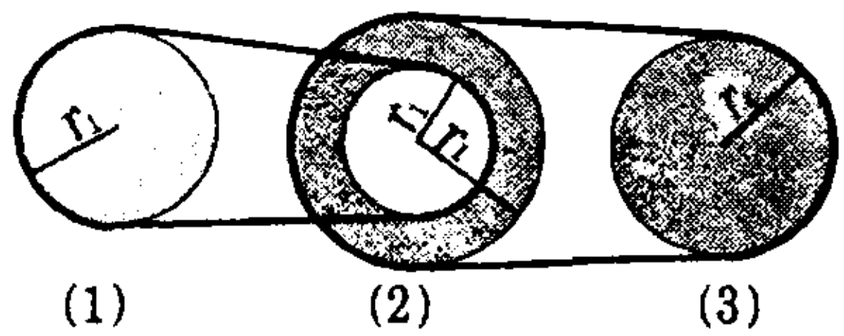
$$2\pi R_1 V_1 = 2\pi R_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad R_1 V_1 = R_2 V_2$$

Rpta.: $R_1 V_1 = R_2 V_2$

Problema 14

En la figura: $r_1 = 20$ cm, $r_2 = 5$ cm, $r_3 = 30$ cm y $r_4 = 25$ cm

Si la polea (1) gira a razón de 480 RPM; ¿A qué velocidad gira la polea 4?



Resolución

Poleas (1) y (2):

$20\times480 = 5V_2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 1920$ *RPM*

Se observa que $V_2 = V_3 = 1920$

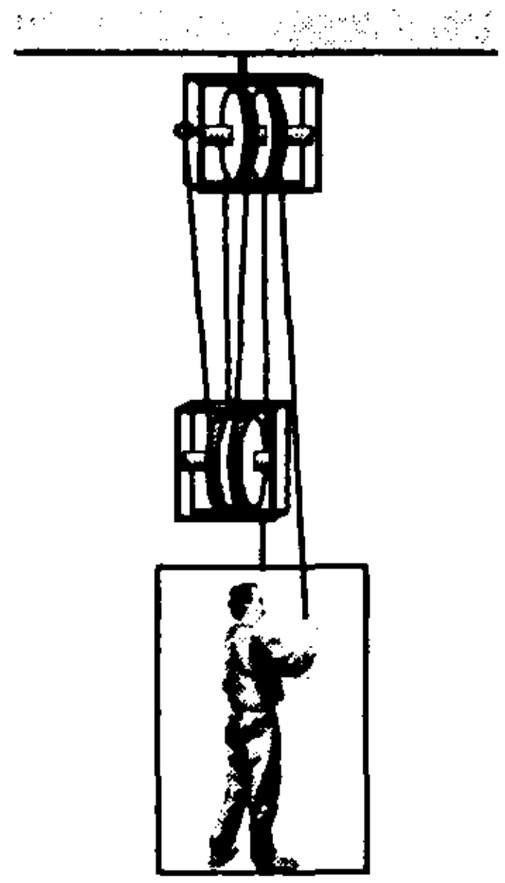
Poleas (3) y (4):

$30\times1920 = 25V_4 \quad \Rightarrow \quad V_4 = 2304$ *RPM*

Rpta.: 2304 RPM

Problema 15

El sistema de poleas, cuerdas y caja pesa 50 kg; el peso de la persona es 70 kg, ¿Con qué fuerza debe jalar la persona para subir con una velocidad constante? (El peso de la cuerda desprecia)



Resolución

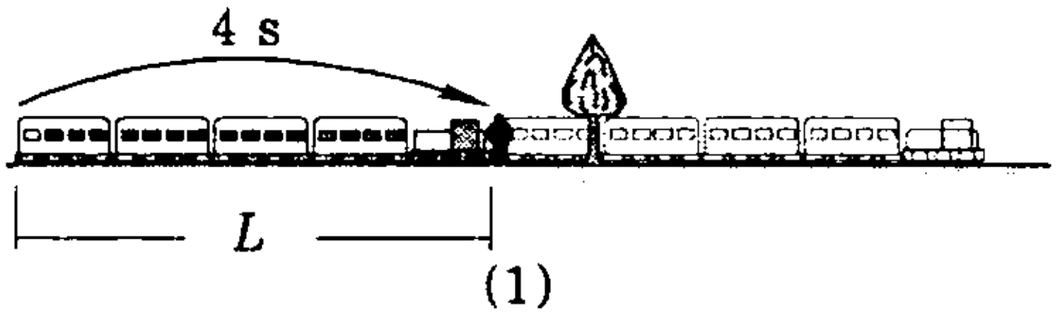
Para que ascienda con velocidad el piso de todo del sistema móvil (50 + 70) está sostenida por las 5 cuerdas, de modo que cada uno sostiene 120÷5 = 24 kg, es la fuerza con que el hombre debe jalar la cuerda.

Rpta.: 24 kg

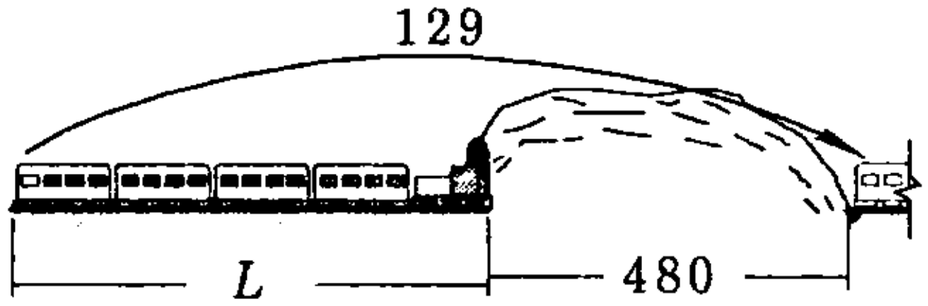
Problemas Resueltos

Problema 1

Un tren demora 4 segundos en pasar delante de un observador parado y 12 segundos en cruzar un túnel de 480 m de longitud. Hallar la longitud del mencionado tren.



(1)



(2)

Resolución

En el gráfico (1), la velocidad del tren es su propia longitud L divido entre 4 s:

$$V_t = \frac{L}{4} \qquad \ldots (1)$$

mientras que en el gráfico (2), la velocidad del tren es la suma de las longitudes del tren y del túnel dividida entre los 12 s:

$$V_t = \frac{L+480}{12} \qquad \ldots (2)$$

Igualando (1) y (2): $L = 240$ m

Rpta.: 240 m

Problema 2

Dos ómnibus que salen de sus paraderos a las 8 de la mañana y viajan con igual velocidad, se encuentran siempre a las 11 de la misma mañana en un punto de la ruta. Una mañana, uno de los ómnibus encuentra al otro 40 minutos después de pasar por el punto de encuentro, debido a que se había malogrado y reanudado la marcha con la mitad de su rapidez. ¿Qué hora llegará este ómnibus a su destino de donde partió el primero?

Resolución

De acuerdo a los datos del problema se encuentran a las 11:40, entonces el primero ha recorrido hasta este punto durante 11:40 – 8:00 = 3: 40; como el segundo va con la mitad de rapidez, para recorrer la misma distancia empleará 6 h 80 min que es igual a 7 h 20 min, de modo que llegará a las (11 h 40 min) + (7 h 20 min) = 18: 60, es decir llegará a las 19 h o 7 P. M.

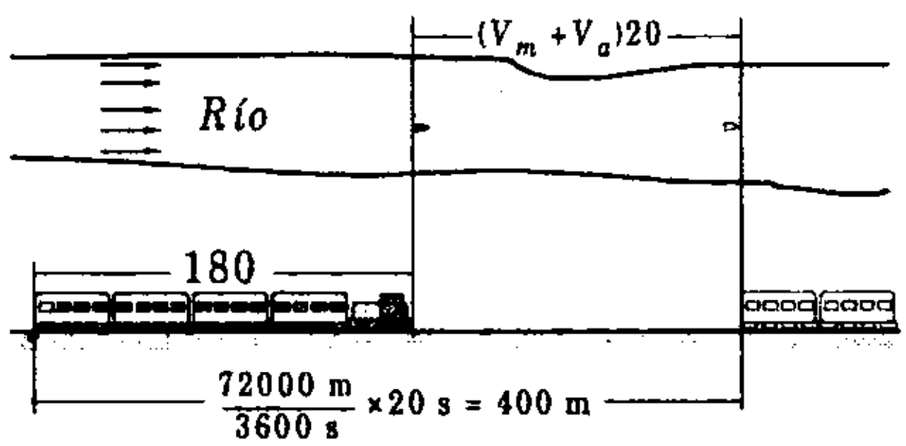
Rpta.: 7 P. M.

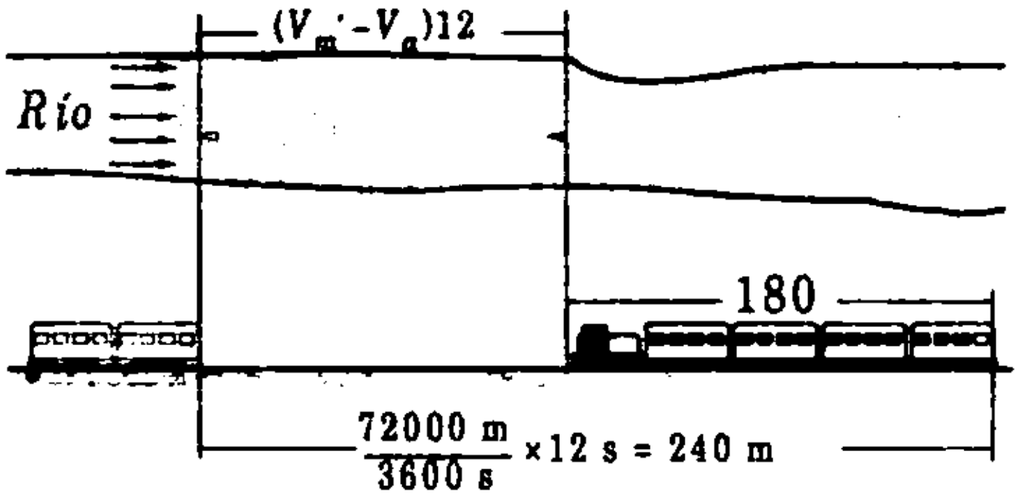
Problema 3

Un tren de 180 m de longitud y que viaja a 72 km/h demora 20 segundos en rebasar un bote que viaja río abajo; al día siguiente el mismo tren de regreso demora 5 s en rebasar el mismo bote que viaja río arriba.
¿Qué velocidad produce el motor del bote?

Resolución

Vamos a graficar poniendo las distancias como el producto de la velocidad por el respectivo tiempo empleado. Por otro lado, cabe señalar que cuando el bote viaja río abajo, la velocidad que produce su motor (V_m) con la velocidad de las aguas del río (V_a) se suman, en tanto que si va río arriba, la velocidad dada por el motor es contrarrestada por la velocidad de las aguas del río:





Del primer gráfico que corresponde al primer día:

$$(V_m + V_a)20 = 400 - 180$$
$$(V_m + V_a) = 11 \qquad \ldots (1)$$

Del segundo gráfico:

$$(V_m - V_a)12 = 240 - 180$$
$$(V_m - V_a) = 5 \qquad \ldots (2)$$

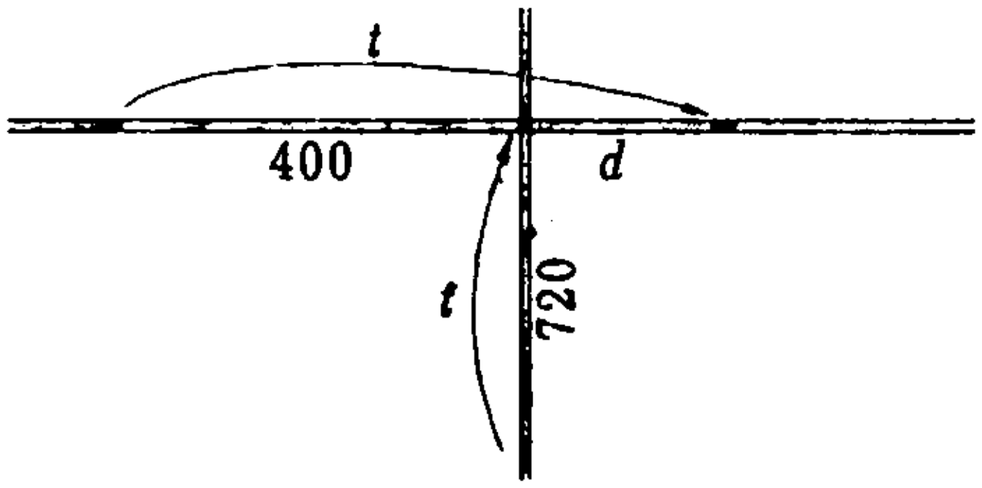
Restando (1) – (2):

$$2V_m = 6 \quad \Rightarrow \quad V_m = 3\ m/s$$

Rpta.: 3 m/s

Problema 4

Cuando un auto que viaja de Oeste a Este a 72 km/h, está a 400 m antes del cruce con otra carretera, otro auto se dirige al mismo punto por la otra carretera a 108 y km/h y se encuentra a 720 m del cruce. ¿A qué distancia del cruce se encontrará el primer auto cuando el segundo haya llegado a dicho punto?



Resolución

Pasando las velocidades a m/s

$$\bullet\ 72\frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \times \frac{1h}{3600\,s} \times \frac{1000\,m}{1\,\cancel{km}} = 20\frac{m}{s}$$

$$\bullet\ 108\frac{km}{h} \times \frac{1h}{3600\,s} \times \frac{1000\,m}{1\,km} = 30\frac{m}{s}$$

El segundo auto recorre 30 m en cada segundo, los 720 m que le faltan para el cruce lo hace en 720÷30 = 24 s.

En este tiempo, el primero recorre 20×24 = 480 m, que son los 400 m hasta el cruce y 80 m pasando el cruce.

Rpta.: 80 m

Problema 5

Dos autos de carrera se encuentran al inicio de un circuito. Si uno puede dar una vuelta en 12 minutos en tanto que el otro en 15 minutos, ¿cada cuánto tiempo alcanzará el más rápido al más lento?

Resolución:

Para que el más veloz alcance al más lento, tiene que llevarle una ventaja de un vuelta, lo que equivale una ventaja de 15 min al más lento.

Cuando el más veloz da una vuelta en 12 min el otro está 3 min atrasado, entonces para que el retraso sea de 15 min, el primero tiene que dar 5 vueltas, lo cual le demanda 12×5 = 60

Rpta.: 60 min

Problema 6

Un padre recoge en auto a su hija siempre a las 6 de la tarde a la salida de la academia. Un día, ella sale más temprano y se encuentra con su padre en el camino, tanto así que de regreso llegan a la casa 12 minutos antes de lo previsto. ¿A qué hora se encontraron?

Resolución:

Si regresan 12 minutos antes es porque el padre ahorró 12 minutos al no llegar a la

academia, esto es: 6 minutos del punto de encuentro a la academia y otros 6 minutos de la academia al punto de encuentro; esto significa que se encontraron cuando al padre le faltaba 6 minutos para llegar a la academia, es decir, a la 5: 54

Rpta.: 5: 54

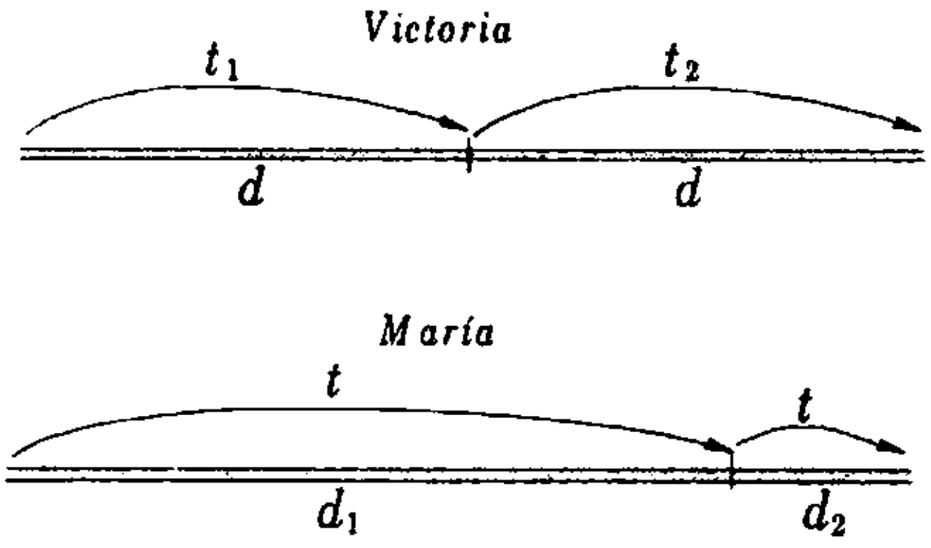
Problema 7

Victoria y María hacen footing durante la mañana desde su casa hasta el parque, partiendo juntas. Victoria va trotando la mitad del recorrido y la otra mitad va caminando; en cambio María, la mitad del tiempo que emplea lo hace trotando, en tanto que la otra mitad del tiempo lo hace caminando. Se sabe que entre ellas, la rapidez que emplean tanto trotando como caminando son iguales. ¿Cuál de ellas llega antes?

Resolución:

Es sabido que la velocidad trotando es mayor que la velocidad caminando.

Llega más rápido la que va trotando mayor espacio, quien hace esto es María



Rpta.: María

Problema 8

Desde un bote que viaja río arriba a razón de 50 km/h se cae al agua una bolsa herméticamente cerrada. Los dueños que se dan cuenta un tiempo después, dan la vuelta río abajo a razón de 70 km/h y alcanzan la bolsa al cabo de 20 minutos. ¿Qué tiempo estuvo la bolsa flotando en el agua?

Resolución:

Grafiquemos los espacios recorridos y expresemos como el producto de la velocidad por el tiempo empleado.

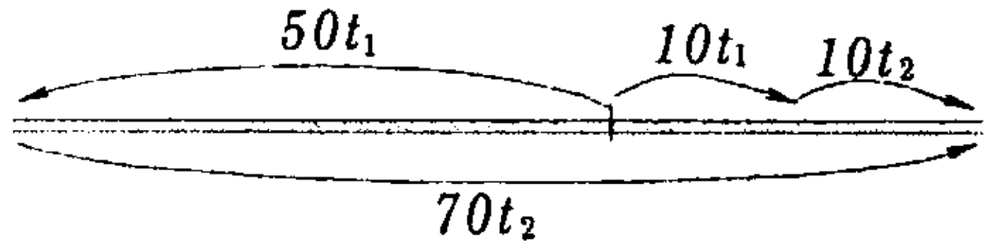
Calculemos la rapidez de las aguas del río, sea V_m la velocidad que proporciona el motor y V_a la velocidad de las aguas del río.

Río abajo: $V_m + V_a = 70$ ... (1)

Río arriba: $V_m - V_a = 50$ ... (2)

De (1) y (2): $\boxed{V_m = 60}$ y $\boxed{V_a = 10}$

Sea t_1 el tiempo que transcurre desde que la bolsa se cae hasta que los dueños se dan cuenta y t_2 el tiempo en que alcanzan a la bolsa río abajo



Del gráfico:

$70t_2 = 50t_1 + 10t_1 + 10t_2 \Rightarrow t_2 = t_1 = 20\ min$

La bolsa estuvo flotando: $t_2 + t_1 = 40\ min$

Rpta.: 40 min

Problema 9

Un hombre que puede nadar 0,8 km/h decide cruzar un río de 60 metros de ancho y cuyas aguas avanzan a 3 km/h. Al frente divisa una única playa y demasiada angosta donde arribar. ¿A cuántos metros más arriba debe empezar a cruzar para que al llegar a la otra orilla dé exactamente en la playa?

Resolución:

El tiempo que demore en cruza será arrastrado por el río.

Se t el tiempo que demora en cruzar:

$$60\ m = \frac{800\ m}{3600\ s} \times t \quad \Rightarrow \quad t = 270\ s$$

En 270 s, el río arrastra una distancia d:

$$d = \frac{3000\ m}{3600\ s} \times 270\ s \quad \Rightarrow \quad d = 225\ m$$

Rpta.: 225 m

Problema 10

Se sabe que el relámpago se ve prácticamente en el momento en que ocurre y el trueno se escucha unos segundos más tarde. Manuel, escucha el trueno 4 segundos después de ver el relámpago. ¿A qué distancia ocurrió el fenómeno?. Considerar la velocidad del sonido en el aire 330 m/s.

Resolución:

La distancia es la que viaja el sonido desde que se ve el relámpago hasta que se escucha el trueno y será el producto de su velocidad por el tiempo empleado:

$$d = \frac{330\ m}{s} \times 4\ s \quad \Rightarrow \quad d = 1320\ m$$

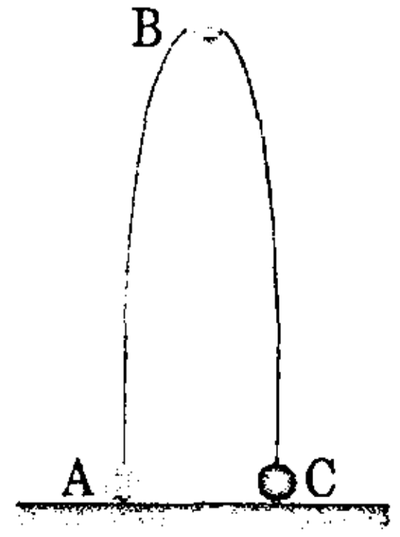
Rpta.: 1320 m

Problema 11

Una pelota es arrojada hacia arriba y demora 6 segundos en regresar. Si se sabe que por efecto de la fuerza de gravedad, cuando sube, su velocidad disminuye 10 m/s en cada segundo, en tanto que mientras baja, la velocidad aumenta también en 10 m/s en cada segundo, ¿con qué velocidad llega la pelota?

Resolución

Cuando sube, su velocidad disminuye progresivamente hasta hacerse cero (en el punto B). A partir de allí inicia el descenso y su velocidad aumenta progresivamente.



Un segundo es 10 m/s; (hacia arriba) de manera análoga un segundo después de B su velocidad es 10 m/s (hacia abajo).

Con esto podemos darnos cuenta de que el tiempo que utiliza en subir es igual a lo que utiliza en bajar, entonces, en subir demora $6 \div 2 = 3$ s y en bajar los otros 3 s. En B su velocidad es cero, de allí hasta llegar a C su velocidad aumenta en $3 \times 10 = 30$ m/s.

Rpta.: 30 m/s

Problemas Propuestos

1. ***Dos móviles parten de un mismo punto siguiendo trayectorias rectilíneas y perpendiculares entre sí con velocidades de 6 m/s y 8 m/s. ¿Después de cuánto tiempo estarán distantes 640 m?.***

A) 64 s **B)** 32 s **C)** 48 s
D) 45 s **E)** 46 s

2. ***Al emitir un sonido escucho el eco luego de algunos segundos. Si me acerco 170 m al muro, cuántos segundos antes escucharé el eco (considerar velocidad del sonido 340 m/s).***

A) 1 s **B)** 2 s **C)** 0,5 s
D) 0,2 s **E)** 3 s

3. ***Desde un portaviones que avanza hacia el Sur a 50 km/h despegan dos aviones de reconocimiento, uno al Sur y el otro al Norte, ambos a 900 km/h respecto a tierra. Luego de una hora ambos aviones vuelven al mismo tiempo al portaviones. ¿Cuántos km se han alejado cada avión respecto al punto de partida.***

A) 450 km al Sur y 450 al Norte
B) 450 km al Sur y 425 al Norte
C) 475 km al Sur y 425 al Norte
D) 475 km al Sur y 450 al Norte
E) 450 km al Sur y 475 al Norte

4. ***Una persona que está esperando el ómnibus al borde de una pista recta, escucha el claxon de un auto y 31 segundos más tarde éste pasa por delante de la persona a 30 m/s. ¿Cuántos metros antes de pasar tocó el claxon el auto? (V_{sonido} = 340 m/s)***

A) 100 m **B)** 1010 m **C)** 1020 m
D) 930 m **E)** 960 m

5. ***Una persona parada al borde de una pista ve acercarse una caravana de automóviles a 30 metros por segundo. Los automóviles viajan igualmente separados uno del otro. Si la persona contó 6 automóviles en 20 segundos contados del primero al sexto, ¿qué distancia separa entre si a los automóviles?***

A) 120 m **B)** 150 m **C)** 160 m
D) 200 m **E)** 240 m

6. ***Dos nadadores se lanzan simultáneamente de las orillas opuestas de un río y se cruzan a 12 m de la orilla más próxima. Tras llegar a sus destinos, regresan inmediatamente cruzándose esta vez a 6 m de la otra orilla. En cada momento ellos nadan con rapidez constante. ¿Será posible con estos datos calcular el ancho del río?***

A) 18 m **B)** 20 m **C)** 24 m
D) 30 m **E)** F. D.

7. ***Un ciclista va por una carretera con velocidad constante y observa que el poste kilométrico indica $\overline{ab}$ km. Luego de una hora de recorrido, nota que el poste kilométrico indica $\overline{ba}$ km y una hora más tarde se encuentra en el kilómetro $\overline{a0b}$. ¿Cuál es la velocidad del ciclista en km/h?***

A) 32 **B)** 30 **C)** 40
D) 45 **E)** 50

8. ***El ciclista A está ubicado exactamente a 640 m al Norte del ciclista B. El ciclista A corre hacia el Sur a 4 m/s, mientras que B corre hacia el Este a 5 .n/s. ¿A los cuántos minutos, contados a partir del momento descrito, estarán separados 500 m?***

A) 20 s **B)** 30 s **C)** 35 s
D) 40 s **E)** 1 min

9. ***Una línea férrea cruza perpendicularmente una autopista mediante un puente. Apenas el tren, que viaja a 30 km/h, acababa de cruzar, pasa por el puente un automóvil a 72 km/h. ¿Luego de cuántas horas estarán separados 195 km?***

A) 1 h **B)** 2 h **C)** 2,5 h
D) 3 h **E)** 3,5 h

10. ***Un tren de pasajeros ahorraría, en un trayecto de 180 km, 40 minutos de tiempo si aumentase su velocidad en 9 km/h. ¿Cuántas horas recorre el trayecto?***

A) 4 h **B)** 5 h **C)** 6 h
D) 7 h **E)** 8 h

11. Un tren que viaja a 60 km/h tarda un minuto atravesar un túnel de 800 m de longitud. ¿Cuál es la longitud de dicho tren?

A) 200 m **B)** 400 m **C)** 600 m
D) 800 m **E)** 1000 m

12. A puede caminar cierta distancia en 20 minutos y B puede caminar la misma distancia en 30 minutos. Si A parte 5 minutos después que B, ¿cuánto tiempo camina éste hasta que lo alcance A?

A) 10 min **B)** 15 min **C)** 8 min
D) 12 min **E)** 5 min

13. Un observador ve relampaguear un rayo sobre la cima de un monte, al cabo de n segundos escucha el trueno producido por dicho rayo. Calcular a qué distancia de la persona ha caído el rayo, si:

c: velocidad de la luz (m/s)

v: velocidad del sonido (m/s)

A) $\frac{cv}{n(c-v)}$ **B)** $\frac{ncv}{c-v}$ **C)** $\frac{n}{c-v}$

D) $\frac{n(c-v)}{cv}$ **E)** $\frac{n(c+v)}{c-v}$

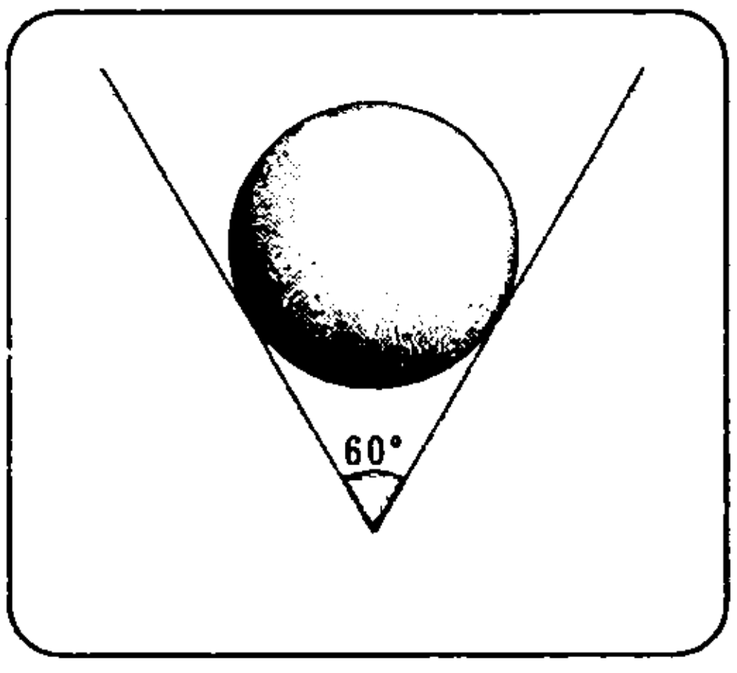
14. Un remero navega hacia un lugar que dista 48 millas del punto de partida y regresa en 14 horas. Observa que puede remar 4 millas siguiendo la corriente del río en el mismo tiempo que 3 millas en contra de la corriente. Hallar la velocidad de la corriente.

A) 2 mill/h **B)** 1 mill/h **C)** 1,2 mill/h
D) 1,5 mill/h **E)** 1,6 mill/h

15. Se tiene un circuito cerrado de 1092 m. Dos corredores parten de un mismo punto en sentidos contrarios observándose que se cruzan cada 21 segundos, pero si van en el mismo sentido se observa que uno alcanza al otro cada 4 minutos 33 segundos. Hallar la mayor velocidad.

A) 24 m/s **B)** 20 m/s **C)** 28 m/s
D) 32 m/s **E)** 31 m/s

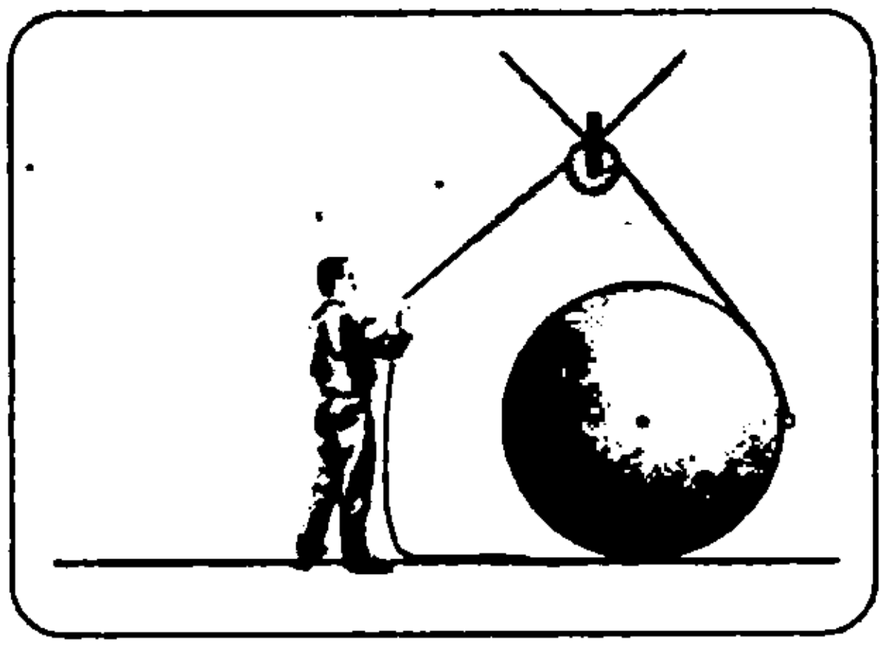
16. La figura muestra una esfera de radio R que descansa sobre dos plataformas en forma de V con 60° de abertura. Si las plataformas se abren hasta formar 120°, ¿qué distancia baja la esfera de su posición original?



A) $\frac{2R}{3}$ **B)** $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\frac{2R(3+\sqrt{3})}{3}$

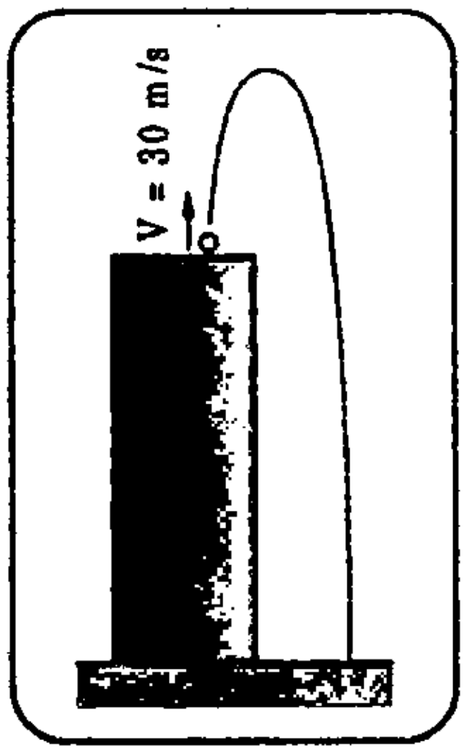
D) $\frac{R(6-\sqrt{3})}{3}$ **E)** $\frac{2R(\sqrt{3}-1)}{3}$

17. Esta persona quiere mover la esfera de 84 cm de radio a 21π cm a la izquierda del punto donde está ubicado. Para ello utiliza una cuerda que pasa por una polea y uno de sus extremos sujeta a la esfera de una armella ubicada a la misma altura del centro de la esfera. ¿Qué altura se habrá elevado la armella cuando la esfera se haya movido la distancia requerida?



A) 42 cm **B)** 42π cm **C)** 42 $\sqrt{2}$ cm
D) 84 cm **E)** 21π cm

18. Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba con 30 m/s desde una plataforma elevada. Si se sabe que mientras sube su velocidad disminuye 10 m/s en cada segundo y mientras cae aumenta en la misma medida. ¿Con qué velocidad llegará al piso, si en todo demora 10 segundos?



A) 50 m/s **B)** 60 m/s **C)** 70 m/s
D) 80 m/s **E)** 100 m/s

19. Raquel se encuentra entre dos montañas A y B. Al sonar el claxon de su carro el eco en B lo escucha 4 segundos después que el de A. ¿Cuántos metros debe acercarse hacia B para estar en el centro de ambas montañas. (Vsonido = 340 m/s)

A) 340 m **B)** 170 m **C)** 165 m
D) 330 m **E)** 650 m

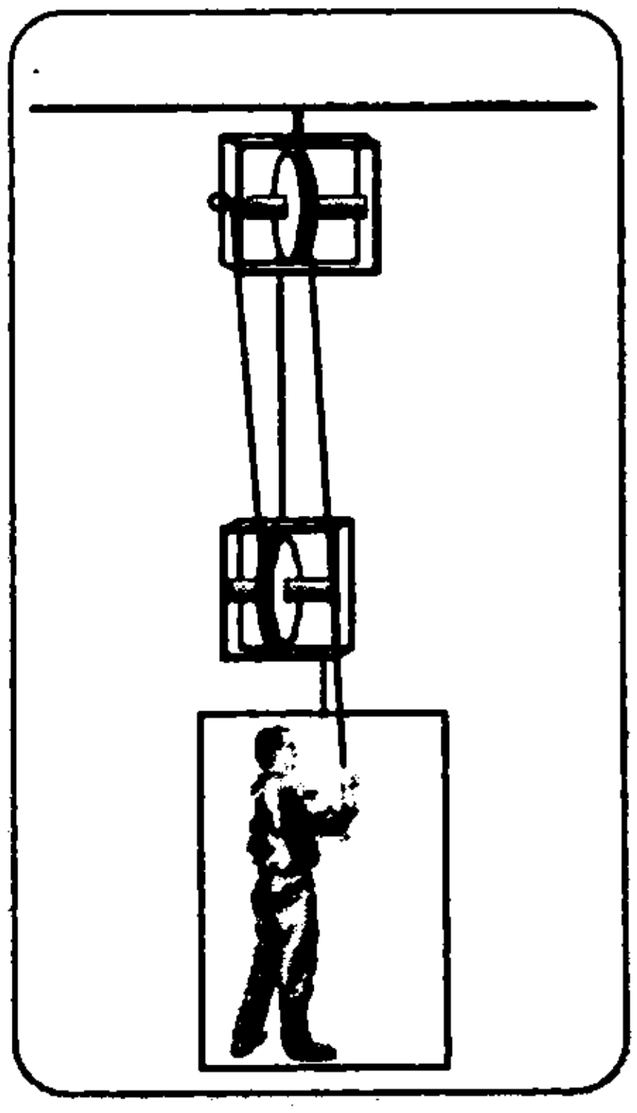
20. Dos ómnibus que marchan por la misma carretera en sentidos opuestos y con la misma rapidez se encuentran siempre a la misma hora. Un día uno de ellos se malogró y una vez reanudado la marcha con la misma rapidez habitual, se encuentra con el otro 50 minutos después de la hora habitual. ¿Qué tiempo estuvo malogrado?

A) 50 min **B)** 100 min **C)** 60 min
D) 25 min **E)** 30 min

21. Dos corredores parten de un mismo punto de una pista circular en sentidos opuestos. Si uno puede dar la vuelta en 12 minutos y el otro en 15 minutos, ¿cada qué tiempo se encontrarán?

A) 6 min 50 s **B)** 6 min 20 s
C) 4 min 40 s **D)** 6 min 40 s
E) 4 min 20 s

22. En un movimiento de caída libre la longitud de cualquier tramo recorrido es igual al producto del tiempo empleado en dicho tramo por la semisuma de las velocidades en los extremos del tramo. Hallar el espacio que recorre en el último segundo, un objeto que demora 6 segundos en caer libremente, partiendo del reposo. Tener en cuenta que la velocidad se incrementa en 10 m/s en cada segundo.



A) 45 m **B)** 60 m **C)** 65 m
D) 55 m **E)** 50 m

23. *La figura muestra un sistema de poleas para que el hombre de la caja ascienda. Si las poleas, cables y caja pesan 30 kg, en tanto que el peso de la persona es 60 kg. Cuál es la fuerza con que debe jalar para ascender con velocidad constante*

A) 30 kg B) 35 kg C) 25 kg
D) 80 kg E) 45 kg

24. *Un tren demora 24 segundos en pasar delante de un semáforo. ¿Qué tiempo demorará en cruzarse con otro tren de la misma longitud y que marcha con la misma velocidad?*

A) 48 s B) 12 s C) 16 s
D) 24 s E) 18 s

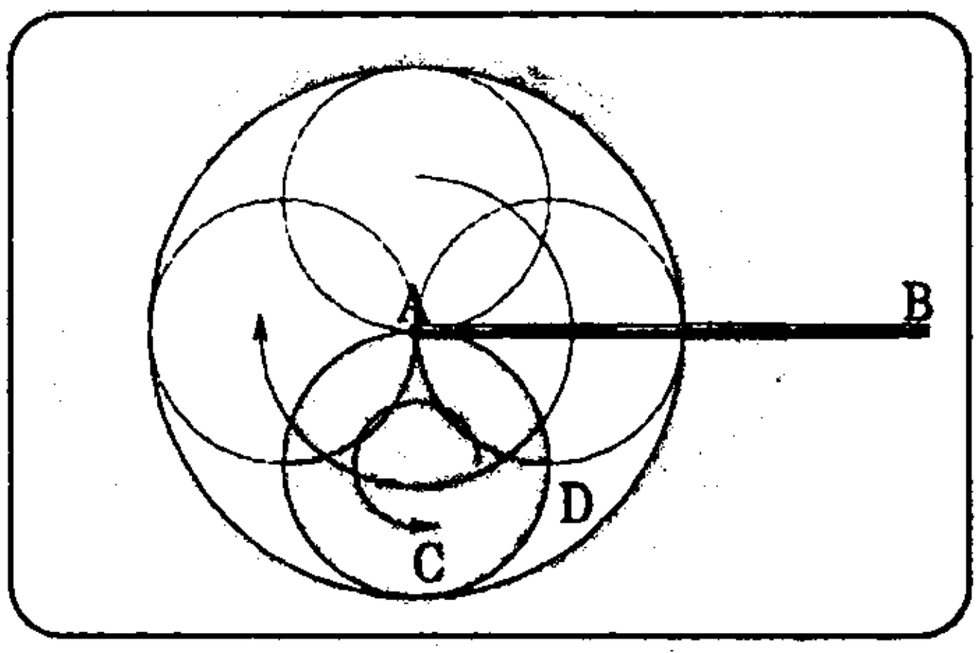
25. *Un bote de motor demora 1 hora en alcanzar una balsa de madera sin motor que salió 4 horas antes que el bote. Desde que lo alcanza, el bote demora 2 h en llegar a su destino. ¿Qué tiempo demorará la balsa en llegar al mismo destino?*

A) 10 h B) 12 h C) 5 h
D) 20 h E) 6 h

26. *Un helicóptero que vuela a 300 km/h despega de un aeropuerto llevando combustible para 6 horas. ¿Cuál es la máxima distancia que se puede alejar dicho helicóptero de modo que el combustible le sirva exacto para el viaje de ida y vuelta.*

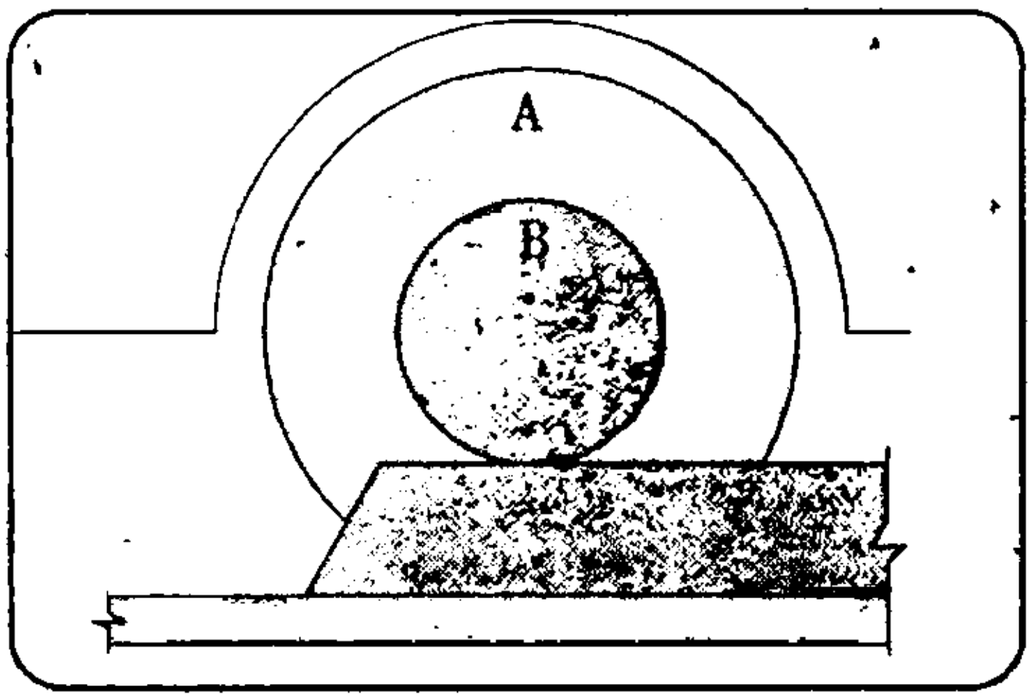
A) 1200 km B) 1000 km C) 900 km
D) 840 km E) 630 km

27. *La barra AB se encuentra unida mediante un pasador giratorio al disco dentado C que gira tal como muestra el gráfico, siempre tangente al agujero dentado. ¿Qué ocurre con la barra AB?*



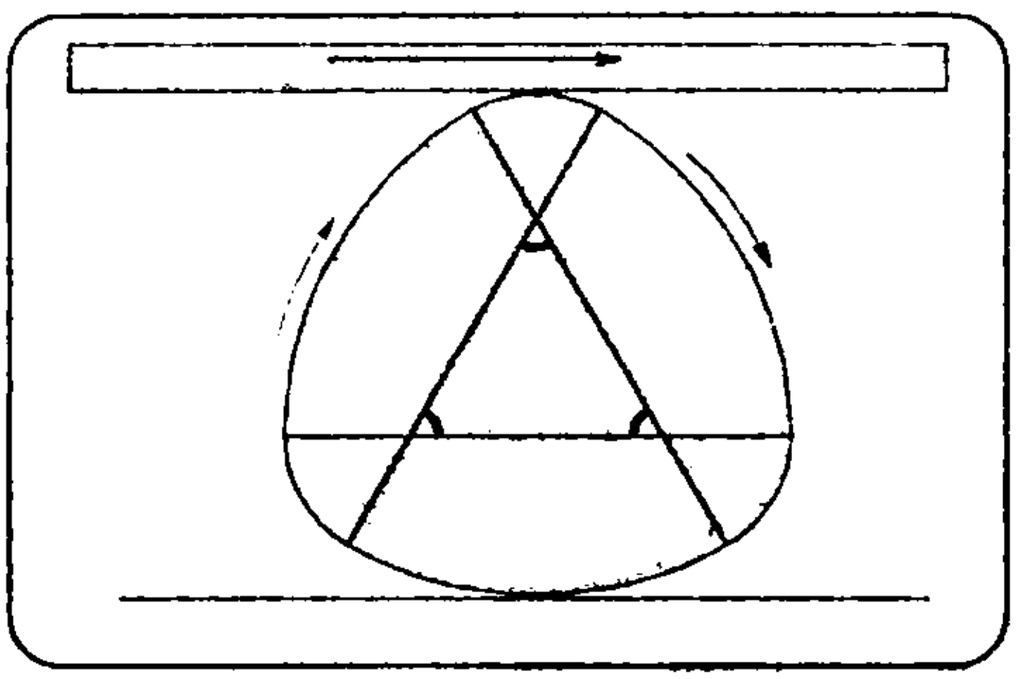
A) El punto A se mueve en el eje y
B) El punto A oscila en la dirección y
C) La barra se mantiene siempre horizontal
D) Faltan datos

28. *A y B son dos ruedas soldadas y concéntricas cuyos diámetros de uno es doble que del otro y tienen bordes rugosos. Tal como muestra el gráfico, se encuentran en pleno contacto con las respectivas superficies. ¿Es posible que ambas rueden por las respectiva superficies en las que se encuentran apoyadas?*



A) Sí B) No C) F. D:

29. *Una plancha L se encuentran sobre una rueda especial (el gráfico muestra los perfiles). Al desplazarse la plancha, la rueda gira, ¿qué ocurre con la plancha, oscila (sube y baja) mientras se desliza?*



A) No **B) Sí** **C) F. D.**

CLAVES DE Respuestas

PÁGINA 484 - 485	1	2	3	4	5	6
	A	C	B	A	E	D

PÁGINA 489	1	2	3	4	5	6
	D	E	C	E	D	B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	A	C	C	A	D	D	E	C	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	A	B	B	C	D	C	C	A	A
21	22	23	24	25	26	27	28	29	
D	D	A	D	A	C	C	B	A	

Divertijos

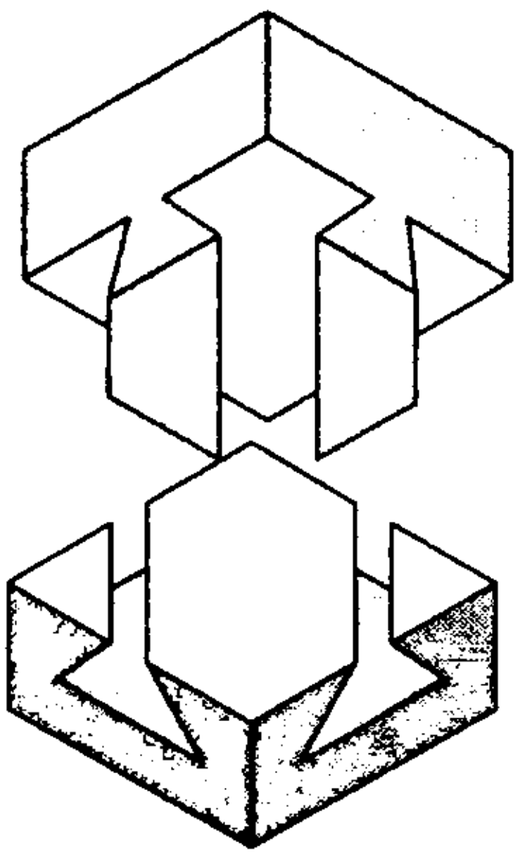
1. Nunca. Porque los escalones suben junto con la marea.

2. No lo atrapa. El gato sigue una trayectoria curva dirigiéndose siempre al ratón.

3. De noche. Por la rotación de la Tierra, en la noche uno se mueve en el mismo sentido que el movimiento de traslación de la Tierra.

4. No se moja, porque el agua no se derrama. El hielo al derretirse reduce su volumen y ocupa sólo el espacio ocupado por el hielo hundido.

5. **Machihembrado increíble**



Sir Isaac Newton

Nació en Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra el 4 de Enero, en 1643

Difícilmente podría decirse que el camino de Newton a la fama estaba predeterminado. Su nacimiento fue prematuro, y durante algún tiempo pareció que no sobreviviría debido a su debilidad física. Su padre murió tres meses antes de que naciera . Cuando Newton tenía dos años de edad, su madre volvió a casarse, y el niño se fue a vivir con su abuela a una granja de Woolsthorpe. Fue probablemente aquí, en un distrito de Inglaterra, donde adquirió facultades de meditación y concentración que más tarde le permitieron analizar y encontrar la solución de problemas que desconcertaban a otros científicos.

A los 12 años, ingresó en la Escuela del Rey, donde vivió con un boticario llamado Clark, cuya esposa era amiga de la madre de Newton. Pasó cuatro años en ese hogar, en el que se divertía construyendo toda clase de molinos de viento, carros mecánicos, relojes de agua y cometas. Encontró un desván lleno de libros científicos que le encantaba leer, y toda suerte de sustancias químicas.

Cuando tenía dieciséis años, murió su padrastro, y volvió a casa a fin de ayudar a su madre en la administración de su pequeña propiedad, pero Newton no sentía inclinación a la vida del campo. Por fin, se decidió que continuará su carrera académica e ingresó en el Colegio de la Trinidad, de Cambridge.

Newton no se distinguió en el primer año de estudios en Cambridge. Pero tuvo la ayuda valiosa de Barrow, distinguido profesor de matemáticas. Barrow quedó impresionado con las aptitudes de Newton y en 1664, lo recomendó para una beca de matemáticas. Gracias a la instrucción de Barrow, tenía un excelente fundamento en la geometría y la óptica. Se familiarizó con la geometría algebraica de Descartes; conocía la óptica de Kepler, y estudió la refracción de la luz, la construcción de los telescopios y el pulimento de las lentes. En 1664 se cerró provisionalmente la Universidad de Cambridge debido a la gran peste (bubónica), y Newton volvió a Woolsthorpe, donde pasó un año y medio, durante ese tiempo hizo tres de sus grandes descubrimientos científicos. El primero fue el binomio de Newton y los elementos del cálculo diferencial, que llamaba fluxiones. Poco después dijo que "había encontrado el método inverso de las fluxiones", es decir, el cálculo integral y el método para calcular las superficies encerradas en curvas como la hipérbole, y los volúmenes y de los sólidos. Años más tarde, cuando se publicaron sus hallazgos, hubo cierta duda acerca de si el matemático alemán Leibnitz era considerado el creador del cálculo diferencial. Al parecer ambos, independiente y casi simultáneamente, hicieron este notable descubrimiento. Su segundo gran descubrimiento se relacionó con la Teoría de la Gravitación. El tercer gran esfuerzo, correspondió a la esfera de la óptica y la refracción de la luz.

A los 30 años fue elegido miembro de la Sociedad Real de Londres, que era el más alto honor para un científico. Para corresponder a este honor, obsequió a la Sociedad el primer telescopio reflector que manufacturó.

Newton volvió a Cambridge en 1667 para aceptar una plaza pensionada que no tardaría en convertirse en la de profesor de matemáticas, durante los siguientes 20 años.

En 1664 Halley un joven astrónomo visitó a Newton, el cual instó a Newton a publicar sus descubrimientos, esto hizo que Newton en los siguientes dos años, escribiera lo que resultó ser *"Principios matemáticos de la filosofía natural"*, escritos en Latín, ricos en detalles, con pruebas basadas con exactitud en la geometría clásica, y sorprendentemente raros en sus conclusiones filosóficas, matemáticas y científicas. Poco después de la publicación de esta gran obra en 1689, Newton fue elegido miembro del parlamento por Cambridge. Cuando se le nombró director de la casa de moneda de Inglaterra en 1701, renunció a su cátedra en Cambridge. En 1703 fue nombrado presidente de la Sociedad Real de Londres, cargo que ocupó durante el resto de su vida. En 1705 le concedió nobleza la Reina Ana, y fue el primer científico que recibió este honor por sus obras.

Falleció el 31 de Marzo 1727 en Londres, Inglaterra.

12 ELEMENTOS DE ESTADISTICA

INTRODUCCION

La matemática sirve para cuantificar todo cuanto existe en la naturaleza; y sirve para mucho más. Entre otras cosas, para cuantificar el comportamiento de los fenómenos tanto en el tiempo como en el espacio. Aquí es donde entra a tallar la rama de la matemática que se conoce como estadística.

Aunque esta rama de la matemática es realmente extensa, en el presente texto veremos lo referente a dos temas fundamentales y en los que se basa la estadística: por un lado, la organización de datos incluido los gráficos estadísticos, y por otro lado, los estadígrafos de centralización también conocido como promedios.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- *Teoría de conjuntos*
- *Operaciones matemáticas fundamentales: adición, sustracción, multiplicación, división*

12.1 Conceptos previos

Para empezar vamos a exponer los conceptos de mayor uso dentro de esta rama de la matemática. En estadística, un solo dato o el análisis del comportamiento de un solo individuo no tiene importancia, si no es parte de un todo. En consecuencia, se trata del estudio de conjuntos o grupos de diversa naturaleza que se denomina POBLACION y cuya distribución se da en el tiempo, el espacio o ambos. Pero en la mayoría de los casos no es posible hacer un estudio directo sobre la totalidad de la población, entonces se toma un subconjunto representativo que se denomina MUESTRA.

Por ejemplo, si se quiere sondear sobre quién será el ganador en las elecciones nacionales, se hace una ENCUESTA entre un grupo de electores. En este caso la población es el total de electores a nivel nacional, en tanto que la muestra es el grupo de personas encuestadas.

El número de individuos que conforman la muestra se llama TAMAÑO de la misma. En los estudios se prefiere que el tamaño sea el máximo posible y lo más representativo. Por otro lado, la característica que se quiera investigar se llama VARIABLE estadística. Ejemplos:

VARIABLE	POBLACION	MUESTRA	TAMAÑO
Para averiguar el **ingreso** de los	trabajadores de construcción civil	se encuesta a un grupo	de 100 trabajadores
Para estudiar la **precipitación** en una cuenca,	de todas las ocurridas	se toman las mediciones en un período de	20 años
Para averiguar la **estatura**	de los estudiantes de un colegio	se escoge al azar un grupo de	40 estudiantes

Cada valor que toma la variable estudiada se llama DATO. Por ejemplo, si averiguamos los ingresos, ésta es la variable y los datos podrían ser: 400 soles, 500 soles, etc.

Las variables pueden ser cualitativas: el voto por un candidato, el color de ojos, la preferencia por una bebida; en estas variables los datos no son cantidades.

Por otro lado, los datos pueden ser cuantitativos, en este caso cada dato que se obtiene es una cantidad.

La representatividad de la muestra

Son muchas las razones por los que se trabaja con muestras y no con toda la población: pueda que esta sea demasiado grande, sea que la experiencia a realizar sea destructiva, etc.

Una muestra correctamente elegida tiene las mismas características que la población, para ello dicha elección debe ser aleatoria es decir, que cada individuo tenga la misma probabilidad de estar en la muestras. Los individuos de la muestra se debe escoger al azar.

Variable discreta y continua

Los datos cuantitativos se puede sub dividir en discretas y continuas.
Las discretas son las que toman valores numéricos enteros como el número de hermanos, número de animales, número de puestos de trabajo, etc.

CONTINÚA

Por último, la variable, como su nombre lo indica, puede tomar diferentes valores, es decir, no todo los datos tienen un mismo valor, pero sí, un grupo de datos pueden tener un mismo valor. La cantidad de datos que tienen un mismo valor o que pertenecen a un determinado intervalo, se llama FRECUENCIA.

VIENE DE LA PÁGINA ANTERIOR

Las continuas son las que toman valores numérico decimales o por lo menos, sus valores aproximados son números decimales, como la estatura, el peso, la velocidad, índices, etc.

12.2 Organización de datos y gráficos estadísticos

A. Diagrama de barras

Los dueños de un mercado han realizado una encuesta sobre la preferencia que tiene la gente sobre las bebidas gaseosas: A, B, C y D. La encuesta se hizo sobre 40 personas. El resultado se muestra a la derecha.

C	B	D	B	C	C	A	B
A	D	B	A	B	D	B	C
C	C	B	B	C	A	C	D
B	B	D	A	B	D	B	D
C	D	B	B	C	A	B	A

Resultdos de la encuesta

En el cuadro, los datos tal como están no nos dice mucho, por lo tanto, lo organizamos en una distribución de frecuencias. Si bien, aquí los datos están organizados, pero a simple vista es poco lo que expresa. Si a este cuadro lo llevamos a un diagrama de barras, la cosa es más expresivo. En este diagrama podemos darnos cuenta a simple vista que la mayoría de personas prefieren la bebida B.

Bebidas	A	B	C	D
Frecuencia	7	15	10	8
Fr. relat.(%)	17,5	37,5	25,0	20,0

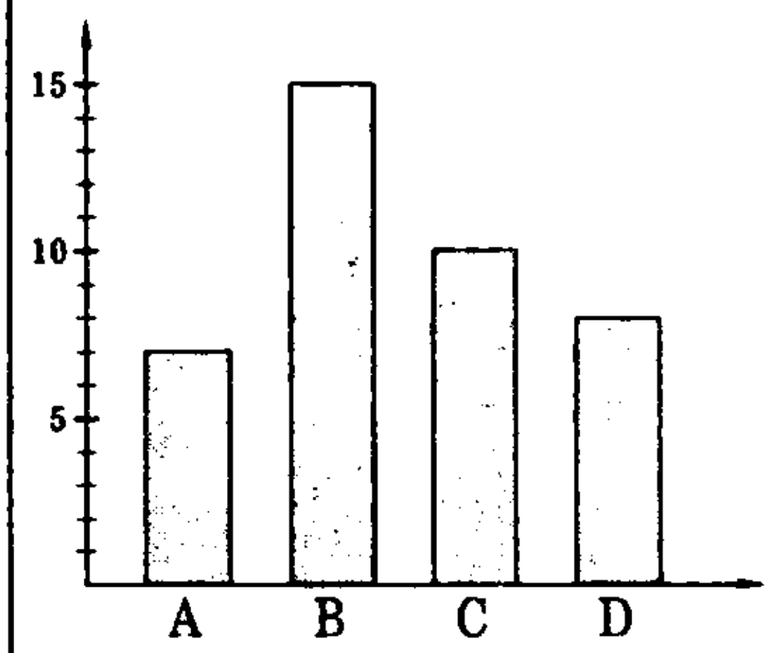
Distribución de frecuencias

Supongamos que los dueños de una distribuidora proyectan vender 10 000 unidades de bebidas, ¿cuánto de cada uno deben pedir a los proveedores?

Para dar respuesta a esto, calculamos los porcentajes de preferencias por cada una de las bebidas, teniendo en cuenta que el 100% equivale al tamaño de la muestra que es 40. Así tenemos la distribución de frecuencias relativas. Aplicando estos porcentajes a 10 000 tendremos la cantidad de unidades a pedir.

Bebidas	A	B	C	D	Total
Unidades	1750	3750	2500	2000	10000

DIAGRAMA DE BARRAS



B. Diagramas de sectores

En una cuenca se ha inventariado todo el terreno, obteniéndose los datos que se muestran en el siguiente cuadro.

Podríamos mostrar gráficamente mediante un diagra-

ma de barras; pero para este tipo de información amerita mejor un diagrama de sectores que consiste en dividir un círculo en sectores, de modo que cada sector correspondiente a un tipo de terreno, tenga un ángulo proporcional a su frecuencia (área).

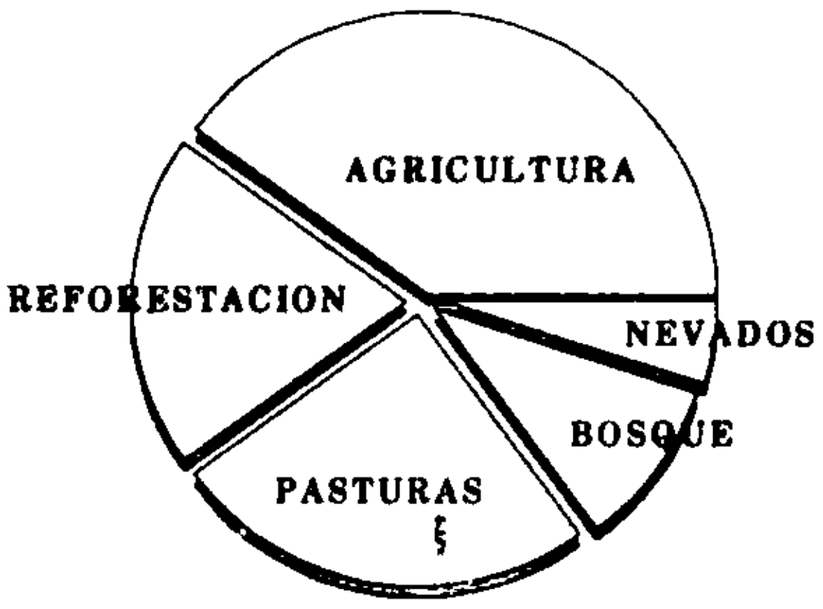


DIAGRAMA DE SECTORES

Mediante este diagrama, se visualiza el tamaño de las partes relacionados con el todo. Por ejemplo, podemos ver que el mayor área de la cuenca son terrenos dedicados a la agricultura, en cambio, una pequeña parte se encuentra cubierto por nieve.

Problema 1

Realizar la distribución de frecuencias, distribución de frecuencias relativas, diagrama de barras y diagrama de sectores para los datos que se presentan a continuación, sobre el número de hijos que tienen cada pareja encuestada en una localidad.

2	6	0	2	1	5	2	4	1	4	2	2	4
1	3	3	1	5	2	3	2	1	3	5	2	
6	2	6	3	4	6	1	4	3	2	5	2	0
3	2	4	2	3	1	4	3	5	2	1	5	

Resolución

A continuación se distribuye los datos, según sus respectivos valores. Esta tabla se denomina tabla de distribución de frecuencias.

Tipo	Area (ha)
Agricultura	51200
Reforestación	25600
Pasturas	32000
Bosque	12800
Nevado	6400
Total	128000

Area		Angulo
128000	→	360°
51200	→	144°
25600	→	72°
32000	→	90°
12800	→	36°
6400	→	18°

Aquí se muestra el resultado del cálculo de los ángulos correspondientes a cada sector mediante regla de tres:

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} 128000 & \rightarrow & 360° \\ 51200 & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{360° \times 51200}{12800}$$

$$x = 144°$$

TIPOS DE FRECUENCIA

Frecuencia absoluta

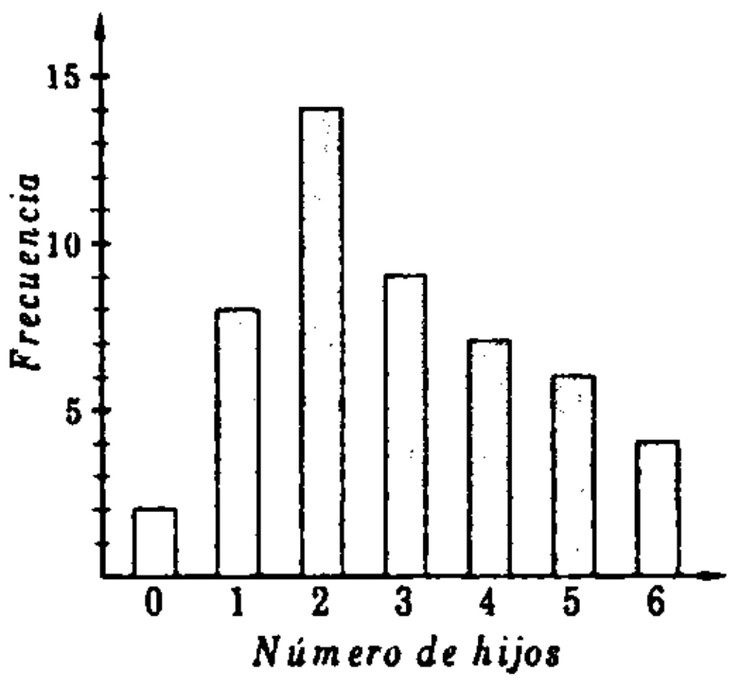
O simplemente frecuencia, *es la cantidad de datos con un mismo valor o que pertenecen a un mismo intervalo.*

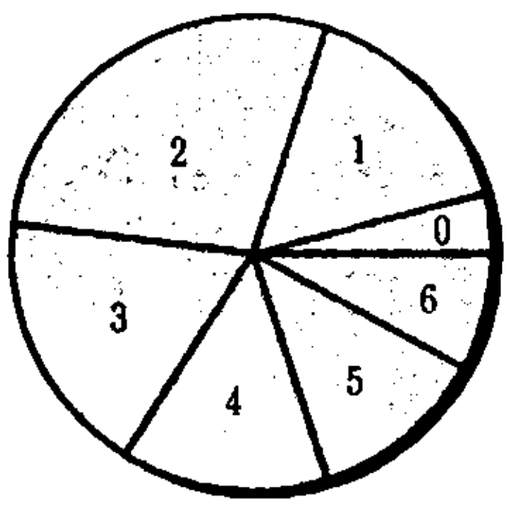
Frecuencia acumulada

La frecuencia acumulada correspondiente a un dato o intervalo es la suma de las fre-

CONTINÚA

Número de hijos	Marcas	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Fre. relat. en (%)
0	𝍸	2	0,04	4
1	𝍸𝍸	8	0,16	16
2	𝍸𝍸𝍸	14	0,28	28
3	𝍸𝍸	9	0,18	18
4	𝍸𝍸	7	0,14	14
5	𝍸	6	0,12	12
6	𝍸	4	0,08	8
	Total	50	1,00	100





VIENE DE LA PÁGINA ANTERIOR

cuencias anteriores incluido la que corresponde al dato.

Frecuencia Relativa

Es el valor de la frecuencia absoluta devidida entre el número de datos.

Frecuencia relativa acumulada

Es el valor de la frecuencia acumulada devidida entre el número de datos.

Cualquiera de las frecuencias relativas puede expresarse en porcentajes.

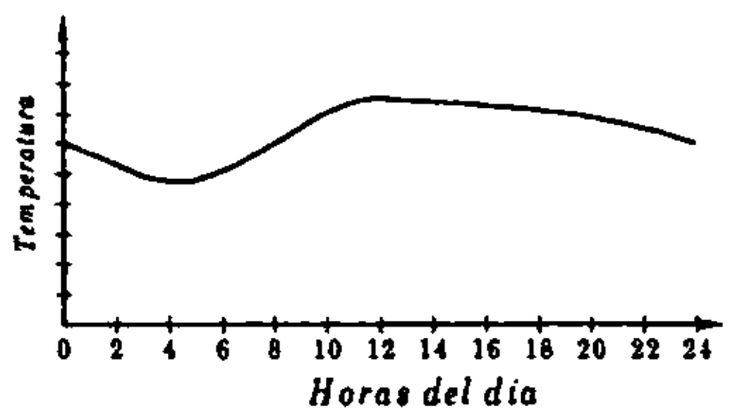
50	→	360,0°
2	→	14,4°
8	→	57,6°
14	→	100,8°
9	→	64,8°
7	→	50,4°
6	→	43,2°
4	→	28,8°

C. Histograma

Hasta ahora hemos visto variables cuyos valores varían en un rango pequeño; no siempre ocurre así, como veremos a continuación donde la tabla indica las estaturas en cm, medidas en una muestra de 100 estudiantes .

170	151	167	154	157	181	182	158	175	159
160	166	160	163	164	164	170	168	171	152
153	163	164	160	145	168	162	142	162	161
159	171	168	147	153	162	163	171	180	145
150	152	160	172	164	151	148	153	162	166
165	143	159	160	152	162	170	168	167	159
148	149	153	154	164	172	168	174	166	160
150	151	143	142	155	166	170	173	154	155
162	171	160	169	179	168	157	166	172	169
160	161	152	148	156	148	171	168	149	156

VARIACIÓN DE LA TEMPERATURA A LO LARGO DEL DÍA



VARIACIÓN DE LA TEMPERATURA A LO LARGO DEL AÑO

La primera observación es que no podemos trabajar con las frecuencias con que se da cada dato por haber demasiados datos diferentes, más bien, vamos a agrupar los datos en intervalos, de modo que la frecuencia absoluta será la cantidad de datos que pertenece a cada intervalo. Para esto existe de manera convencional el siguiente método.

1. **Rango (R):** La diferencia entre los datos de máximo y mínimo valor, en este caso: $R = 182 - 142 = 40$.

2. **Número de intervalos (k):** La fórmula de Sturges sugiere $k = 1 + 3{,}332\ log\ (n)$, donde n es el número de datos. En este caso $k = 1 + 3{,}332 \times 2 = 7{,}66$, esto lo aproximamos al número entero 8, entonces $k = 8$.

3. **Tamaño del intervalo (c):** $c = \frac{R}{k} \Rightarrow c = \frac{40}{8} = 5$

4. **Marca de clase (M)**: Es el promedio entre los valores extremos de cada intervalo.

Frecuencia relativa y probabilidad.

En el ejemplo del número de hijos, Si tomamos una pareja, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga 4 hijos? Para dar respuesta nos fijamos en su frecuencia relativa: 0,14

$$P(\text{tener 4 hijos}) = 0{,}14$$

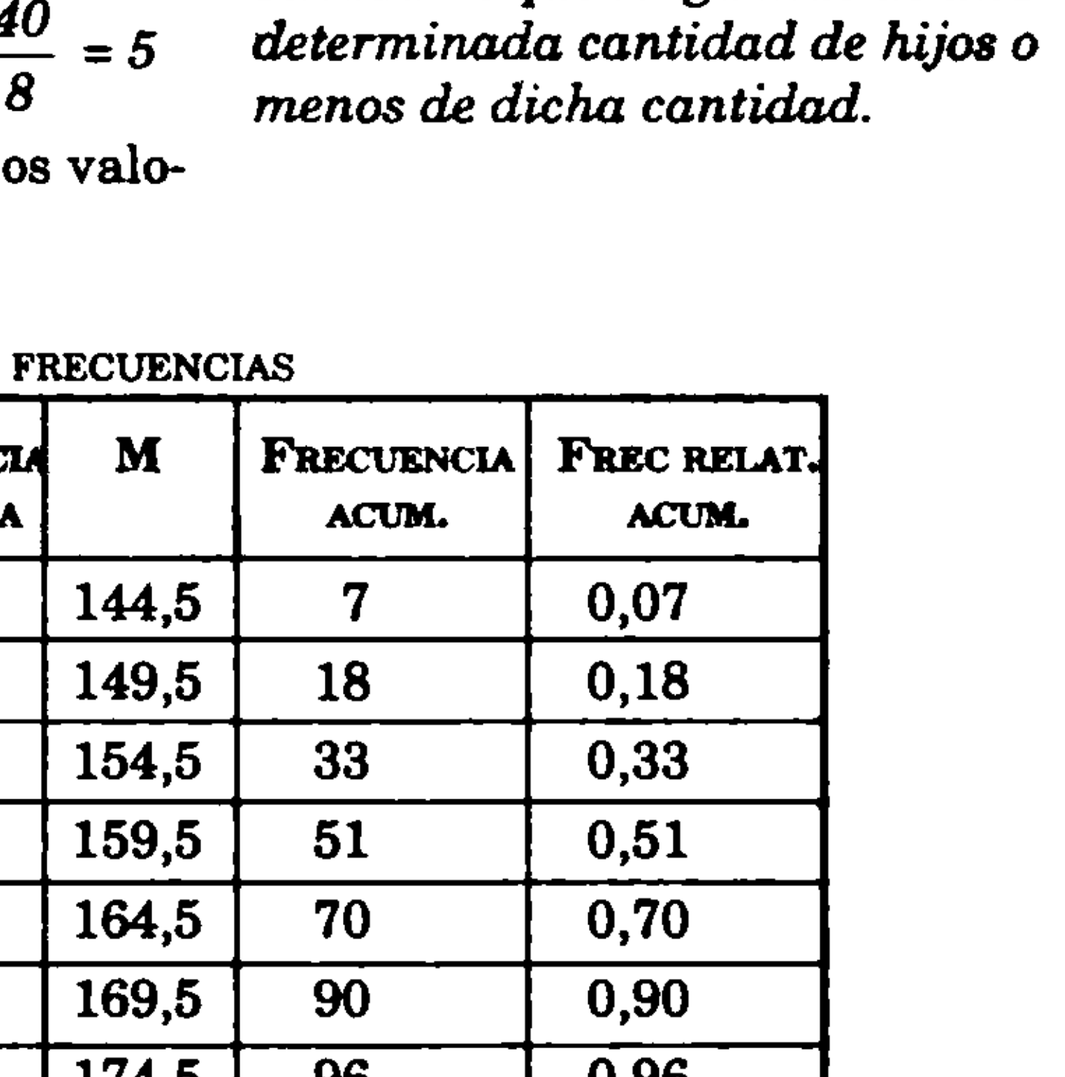
La frecuencia relativa acumulada sirve para calcular la probabilidad de que tenga más de una determinada cantidad de hijos o menos de dicha cantidad.

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

INTERVALOS	MARCAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	M	FRECUENCIA ACUM.	FREC RELAT. ACUM.
[142; 147⟩	𝍸 /	7	0,07	144,5	7	0,07
[147; 152⟩	𝍸 𝍸 /	11	0,11	149,5	18	0,18
[152; 157⟩	𝍸 𝍸 𝍸	15	0,15	154,5	33	0,33
[157; 162⟩	𝍸 𝍸 𝍸 /	18	0,18	159,5	51	0,51
[162; 167⟩	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	19	0,19	164,5	70	0,70
[167; 172⟩	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	20	0,20	169,5	90	0,90
[172; 177⟩	𝍸 /	6	0,06	174,5	96	0,96
[177; 182]	𝍸	4	0,04	179,5	100	1,00

Ahora vamos a expresar gráficamente el resultado obtenido

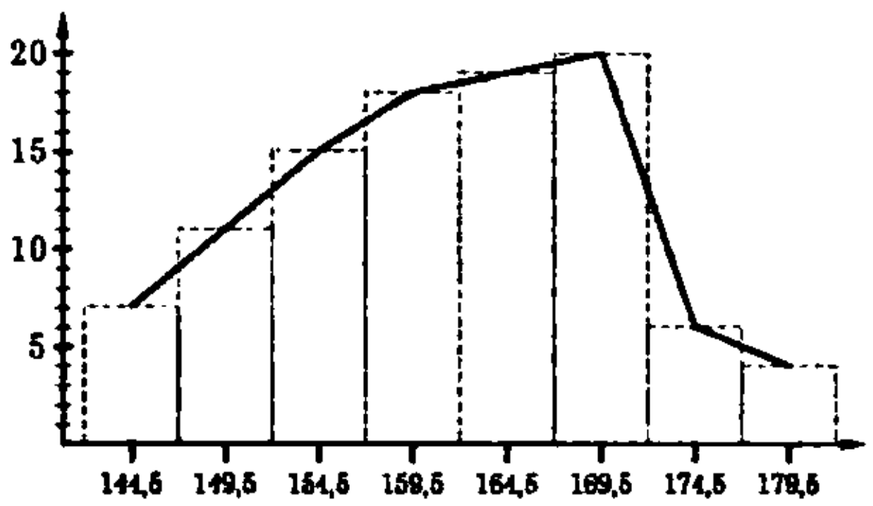
Un histograma también está formado por rectángulo de altura igual a la frecuencia, con la diferencia de que el ancho de sus bases son iguales al tamaño del intervalo y están ubicados uno a continuación de otro, es decir, cada rectángulo tiene un ancho de base igual al tamaño del intervalo. La marca de clase se coloca debajo de cada retángulo.



HISTOGRAMA

D. Polígonos de frecuencia

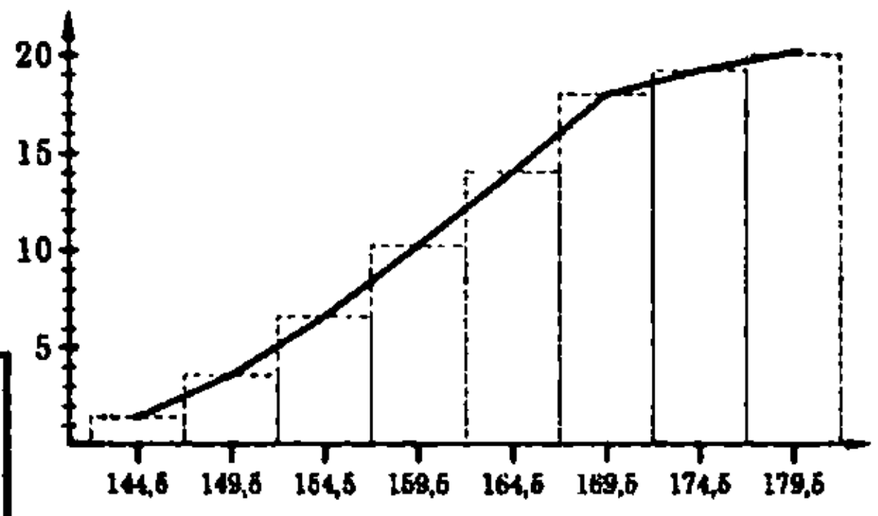
En lugar de los histogramas, podemos graficar mediante una poligonal abierta que une los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos que conforman el histograma. Otro uso que se puede dar al polígono de frecuencia es para graficar tomando las frecuencias relativas acumulativas. (Poligonal acumulada). En este gráfico podemos ver el porcentaje de estudiantes con estatura por encima o por debajo de una determinada medida. Por ejemplo el 51% de los estudiantes tienen una estatura menor a 159,5 cm.



Problema 2

A continuación se presentan datos sobre la cantidad de turistas que visitaron a una localidad cercana a unas ruinas arqueológicas.

Año	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Turistas	540	700	800	1200	1450	1650	?



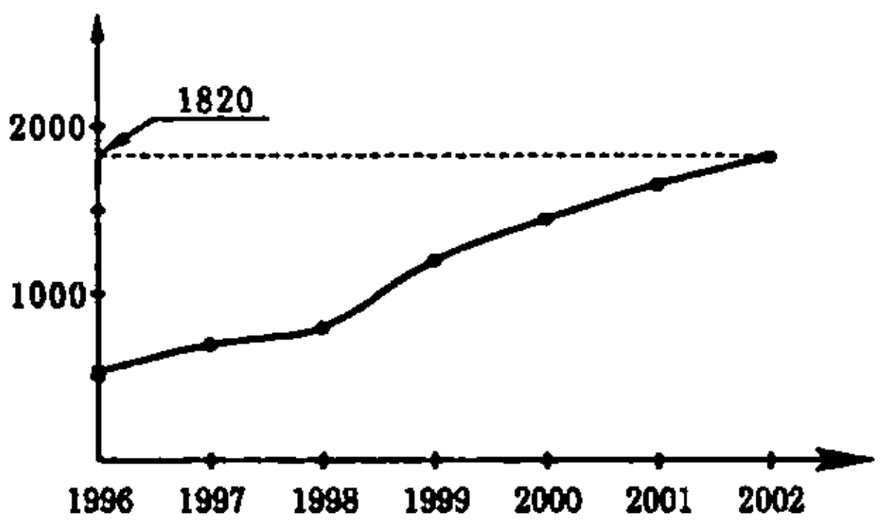
¿ Cuántos turistas se espera que visiten el año 2002?

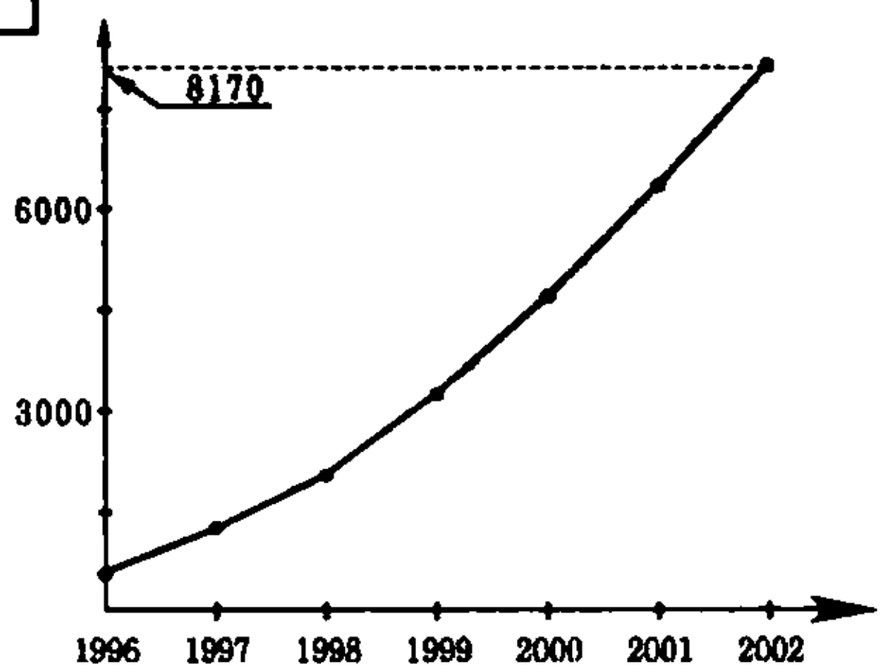
Resolución

Vamos a realizar el gráfico del polígono de frecuencias de los datos, tal como están y la poligonal acumulada.

Cuadro de resultados para la poligonal acumulada:

Año	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Turistas	540	1240	2040	3240	4690	6340	?





Si prolongamos el polígono de frecuencias, lo que corresponde al año 2002 es 1820. Si prolongamos la poligonal acumulada, lo que corresponde al 2002 es 8170, y 8170 – 6340 es igual a 1830. De ambos resultados se deduce que los visitantes para el año 2002 serán 1825.

12.3 Parámetros estadísticos o estadígrafos: Medidas de centralización

Todos hemos pasado por las aulas de secundaria; el maestro toma varias evaluaciones durante el año, de modo que uno obtiene un conjunto de "notas"; pero al final, el maestro saca una sola nota, la cual si es mayor que 10 significa aprobado y si es menor que 11 significa desaprobado. Esta única nota representa a todas las obtenidas durante el año y se llama PROMEDIO FINAL.

En estadística, a un conjunto de datos, principalmente numéricos, se le puede hacer representar con uno sólo, como en el caso de las notas por el promedio final, este único dato representativo tiene diferentes denominaciones.

A. Media o promedio aritmético (*m*).

Es uno de los parámetros estadísticos de mayor uso y más conocido aplicable a variables cuantitativas

$$Media = \frac{Sumatoria\ de\ todo\ los\ datos}{Número\ de\ datos}$$

Por ejemplo, si las notas obtenidas por un alumno durante el año son: 12; 14; 16 y 16, el promedio es.

$$m = \frac{12 + 14 + 16 + 16}{4} = 14{,}5 \approx 15$$

Cuando los datos están distribuidos en una tabla de frecuencias: veamos los datos del problema 1:

Número (x)	Frecuencia (F)	xxF
0	2	0
1	8	8
2	14	28
3	9	27
4	7	28
5	6	30
6	4	24
Suma	50	145

Ejercicios

Hallar el promedio final (pf) de cada uno de los cursos y el promedio de notas de los 9 cursos (PF)

Cursos	Notas				
	1°	2°	3°	4°	pf
Comunica.	12	14	15	12	
Idioma Ext.	15	14	12	14	
Arte	14	16	15	16	
Matemática	10	15	16	18	
C. T. A.	12	15	14	12	
Cienc. Soc.	12	15	12	12	
Ed. Física	15	14	16	12	
Ed. Relig.	12	14	15	16	
G. P. P. y E.	15	16	14	15	

*Cuando se menciona la palabra **media**, se refiere a la media aritmética. Para mencionar los otros esta-dígrafos se especifica su nombre.*

Temperatura media

Calcular la temperatura media mensual para el mes de enero, de acuerdo a las temperaturas promedio diarias que se dan a continuación:

	15	15	16	15	16	17
15	16	16	16	17	18	17
18	17	17	16	16	15	16
17	17	18	18	19	19	18
19	18	19	18			

A cada valor del dato (número de hijos) multiplicamos por su respectiva frecuencia. Estos resultados se suman, en este caso la suma es *145*, luego esto lo dividimos entre el número de datos, *50*; en consecuencia:

$$m = \frac{145}{50} \quad \Rightarrow \quad m = 2{,}9 \approx 3$$

Las parejas tiene en promedio 3 hijos.

Este resultado es un dato que identifica o resume las características de las parejas encuestadas y podría servir para hacer comparaciones, para hacer cálculos de cantidad de provisiones, etc.

Por otro lado, cuando los datos son agrupados en intervalos, para cada intervalo multiplicamos la marca de clase por la frecuencia. En el ejemplo de las estaturas tenemos:

Intervalos	Frec. (F)	M	$M \times F$
[142; 147⟩	7	144,5	1011,5
[147; 152⟩	11	149,5	1644,5
[152; 157⟩	15	154,5	2317,5
[157; 162⟩	18	159,5	2871,0
[162; 167⟩	19	164,5	3125,5
[167; 172⟩	20	169,5	3390,5
[172; 177⟩	6	174,5	1047,5
[177; 182]	4	179,5	718,0
Suma	**100**		**16125,0**

$$m = \frac{16125}{100} = \quad \Rightarrow \quad m = 161{,}25$$

Los alumnos tienen una estatura promedio de 161,25 cm.

B. Media ponderada (*mp*)

Es parecido al cálculo de la medida de los datos distribuidos en una tabla de frecuencias. En este caso, a cada valor de la variable en lugar de multiplicar por su respectiva frecuencia, se multiplica por un "peso" determinado de acuerdo a algún criterio.

Supongamos que durante un ciclo semestral de la uni-

Ejercicio

A continuación se da los pesos en kg de 50 pacientes que acudieron a una posta médica. Hallar el peso promedio de estos pacientes que son una muestra de la población aledaña a la posta:

54	55	52	56	58
62	61	60	62	65
66	54	58	57	54
56	58	57	52	54
56	54	52	53	54
56	58	57	54	56
55	52	53	51	58
62	63	60	52	50
62	54	52	56	53
61	60	59	58	57

Grado de aproximación

Si sumamos todo los datos de las 100 estaturas se obtiene 16074, que dividida entre 100 da 160,74. Este resultado es la medida de las 100 estaturas.

La medida que hemos calculado agrupando los datos es 161,25.

La diferencia entre estos dos resultados es mínima. Si bien es cierto que 160,74 es la más exacta, pero su cálculo es un proceso demasiado engorroso por lo que para datos muy numerosos se opta por la media obtenida por la agrupación de datos.

versidad el profesor toma una práctica calificada un examen de medio curso y un examen final de todo el curso. Por experiencia se sabe que el esfuerzo que se realiza en una práctica calificada es aproximadamente la mitad de lo que se realiza en un examen de medio curso; a su vez, el examen final representa un doble esfuerzo con respecto al de medio curso. En consecuencia, los respectivos "pesos" de las notas serían:

	Práctica	Mdio curso	Ex. final
Notas	18	08	16
Pesos	0,5	1	2

Estos pesos intervienen en lugar de las frecuencias, por lo tanto:

$$mp = \frac{18\times0,5 + 8\times1 + 16\times2}{0,5+1+2} \quad \Rightarrow \quad m = 14$$

Problema 3

El dueño de una hacienda desea vender su finca y requiere saber cuál es el costo promedio por unidad de área (en ha). Para ello contrata unos tasadores quienes al final de su trabajo le entregan el siguiente cuadro de datos.

Tipo de terreno	Area (ha)	Precio por ha en miles de dólares
I	40	20
II	60	16
III	20	10
IV	5	6

¿Cuál será el precio promedio por ha de la finca?

Resolución

La variable es el precio por hectárea y los pesos son las respectivas áreas, en consecuencia:

$$mp = \frac{40\times20 + 60\times16 + 20\times10 + 5\times6}{40+60+20+5} \quad \Rightarrow \quad mp = 15,92$$

Rpta.: 15920 dólares por ha

Ejercicios

Hallar el promedio de las siguentes notas de acuerdo a su respectivos pesos

Notas	*12*	*10*	*14*	*Prom*
Pesos	*0,5*	*1*	*2*	

Notas	*14*	*11*	*12*	*Prom*
Pesos	*0,5*	*1*	*0,5*	

Notas	*16*	*15*	*18*	*Prom*
Pesos	*1*	*2*	*2*	

Notas	*17*	*19*	*12*	*Prom*
Pesos	*0,5*	*0,3*	*0,2*	

A continuación se da la talla promedio (T. P.)y el número de estudiantes (N) de diferentes aulas. Hallar la talla promedio de todo los estudiantes

N.	*25*	*30*	*28*	*42*	*40*
T. P.	*1,52*	*1,53*	*1,51*	*1,54*	*1,52*

Un campesino dejó como herencia a sus tres hijos sus animales cuyas cantidades (x) y costos unitarios en soles (Cu) se dan a continuación:

	x	*Cu*
Carneros	*28*	*60*
Caprinos	*20*	*60*
Cerdos	*10*	*120*

Los tres hermanos deben repartirse equitativamente toda la fortuna. Si a uno de ellos le toca 15 carneros, al otro 10 caprinos y al tercero 4 cerdos, ¿cuántos y cuáles son los demás animales que le toca a cada uno?

C. Mediana (*me*)

Es un estadígrafo de datos cuantitativos que divide a los mismos en dos grupos de aproximadamente de igual tamaño. Los valores del primer grupo serán menores o iguales a *me* en tanto que los valores del otro grupo son mayores o iguales a *me*. Como ejemplo se tiene, a continuación, la cantidad dè frutos de una muestra de 13 árboles:

50	45	76	62	52	56	70	64	58	47	51	63	77

Para calcular la mediana, ordenamos los datos de menor a mayor:

45	47	50	51	52	56	58	62	63	64	70	76	77
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

El dato que ocupa el lugar central es el dato número 7 cuyo valor es 58, entonces $me = 58$. A1

En el cálculo de la mediana puede ocurrir muchos casos: el número de datos sea par, en tal caso, la mediana será la semisuma de los dos datos centrales E1 o que varios datos tengan al mismo valor que la mediana, en este caso, no altera en nada el valor que se calcule. E2

La mediana en los datos **distribuidos en una tabla** de frecuencias, es aquel en el que la frecuencia acumulada supera por primera vez el 50% del total de datos.

Notas de 40 alumnos

Notas	Frec.	F. acum
12	3	3
13	5	8
14	9	17
15	**11**	**28**
16	7	35
17	4	39
18	1	40

Aquí el 50% significa 20, esto se supera cuando la frecuencia acumulada es 28: *me = 15*

Talla de pantalones vendidos en una tienda

Tallas	Frec.	F. acum
24	8	8
26	14	22
28	**21**	**43**
30	10	53
32	5	58
34	2	60

El 50% es 60÷2 = 30, el primer valor de Frec. Acum. mayor de 30 es 43, esto corresponde a la talla 28: *me* = 28

A1

En el ejemplo de los frutos de los árboles, la mitad de dichos árboles tienen menos de 58 frutos y la otra mitad tienen más de 58 frutos.

E1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
10	*20*	*30*	*45*	*50*	*50*	*60*	*75*

Tomando los datos de lugar 4 y 5 que vienen a ser 45 y 50, tenemos:

$$me = \frac{45 + 50}{2}$$

$$me = 47{,}5$$

E2

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
0,3	*0,4*	*0,5*	*0,5*	*0,5*	*0,7*	*0,9*

En este caso la mediana es el valor que ocupa el lugar 4, es decir:

$$me = 0{,}5$$

Para datos **agrupados en intervalos** la mediana se puede calcular de dos maneras: Una aproximada, donde la mediana viene a ser la marca de clase del intervalo donde la frecuencia acumulada supera por primera vez el 50% del número de datos. Y la otra más exacta, con la siguiente fórmula:

$$me = Li + c\left[\frac{0{,}5n - Fa}{fm}\right]$$

Li: límite inferior del intervalo mediano; *c*: tamaño del intervalo; ***n:*** número de datos; ***Fa:*** frecuencia acumulada correspondiente al intervalo inmediato anterior al intervalo mediano; y ***fm:*** frecuencia del intervalo mediano.

Como ejemplo, se presenta (a la derecha) una tabla de frecuencias donde se encuentran distribuidos los sueldos en dólares que perciben los trabajadores de una fábrica.

El intervalo mediano es [240; 280⟩, entonces un primer valor aproximado de la mediana sería $ 260.

Si queremos un valor más exacto: $Li = 240$; $c = 40$; $0{,}5n = 25$; $fm = 10$; $Fa = 17$. Por lo tanto:

$$me = 240 + 40\left[\frac{0{,}5 \times 50 - 17}{10}\right] = 272$$

Esto significa que el 50% de los trabajadores perciben menos de $ 251,85 en tanto que el otro 50% percibe más de $ 251,85.

Intervalo mediano.

El intervalo mediano como ya se indicó, es aquel donde la frecuencia acumulada supera por vez primera al 50% del total de datos.

Intervalos	*M*	*f*	*Fa*
[120; 160⟩	*140*	*2*	*2*
[160; 200⟩	*180*	*6*	*8*
[200; 240⟩	*220*	*9*	*17*
[240; 280⟩	*260*	*10*	*27*
[280; 320⟩	*300*	*8*	*35*
[320; 360⟩	*340*	*7*	*42*
[360; 400⟩	*380*	*5*	*47*
[400; 440]	*420*	*3*	*50*

Ejercicio

Se ha hecho una encuesta sobre la preferencia por las bebidas A, B, C, D, y E. El resultado se presenta en la tabla siguiente:

B	*D*	*A*	*E*	*B*	*C*
A	*B*	*C*	*E*	*B*	*E*
D	*A*	*C*	*C*	*D*	*A*
C	*A*	*D*	*B*	*B*	*B*
C	*D*	*C*	*A*	*C*	*D*
C	*B*	*C*	*B*	*C*	*D*
E	*D*	*E*	*D*	*E*	*B*
B	*A*	*E*	*B*	*C*	*D*
D	*C*	*D*	*D*	*D*	*D*
E	*A*	*D*	*B*	*D*	*B*

D. Moda (*mo*)

Este estadígrafo es aplicable tanto a variables cuantitativas como a las variables cualitativas. Se define como el valor del dato que más se repite, es decir, es el valor del dato de mayor frecuencia.

Como ejemplo, a continuación se presenta el color predominante de la ropa de 50 mujeres.

Color	Amarillo	Blanco	Marrón	Azul	Verde
Frec.	2	15	22	6	5

En este caso el dato de mayor frecuencia es marrón, éste es la *moda* para este conjunto de datos. Este estadígrafo tiene un uso más adecuado para variables cualitativas ya que no depende del valor de los datos.

Para datos **distribuidos en una tabla de frecuencias**, la moda, como ya se indicó, es aquel valor del dato con mayor frecuencia.

Para datos **agrupado en intervalos**, la moda es aproximadamente igual a la marca de clase del intervalo de mayor frecuencia (ver el cuadro de la derecha).

Una forma más exacta se calcula del siguiente modo:

$$mo = Li + c\left[\frac{f_{(+1)}}{f_{(+1)} + f_{(-1)}}\right]$$

Donde *Li*: límite inferior del intervalo modal; $f_{(-1)}$ es la frecuencia del intervalo inmediato anterior; $f_{(+1)}$ es la frecuencia del intervalo inmediato siguiente del intervalo modal.

Si usamos esta fórmula, $f_{(+1)} = 8$, $f_{(-1)} = 6$, por lo tanto:

$$mo = 140 + 5\left[\frac{8}{8+6}\right] \quad \Rightarrow \quad mo = 142{,}86$$

Vemos que casi no hay una diferencia considerable entre ambos valores, solamente que uno es un poco más exacto que el otro.

E. La media geométrica (*mg*)

Se utiliza para datos cuya variación es geométrica, como son las tasas de incremento, razones geometricas, etc. Supongamos que en una fábrica, los incrementos de la ganancia de año a año son tal como se muestra en el cuadro.

96 a 97	97 a 98	98 a 99	99 a 00	00 a 01
20%	25%	50%	40%	75%

El incremento promedio durante los 5 años es el siguiente:

$$mg = \sqrt[5]{20 \times 25 \times 50 \times 40 \times 75}$$

$$\Rightarrow \quad mg = 37{,}58\%$$

Intervalo modal

Es el intervalo cuya frecuencia es el mayor de todos los demás.

Intervalos	*M*	*Frec*
[130; 135⟩	132,5	5
[135; 140⟩	137,5	6
[140; 145⟩	**142,5**	**11**
[145; 150⟩	147.5	8
[150; 155⟩	152,5	7
[155; 160⟩	157,5	7
[165; 165⟩	162,5	6

La moda es aproximadamente igual a la marca de clase del intervalo cuya frecuencia es 11:

$$mo = 142{,}5$$

Media Geométrica

Si los datos que ameritan calcular una media geométrica tienen frecuencias o diferentes pesos, tal como sigue.

Datos	x_1	x_2	...	x_n
Frec.	f_1	f_2	...	f_n

$$mg = \sqrt[N]{x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times \ldots \times x_n^{f_n}}$$

$$N = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$

En resumen, dado un conjunto de datos, la media geométrica:

$$mg = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 ... \times x_n}$$

F. Media armónica (*mh*)

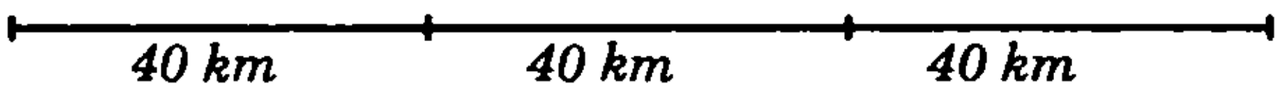
Este tipo de media se utiliza para variables que son el resultado de la relación de magnitudes, como la velocidad, eficiencia, etc.

Sabemos que la velocidad (v) es igual al cociente del espacio recorrido (e) entre el tiempo empleado (t).

$$v = \frac{e}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{e}{v}$$

Supongamos que un viajero hace tres jornadas de 40 km cada uno. El primer trayecto cubre a 10 km/h, el siguiente a 8 km/h y el último a 4 km/h

$v_1 = 10\ km/h \qquad v_2 = 8\ km/h \qquad v_3 = 4\ km/h$



$$t_1 = \frac{40}{10} = 4\ h \qquad t_2 = \frac{40}{8} = 5\ h \qquad t_3 = \frac{40}{4} = 10\ h$$

El tiempo que utiliza es $4 + 5 + 10 = 19\ h$. Como recorre $120\ km$ en $19\ h$, la velocidad que ha empleado en hacer todo el recorrido es $\frac{120\ km}{19\ h}$ esto es la velocidad promedio que representa a las tres. ¿Cómo calcular esta velocidad media a partir directamente de las velocidades parciales?

Sea *mh* la velocidad promedio utilizado en cubrir los tres tramos, que equivale haber recorrido los 120 km a la velocidad de *mh*, en consecuencia su valor equivale al espacio recorrido (120 km) entre el tiempo total empleado:

$$mh = \frac{120}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{120}{\frac{40}{10} + \frac{40}{8} + \frac{40}{4}}$$

Ejercicios

Dado los siguientes datos: 6; 10 y 15, hallar su media aritmética, media geométrica y media armónica. ¿Cuál de ellas es mayor?

Dado dos datos numéricos diferentes y positivos, ¿cuál de las medias es mayor: la aritmética, la geométrica o la armónica?

Un automóvil va desde el punto A a al punto B a razón de 20 km / h, y de B regresa a A a razón de 30 km / h. ¿Cuál es la velocidad promedio que ha empleado en hacer todo el recorrido?

Un recipiente tiene 28 litros de alcohol y otro recipiente 42 litros de agua. De ambos recipientes se extrae la misma cantidad de líquido y lo que se sacó de uno se vierte en el otro y viceversa, de modo que en ambos recipientes se obtiene mezclas con la misma concentración alcohólica. ¿Cuántos litros se ha intercambiado y cuál es la concentración de ambas mezclas?

Simplificando 40:

$$mh = \frac{3}{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}} = \frac{120}{19} km/h$$

En conclusión, dado un conjunto de datos:

$$x_1;\quad x_2;\quad x_3;\quad \ldots;\quad x_n$$

la media armónica es:

$$mh = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$$

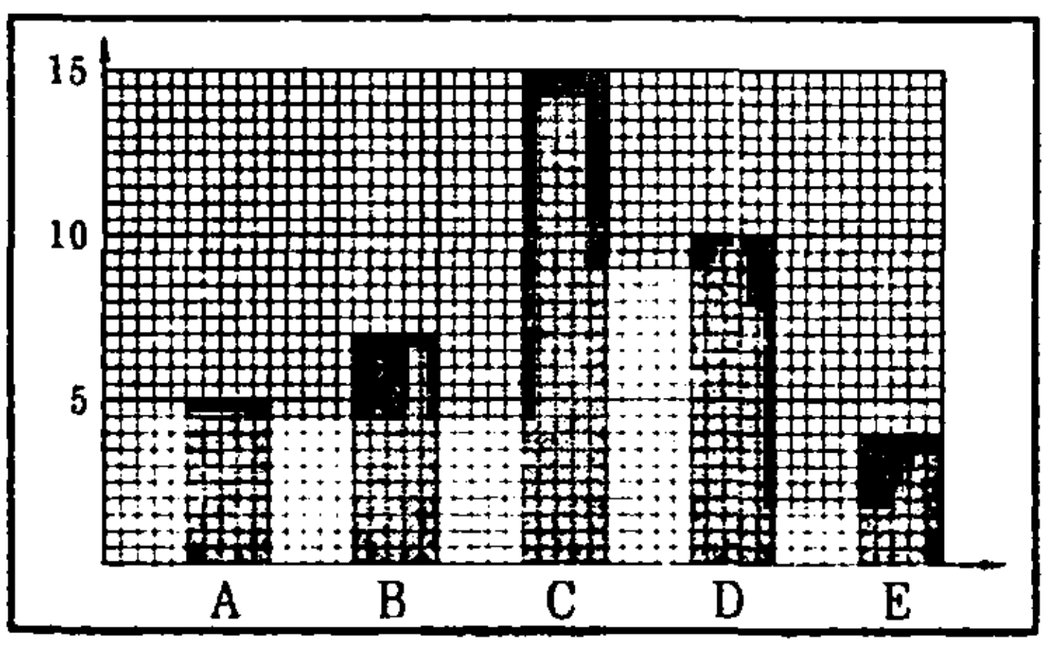
Media armónica ponderada

Datos	x_1	x_2	...	x_n
Frec.	f_1	f_2	...	f_n

$$mh = \frac{f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n}{\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_1}+\frac{f_3}{x_1}+\ldots+\frac{f_n}{x_n}}$$

Problemas

1. Dado el siguiente diagrama de barras:



Hallar la moda

A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

El siguiente conjunto de datos muestra las calificaciones obtenidas por un grupo de alumnos.

12	13	11	15	12	16	10	12	11	12
9	13	10	12	11	12	10	13	9	12
15	8	16	14	12	10	14	12	15	16
10	12	11	13	15	11	16	13	11	8
15	11	13	14	13	11	14	16	16	11
12	13	17	12	14	11	16	12	9	10
15	8	16	11	12	16	14	17	9	15
17	12	9	12	15	12	16	12	17	15

2. Al hacer una tabla de frecuencias, ¿Cuál es la media?

A) 12,8 **B)** 12,61 **C)** 12,71
D) 14,5 **E)** 13,72

3. ¿Cuánto es el valor de la mediana?

A) 18 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 12 **E)** 11

4. ¿Cuánto es la moda?

A) 18 **B)** 17 **C)** 12 **D)** 11 **E)** 10

5. ¿Cuál es el número de estudiantes desaprobados?

A) 6 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 12 **E)** 14

6. ¿Cuántos alumnos obtuvieron la máxima nota?

A) 17 **B)** 14 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 3

7. Se hace un diagrama de sectores ¿qué ángulo le corresponde al grupo de estudiantes que han obtenido 15?

A) 41,5° **B)** 54,5° **C)** 40,5°
D) 42,5° **E)** 50,5°

En química se mide la acidez mediante el potencial de hidrógeno

(PH) el cuál varía de 0 a 14. A continuación se presenta el PH medida en 100 muestras de sustancias.

7,10	7,15	7,46	7,15	7,30	6,58	7,40	7,44
7,17	7,43	7,16	7,09	7,49	7,23	7,06	7,27
6,57	6,55	6,67	7,48	7,29	6,75	7,10	7,43
7,20	7,49	6,53	6,61	6,72	7,39	6,91	6,72
7,32	6,95	6,60	7,34	7,04	6,61	7,05	6,81
6,86	6,99	7,13	6,78	6,79	7,13	7,27	6,98
7,14	6,57	6,67	7,43	7,38	6,70	7,19	6,62
6,93	6,92	7,18	6,89	6,88	7,24	6,77	6,99
7,48	6,73	7,16	6,85	6,87	7,02	6,54	6,96
7,28	6,55	7,49	6,67	6,76	7,35	7,24	6,90
7,09	6,97	6,99	6,92	6,80	6,58	7,18	6,86
6,82	6,63	6,80	6,56	7,43	6,82	6,58	7,02
7,42	7,22	7,15	6,85				

Organizar el conjunto de datos en intervalos usando el método descrito.

8. El rango, del conjunto de datos es:

A) 0,83 **B)** 0,93 **C)** 0,90
D) 1,23 **E)** 1,06

9. El número de intervalos es:

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

10. El tamaño de cada intervalo es:

A) 0,10 **B)** 0,8 **C)** 0,16
D) 0,12 **E)** 0,2

11. ¿Cuál es el intervalo mediano? Dar como respuesta su extremo inferior

A) 6,53 **B)** 6,65 **C)** 6,77
D) 6,89 **E)** 7,01

12. ¿Cuánto es la media?

A) 7,05 **B)** 7,11 **C)** 7,15
D) 7,10 **E)** 7,01

13. ¿Cuál es la diferencia más exacta entre la moda y la mediana?

A) 0,15 **B)** 0,16 **C)** 0,17
D) 0,18 **E)** 0,19

14. Un contratista ha registrado sus observaciones sobre el avance diario en la construcción de paredes. Los datos se presentan en la siguiente tabla.

Obreros	15	11	12	14	10	15	12	13	12	10
Area	31	20	25	27	21	28	23	26	26	19

Ahora tiene un contrato para hacer una pared de 180 m de largo y 2,5 m de altura. Si le dan plazo para que lo construya en 20 días, ¿qué cantidad de obreros debe contratar?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

15. Un fabricante de pantalones, ha mandado realizar una encuesta a los compradores sobre el números de sus medidas. Los datos recabados se representan en el siguiente cuadro.

38	32	34	32	36	28	38	32	36
30	40	34	30	34	28	30	32	34
30	32	28	34	30	42	32	34	36
32	26	40	26	34	36	32	34	32
36	28	30	38	30	32	34	30	40
28	30	36	32	38	36	30	34	42
28	36	32	38	34	32			

Si tiene proyectado fabricar 4500 pantalones, ¿cuánto debe ser del número 32?

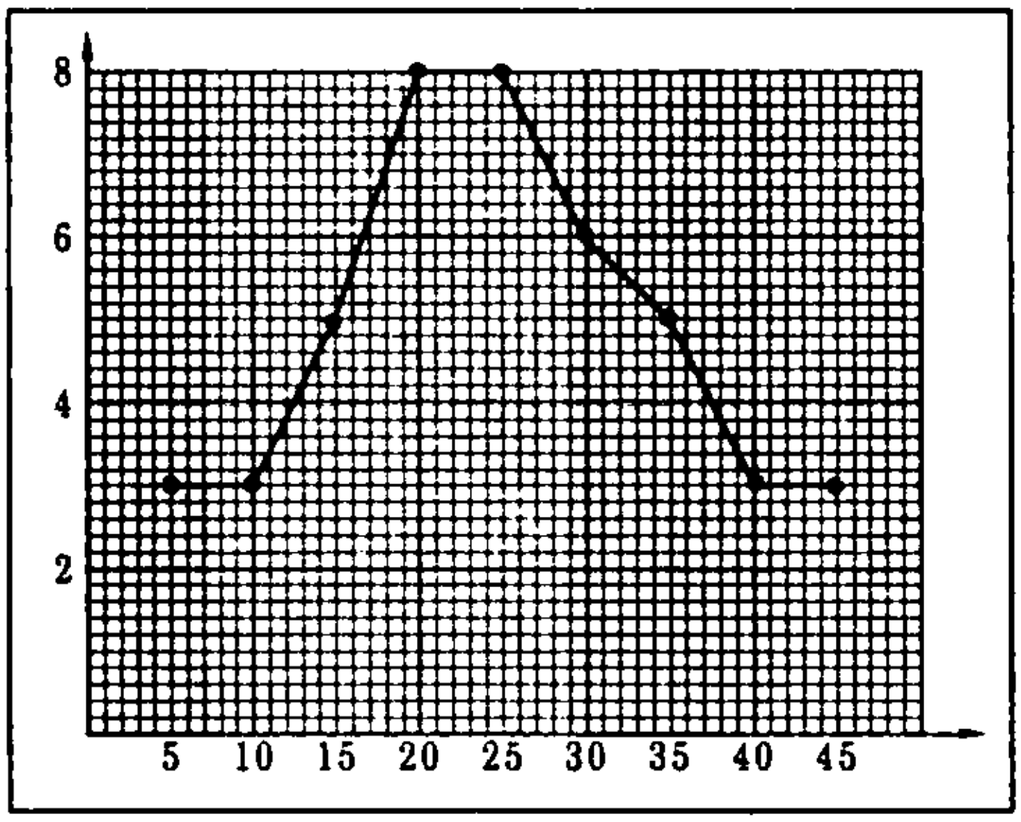
A) 800 **B)** 750 **C)** 950 **D)** 875 **E)** 975

16. En una fábrica el sueldo medio de los 25 obreros es 160 dólares. El sueldo medio, incluyendo los 4 directivos, es 210 dólares. ¿Cuál es el sueldo medio de los 4 directivos (en dólares)?

A) 423 **B)** 522,5 **C)** 479,5
D) 540 **E)** 622,5

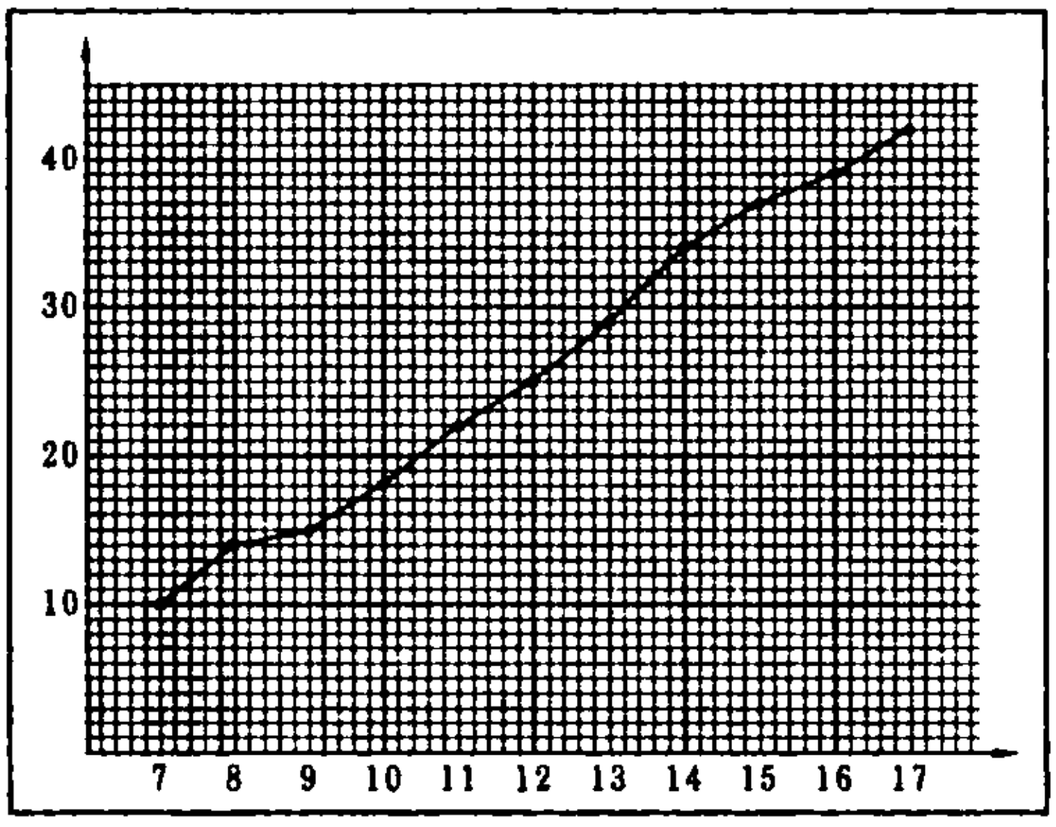
17. En base al polígono de frecuencias, hallar la media y mediana. Dar como respuesta la suma de los dos

estadígrafos.



A) 25 **B)** 27 **C)** 28
D) 26 **E)** 29

18. El gráfico muestra una poligonal acumulada sobre las notas obtenidas en un examen, por los estudiantes de un colegio. ¿Cuántos son los alumnos?

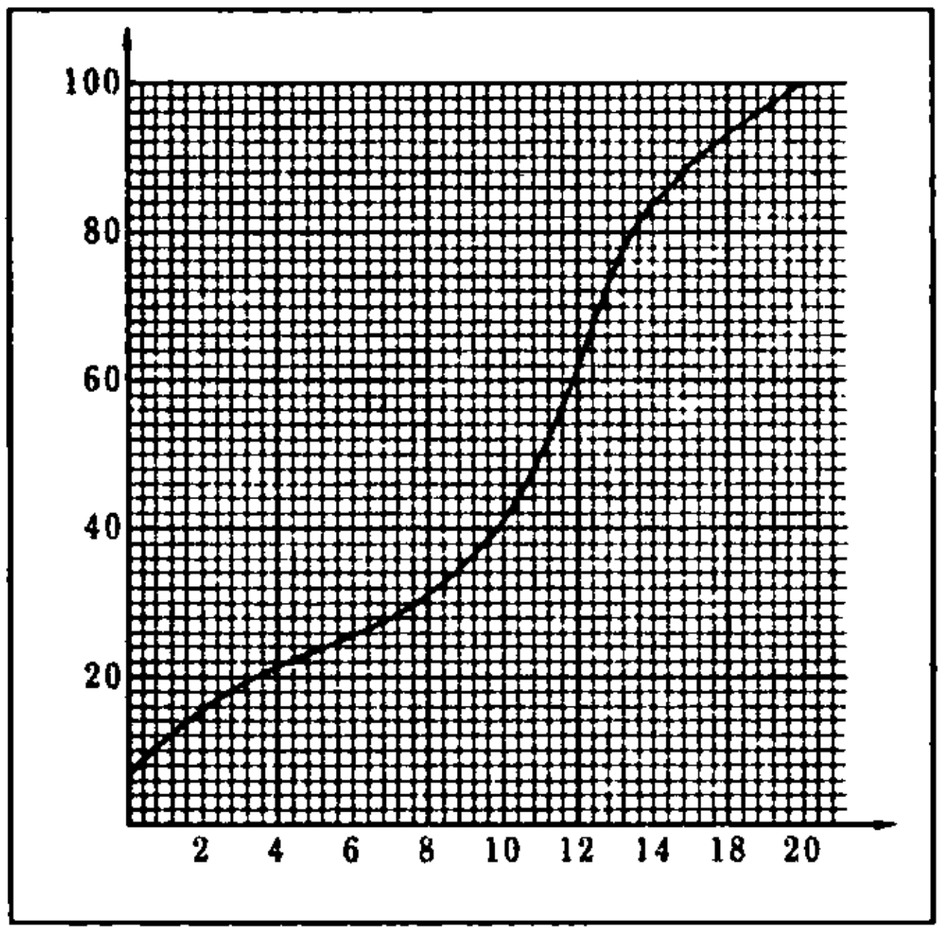


A) 40 **B)** 42 **C)** 45
D) 38 **E)** 50

19. En el gráfico anterior, hallar la media, mediana y moda, dar como respuesta la suma de los tres estadígrafos

A) 30,10 **B)** 28,32 **C)** 29,21
D) 32,14 **E)** 37,12

20. El gráfico muestra una curva que relaciona los datos cuantitativos continuos con sus respectivas frecuencias acumuladas. Hallar la mediana



A) 12 **B)** 14 **C)** 11
D) 13 **E)** 15

21. En una fábrica, se ha tomado como muestra el número de prendas que hace un obrero en cada uno de los 4 días

10 12 15 16

¿Cuál es la media armónica de estos datos?

A) 13 **B)** 12,4 **C)** 13,6
D) 12,8 **E)** 14

22. Se tiene los diferentes precios de un producto observado en 5 meses. Se llama incremento de precio al porcentaje del precio de cualquier mes con respecto al mes anterior:

May.	*Jun.*	*Jul.*	*Ago.*	*Set.*
16	*20*	*22,5*	*25*	*30*

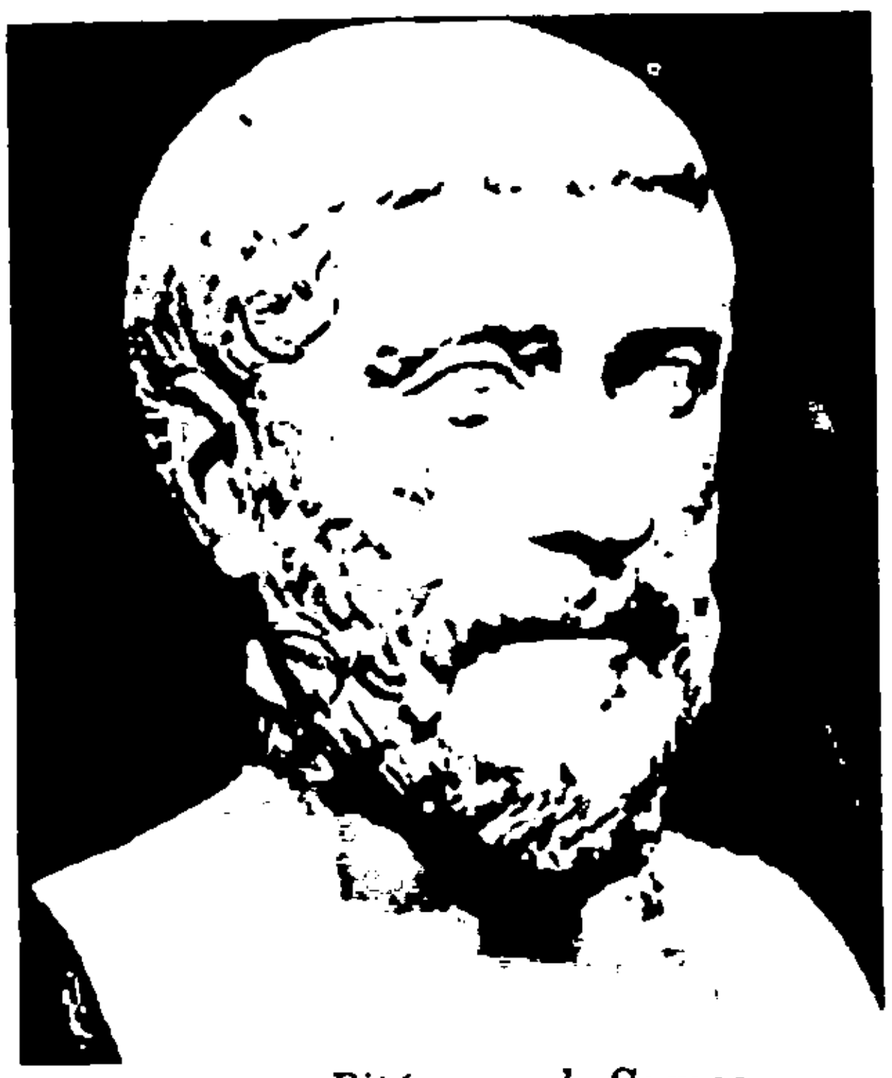
¿Cuál es el incremento promedio?

A) 15,43 **B)** 16,23 **C)** 18,5
D) 20,51 **E)** 21,5

CLAVES DE RESPUESTAS

PROBLEMAS PROPUESTOS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	C	C	B	C	C	B	C	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	E	E	C	E	B	A	B	C	C
21	22								
D	B								



Pitágoras de Samos
(580 a. n. e. – 500 a. n. e.

Pitágoras de Samos

Nació en Samos, Ionia; alrededor del 580 a. n. e.

Era originario de la isla de Samos, situado en el Mar Egeo. En la época de este filósofo la isla era gobernada por el tirano Polícrates. Como el espíritu libre de Pitágoras no podía avenirse a esta forma de gobierno, emigró hacia el occidente, fundando en Cretona (al sur de Italia) una asociación que no tenía el carácter de una escuela filosófica, sino, el de una comunidad religiosa.

En la Escuela Pitagórica podía ingresar cualquier persona, ¡hasta mujeres!. En ese entonces, y durante mucho tiempo y en muchos pueblos, las mujeres no eran admitidas en las escuelas.

Se dice que Pitágoras se casó con una de las alumnas.

El símbolo de la Escuela de Pitágoras y por medio del cual se reconocían entre sí, era el pentágono estrellado, que ellos llamaban *pentalfa* (cinco alfas).

Debido a la influencia política que tuvo la Escuela en esa época, influencia que era contraria a las ideas democráticas existentes, se produjo, tal vez, después del año 500 una revuelta contra ellos, siendo maltratados e incendiadas sus casas. Pitágoras se vio obligado a huir a Tarento, situada al sur de Italia. Algunos piensan que un año más tarde murió asesinado en otra revuelta popular en Metaponto.

Se debe a Pitágoras el carácter esencialmente deductivo de la Geometría y el encadenamiento lógico de sus proposiciones, cualidades que se conservan hasta nuestros días.

La base de su filosofía fue la ciencia de los números, y es así como llegó a atribuirles propiedades físicas a las cantidades y magnitudes. De este modo, el número cinco era el símbolo de color; la pirámide, el del fuego; un sólido simbolizaba la tetrada, es decir, los cuatro elementos esenciales: tierra, aire, agua y fuego.

Falleció alrededor del 500 a. n. e. en Metapontum, Lucania.

BIBLIOGRAFIA

ALLEM, Jean-Pierre (1999).- Nuevos Juegos de ingenio y entretenimiento matemático. Editorial Gedisa, S.A. Barcelona.

ALSINA, Claudi y otros (1989).- Simetría Dinámica. Editorial Síntesis, S.A. Madrid.

CARROLL, Lewis (1976).- El juego de la lógica. Alianza Editorial. Madrid.

CARTER, Philip y RUSSELL, Ken (2000).- Rompecabezas Lógicos. Editorial Grijalbo. Barcelona.

CORIAT, Moisés y otros (1989).- Nudos y Nexos. Editorial Síntesis. Madrid.

DIAZ, BATANERO y CAÑIZARES (1996).- Azar y Probabilidad. Editorial Síntesis S.A. Madrid.

DORIGA, Enrique (1992).- Piensa más y acertarás. Ediciones Paulinas. Lima.

EMMET, Eric (200).- Juegos de acertijos enigmáticos. Gedisa Editorial. Barcelona.

FERNANDEZ, Josefa y RODRIGUEZ, María I. (1991).- Juegos y pasatiempos para la enseñanza de la Matemática elemental. Editorial Síntesis. Madrid.

FIOL, Luisa y FORTUNY, Josep (1990).- Proporcionalidad Directa. La forma y el Número. Editorial Síntesis, S.A. Madrid.

GARDNER, Martin (1987).- Carnaval Matemático. Alianza Editorial. Madrid.

GARDNER, Martin (1985).- Izquierda y Derecha en el Cosmos. Salvat Editores, S.A. Barcelona.

GARDNER, Martin (1988).- Matemática para divertirse. Granica Ediciones. Buenos Aires.

GRIMALDI, Ralph (1989).- Matemáticas Discreta y Combinatoria. Addison-Wesley Iberoamericana. E.U.A.

HERNANDEZ B, Hernán (1998).- Razonamiento Matemático. Ediciones Zafiro S.R.L. Lima.

HERNAN, Francisco y CARRILLO, Elisa (1991).- Recursos en el Aula de Matemáticas. Editorial Síntesis, S.A. Madrid.

HOLT, Michael (1988).- Matemáticas Recreativas Vol. 2 y 3. Ediciones Martínez Roca, S.A. Barcelona.

HONSBERGER, Ross (1994).- El Ingenio de las Matemáticas. Colección la Tortuga de Aquiles. DLS-Euler, Editores. Madrid.

JURGUIN, Ya. (1973).- Bueno, ¿y que? Editorial Mir. Moscú.

LLINARES, Salvador y SANCHEZ, Victoria. (1988).- Fracciones. Editorial Síntesis, S.A. Madrid.

MALA, Matthias (2000).- Juegos de ingenio Vol. I, II, III y IV. Ediciones Robinbook. Barcelona.

MOORE, Rosalind (1990).- Mejores Problemas Lógicos. Ediciones Martínez Roca, S.A. Barcelona. Vol. I y II.

NORTHROP, Eugene P. (1981).- Paradojas Matemáticas. UTEHA. México. 355 p.

PERELMAN, Yákov I. (1975).- Problemas y Experimentos Recreativos. Editorial Mir. Moscú.

SANCHEZ, Manuel (1988).- Cómo dominar la Geometría. Editorial Playor. Madrid.

SANZ, Inés y Otros (1988).- Por los caminos de la Lógica. Editorial Síntesis, S.A. Madrid.

STEWART, Ian (1988).- Conceptos de Matemática Moderna. Alianza Editorial. Madrid.

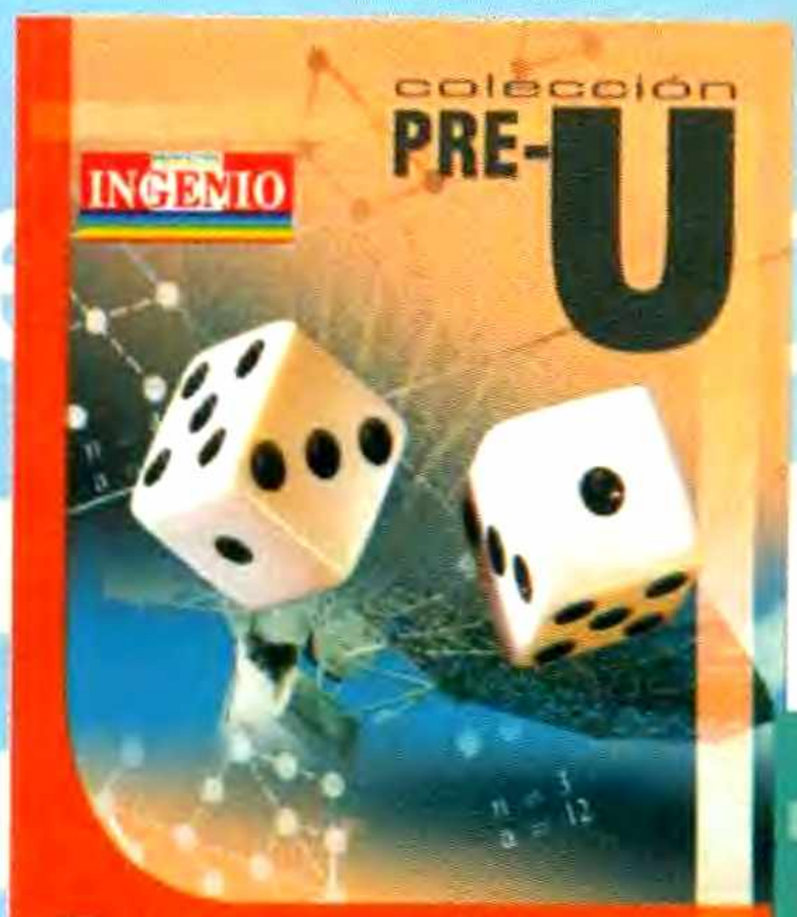
VALQUI, H. (1999).- Jaquemática Vol. I y II. Editorial Hozlo S.R.L. Lima.

ZEVALLOS G., Oscar (1987).- Cómo Plantear Ecuaciones. Centauro Editores S.A. Lima.

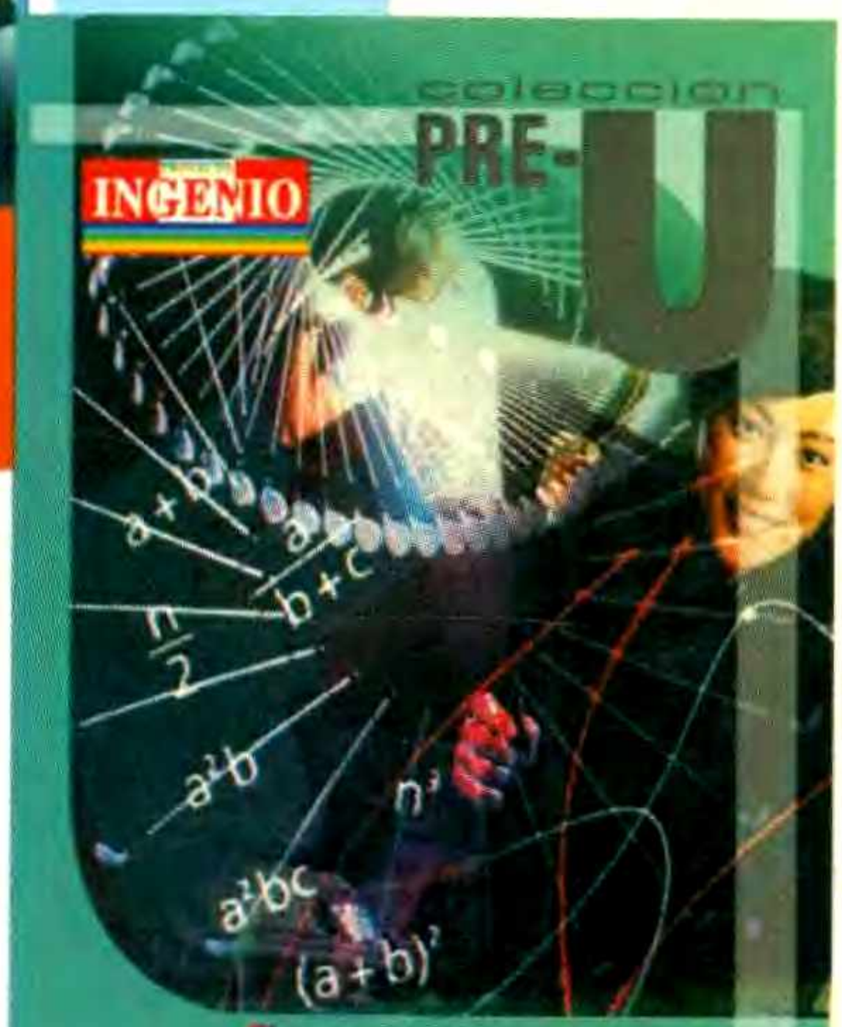
ZEVALLOS G., Oscar (1981).- Razonamiento Matemático. Centauro Editores S.A. Lima.

colección

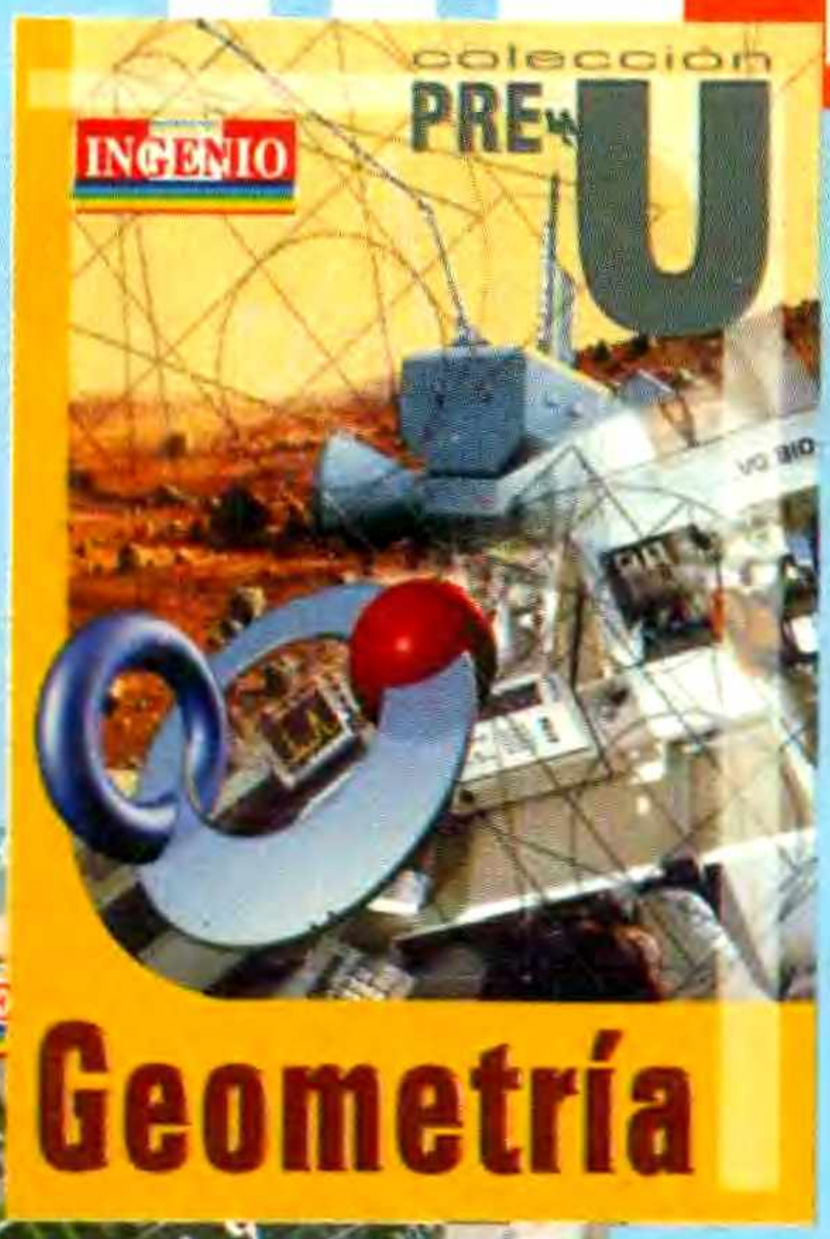
PRE-U



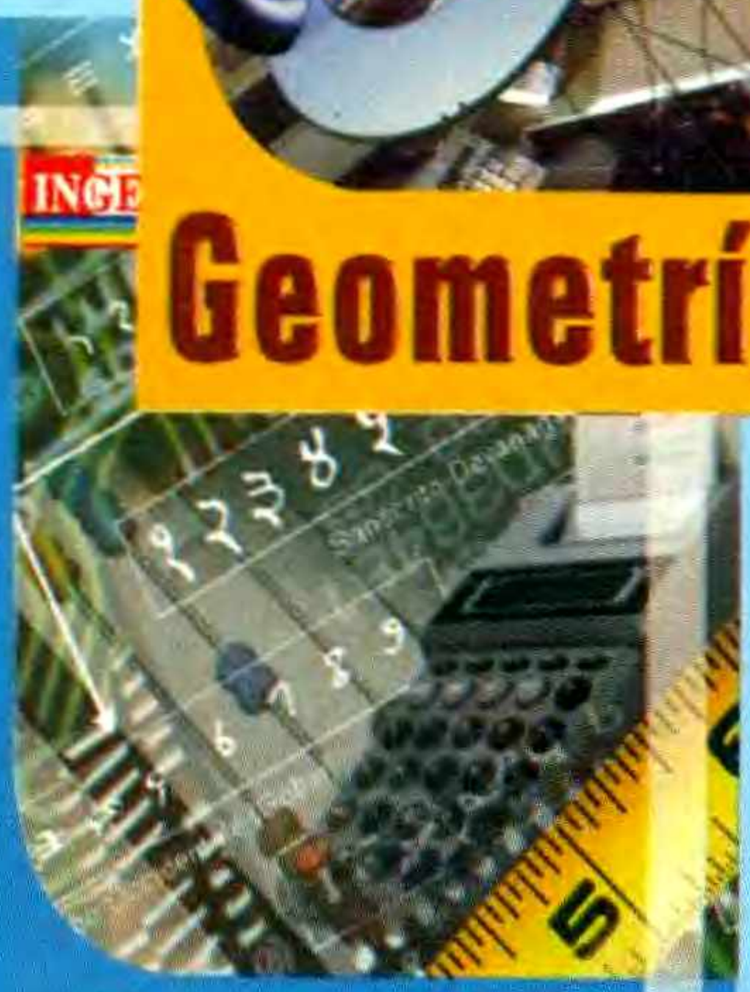
Razonamiento Matemático



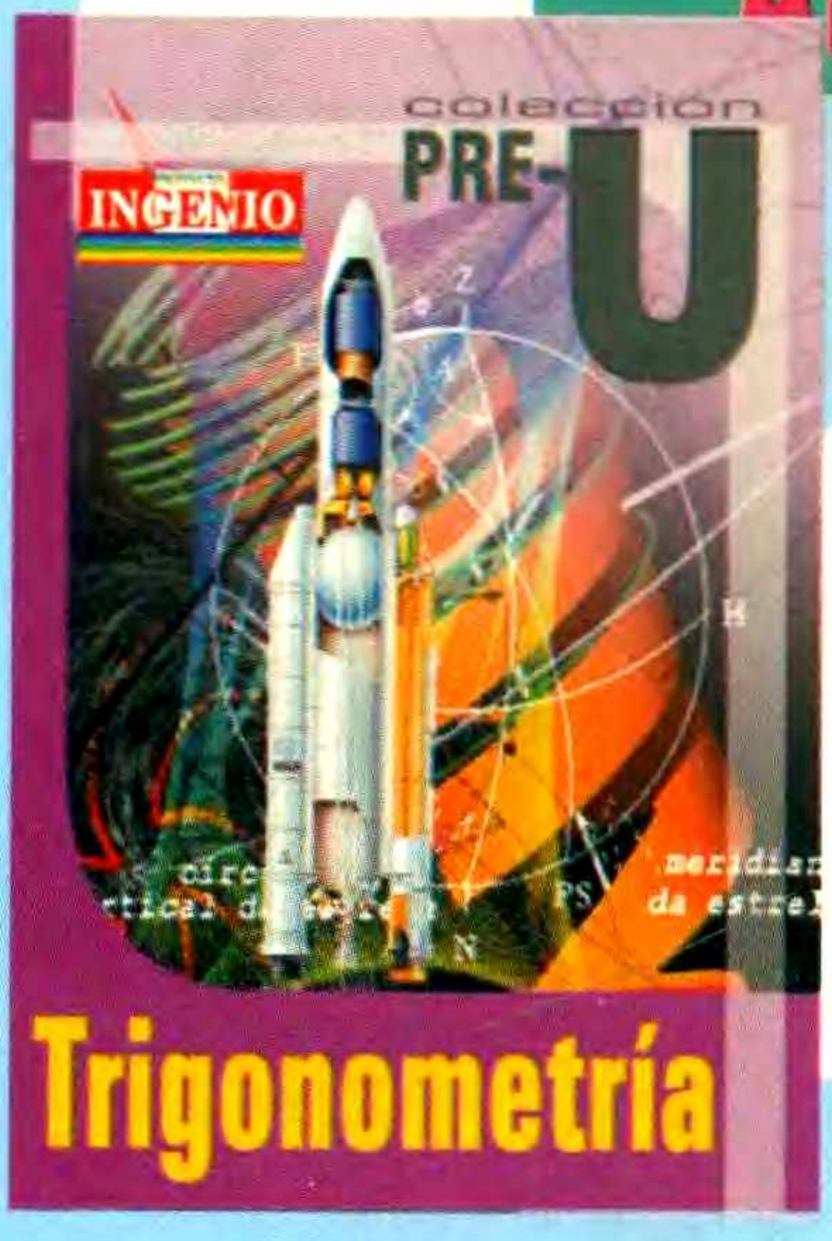
Álgebra



Geometría



Aritmética



Trigonometría

FL
FreeLibros